УДК 519.642.8

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЕЗОЛЬВЕНТ ПРОСТЕЙШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.А. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: KhromovAA@info.sgu.ru

Построены семейства операторов для приближенного решения интегральных уравнений с неограниченными обратными операторами в случае, когда правые части уравнений заданы их среднеквадратичными приближениями.

Ключевые слова: интегральное уравнение, неограниченный обратный оператор, приближенное решение, резольвента.

Solution of Integral Equations via Resolvents of Simplest Differential Operators

A.A. Khromov

Families of operators for approximate solution of integral equations with unbounded inverse operators and right parts of equations specified by the root-mean-square approximations are constructed.

Key words: integral equation, unbounded inverse operator, approximate solution, resolvent.

Целый ряд задач, связанных с вопросами сходимости, оценок погрешности приближенных решений уравнений первого рода приводит к исследованию семейств операторов, аппроксимирующих точное решение [1]. Указанные операторы (по крайней мере, для известных методов регуляризации [2, 3]), в свою очередь, выражаются через резольвенты достаточно сложных неограниченных операторов, что создает значительные трудности при их исследовании. В настоящей работе изначально рассматриваются простейшие дифференциальные операторы и на их базе строятся семейства регуляризирующих операторов достаточно простой конструкции. При этом, кроме классических интегральных уравнений первого рода, рассматриваются уравнения, имеющие структуру уравнений второго рода, но в ситуации, когда обратный оператор является неограниченным.

1. Рассмотрим уравнение

$$Au \equiv u(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)u(t)dt = f(x), \tag{1}$$

где $x \in [0,1]$, ядро $K(x,t)$ непрерывно по x и t, $f(x)$ задана ее δ-приближением $f_\delta(x) : \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$ (условимся в дальнейшем, что если в обозначениях различных норм не указывается отрезок, то это отрезок $[0,1]$), A^{-1} существует.

Тогда в пространстве $L_2[0,1]$ уравнение (1) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Рассмотрим случай, когда оператор A действует из $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$.

Лемма 1. *Если в уравнении* (1) $A \in (C[0,1] \to L_2[0,1])$ *и* A^{-1} *существует, то* A^{-1} *неограничен.*

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon(x) \in C[0,1]$, $\|u_\varepsilon(x)\|_C > 0$, $u_\varepsilon(x) = 0$ при $x\overline{\in}(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, где $x_0 \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ и достаточно мало. Обозначим $f_\varepsilon = Au_\varepsilon$. Тогда утверждение леммы следует из оценок

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2} \le \|A\|_{L_2\to L_2}\|u_\varepsilon\|_{L_2} \le \|A\|_{L_2\to L_2}\sqrt{2\varepsilon}\|u_\varepsilon\|_C.$$

Из леммы 1 получаем, что уравнение (1) при $A \in (C[0,1] \to L_2[0,1])$ есть уравнение первого рода.

Рассмотрим операторы $T_r f = \Omega_r A^{-1} f$, где

$$\Omega_r u = \begin{cases} r\int\limits_x^1 e^{r(x-t)}u(t)dt \equiv \Omega_{r1}u, & x \in [0,1/2], \\ r\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt \equiv \Omega_{r2}u, & x \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Эти операторы использовались в [4] для получения приближений к решению простейшего интегрального уравнения первого рода в случае когда оператор A действует в пространстве $C[0,1]$. При этом

$\Omega_{r1} = -rR_r(L_2)$, $\Omega_{r2} = rR_{-r}(L_1)$, где $R_{-r}(L_1)$ и $R_r(L_2)$ — резольвенты двух простейших дифференциальных операторов L_1 и L_2, имеющих одно и то же дифференциальное выражение $ly = y'$ и различающихся лишь начальными условиями: $y(0) = 0$ для L_1 и $y(1) = 0$ для L_2, со значениями спектрального параметра $\lambda = -r$ для L_1 и $\lambda = r$ для L_2.

Они обладают свойством

$$\|\Omega_r u - u\|_{L_\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{3}$$

В этом легко убедиться, приняв во внимание, что в данном случае

$$\|\cdot\|_{L_\infty[0,1]} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}.$$

Будем считать, что операторы T_r действуют из $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$.

Применим операторы T_r к функции $f_\delta(x)$.

Теорема 1. *Если $u(x) \in C[0,1]$, $f_\delta(x) \in L_2[0,1]$, $\|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$, где $f = Au$, то для сходимости*

$$\|T_r f_\delta - u\|_{L_\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0$$

достаточно выбрать $r = r(\delta)$, так чтобы $r(\delta) \to +\infty$, $r(\delta)\delta^2 \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. Имеем:

$$\|T_r f_\delta - u\|_{L_\infty} \le \|T_r(f_\delta - f)\|_{L_\infty} + \|T_r Au - u\|_{L_\infty}. \tag{4}$$

Далее,

$$\|T_r Au - u\|_{L_\infty} = \|\Omega_r u - u\|_{L_\infty},$$

$$\|T_r(f_\delta - f)\|_{L_\infty} \le \|\Omega_r\|_{L_2 \to L\infty}\|A^{-1}(f_\delta - f)\|_{L_2} \le C\|\Omega_r\|_{L_2 \to L_\infty}\delta, \quad C = C(\lambda),$$

в силу ограниченности A^{-1} в $L_2[0,1]$.

Из равенства $\|\Omega_r\|_{L_2 \to L_\infty} = \max\{\|\Omega_{r1}\|_{L_2[0,1] \to C[0,1/2]}, \|\Omega_{r2}\|_{L_2[0,1] \to C[1/2,1]}\}$ и вида (2) операторов Ω_r получаем

$$\|\Omega\|_{L_2 \to L_\infty} = \frac{r^{1/2}}{\sqrt{2}}(1 - e^{-r})^{1/2}. \tag{5}$$

Отсюда и из (3) следует утверждение теоремы.

Для наглядности изложенного метода и конкретизации операторов T_r рассмотрим случай уравнения с вырожденным ядром:

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)v_i(t),$$

где $\{g_i(x)\}$, $\{v_i(t)\}$, $i = 1, \dots, n$ — линейно независимые системы функций.

В этом случае решение уравнения (1) имеет вид ([5])

$$u(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i g_i(x) + f(x), \tag{6}$$

где c_i находятся из алгебраической системы уравнений:

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_j + \beta_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{7}$$

$$\alpha_{ij} = (g_j, v_i), \quad \beta_i = (f, v_i).$$

Определитель системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \cdots & -\lambda\alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \cdots & 1 - \lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

$\Delta(\lambda) \ne 0$, поскольку A^{-1} существует.

Обозначим через γ_{ji} — алгебраическое дополнение элемента, стоящего в j-й строке, i-м столбце определителя $\Delta(\lambda)$, взятое с противоположным знаком.

Тогда из (6),(7) получим:

$$A^{-1}f = \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ji}(f, v_j) g_i + f.$$

При этом справедлива оценка:

$$\|A^{-1}f\|_{L_2} \le \tilde{C}(\lambda, n)\|f\|_{L_2},$$

где $\tilde{C}(\lambda, n) = 1 + \frac{|\lambda|}{|\Delta(\lambda)|} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |\gamma_{ji}| \, \|v_j\|_{L_2} \|g_i\|_{L_2}$.

Отсюда и из (5) справедлива оценка:

$$\|T_r\|_{L_2 \to L_\infty} \le C r^{1/2} \delta,$$

где $C = \frac{\tilde{C}(\lambda,n)}{\sqrt{2}}$.

Сами же операторы T_r будут иметь вид:

$$T_r f = \begin{cases} T_{r1} f, & x \in [0, 1/2], \\ T_{r2} f, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{8}$$

где

$$T_{r1} f = \frac{r\lambda}{\Delta(\lambda)} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ji}(f, v_j) \int\limits_x^1 e^{r(x-t)} g_i(t) dt + \int\limits_x^1 e^{r(x-t)} f(t) dt, \tag{9}$$

$T_{r2} f$ отличается от $T_{r1} f$ заменой интегралов в правой части (9) интегралами $\int\limits_0^x e^{-r(x-t)} g_i(t) dt$ и $\int\limits_0^x e^{-r(x-t)} f(t) dt$ (соответственно).

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если в уравнении* (1) *ядро* $K(x,t)$ *вырожденное, то операторы* T_r *имеют вид* (8).

2. Рассмотрим уравнение Вольтерра первого рода:

$$Au \equiv \int\limits_0^x A(x,t) u(t) dt = f(x), \tag{10}$$

где $A \in (C[0,1] \to L_2[0,1])$.

а) Пусть сначала $A(x,t) \equiv 1$. Очевидно, в этом случае $A^{-1}f = f'$, $f(0) = 0$.

Если мы, как в разд. 1, построим семейство операторов $\Omega_r A^{-1}$, то при интегрировании по частям придем к выражениям:

$$\Omega_r A^{-1} f = \begin{cases} r^2 \int\limits_x^1 e^{-r(t-x)} f(t) dt + r e^{-r(1-x)} f(1) - r f(x), & x \in [0, 1/2], \\ -r^2 \int\limits_0^x e^{-r(x-t)} f(t) dt + r f(x), & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{11}$$

Присутствие неинтегральных слагаемых делает указанные операторы неограниченными (как операторы из $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$).

Возьмем тогда вместо Ω_r операторы $\Omega_r^{(2)} = \begin{cases} \Omega_{r1}^2, & x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{r2}^2, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$

Лемма 2. *Операторы* $\Omega_r^{(2)}$ *имеют вид*

$$\Omega_r^{(2)} u = \begin{cases} r^2 \int\limits_x^1 (t-x) e^{r(x-t)} u(t) dt \equiv \Omega_{r1}^2 u, & x \in [0, 1/2], \\ r^2 \int\limits_0^x (x-t) e^{-r(x-t)} u(t) dt \equiv \Omega_{r2}^2 u, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство легко получается, если взять по частям интегралы

$$\int\limits_x^1 e^{r(x-t)} \int\limits_t^1 e^{r(t-\tau)} u(\tau) d\tau\, dt \quad \text{и} \quad \int\limits_0^x e^{-r(x-t)} \int\limits_0^t e^{-r(t-\tau)} u(\tau) d\tau\, dt.$$

Лемма 3. *Справедливы представления:*

$$\Omega_r^{(2)} A^{-1} f = \begin{cases} -r\Omega_{r1} f + r\Omega_{r1}^2 f + r^2 e^{-r(1-x)}(1-x) f(1), & x \in [0,1/2], \\ r\Omega_{r2} f - r\Omega_{r2}^2 f, & x \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство получим, если применим операторы (12) к $f'(x)$ и проведем интегрирование по частям.

В выражениях (13) опять присутствует неинтегральное слагаемое, но в отличие от (11) это слагаемое может быть как угодно малым при больших значениях r. Учитывая это обстоятельство, возьмем в качестве регуляризирующих операторов операторы

$$T_r^\circ f = \begin{cases} -r\Omega_{r1} f + r\Omega_{r1}^2 f, & x \in [0,1/2], \\ r\Omega_{r2} f - r\Omega_{r2}^2 f, & x \in [1/2,1], \end{cases} \tag{14}$$

т.е. отбросим неинтегральное слагаемое в (13).

Пусть $f = Au$. Выясним вопрос о приближающих свойствах операторов $T_r^\circ A$. Из (13) и (14) получим:

$$T_r^\circ A u = \begin{cases} \Omega_{r1}^2 u - r^2 e^{-r(1-x)} \int\limits_0^1 u(t) dt, & x \in [0,1/2], \\ \Omega_{r2}^2 u, & x \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{15}$$

Лемма 4. *Если* $u(x) \in C^2[0,1]$, *то* $\|\Omega_r^{(2)} u - u\|_{L_\infty} \to 0$ при $r \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим $\Omega_{ri}^2 u = \Omega_{ri}(\Omega_{ri} u)$, $i = 1,2$. Используя выражения для Ω_{ri} из (2) и беря интегралы по частям, получим:

$$\Omega_{r1}^2 u = -r(1-x)e^{-r(1-x)} u(1) - e^{-r(1-x)} u(1) + u(x) - (1-x) e^{-r(1-x)} u'(1) +$$

$$+2\int\limits_x^1 e^{r(x-t)} u'(t) dt + \int\limits_x^1 e^{r(x-t)} (t-x) u''(t) dt; \tag{16}$$

$$\Omega_{r2}^2 u = u(x) - e^{-rx} u(0) - rxe^{-rx} u(0) + xe^{-rx} u'(0) - 2\int\limits_0^x e^{-r(x-t)} u'(t) dt + \int\limits_0^x e^{-r(x-t)} (x-t) u''(t) dt.$$

Из выражений (16), учитывая, что оператор Ω_{r1}^2 действует на отрезке $[0,1/2]$, а Ω_{r2}^2 — на отрезке $[1/2,1]$, получаем оценки:

$$\|\Omega_{r1}^2 u - u\|_{C[0,1/2]} = O(re^{-r/2}\|u\|_C) + O(e^{-r/2}\|u\|_C) + O(e^{-r/2}\|u'\|_C) + O\Big(\frac{1}{r}\|u'\|_C\Big) + O\Big(\frac{1}{r}\|u''\|_C\Big).$$

Такие же оценки имеет норма $\|\Omega_{r2}^2 u - u\|_{C[1/2,1]}$.

Отсюда следует утверждение леммы 4.

Следствие. *Если* $u(x) \in C^2[0,1]$, *то* $\|T_r^\circ A u - u\|_{L_\infty} \to 0$ при $r \to \infty$.

Лемма 5. *Для операторов* T_{rk}°, $k = 1,2$, *справедливы оценки:*

$$\|T_{r1}^\circ A\|_{C[0,1/2]} = O(1), \quad \|T_{r2}^\circ A\|_{C[1/2,1]} = O(1).$$

Доказательство. Для операторов Ω_{rk}, $k = 1,2$, справедливы очевидные оценки:

$$\|\Omega_{rk} u\|_C = O(\|u\|_C),$$

где для $k=1$ берется отрезок $[0,1/2]$, для $k=2$ — отрезок $[1/2,1]$. Но тогда и

$$\|\Omega_{rk}(\Omega_{rk}u)\|_C = O(\|u\|_C).$$

Из (15) вытекает, что эти же оценки справедливы и для $T_{rk}^{\circ}Au$.

На основании следствия из леммы 4, леммы 5 и теоремы Банаха – Штейнгауза справедлива

Теорема 3. *Для любой непрерывной функции $u(x)$ имеет место сходимость:*

$$\|T_r^{\circ}Au - u\|_{L_\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Теперь рассмотрим случай, когда операторы T_r° применяются к функции $f_\delta(x)$.

Лемма 6. *Для норм операторов T_r° справедливы равенства, асимптотические по r при $r \to \infty$:*

$$\|T_r^{\circ}\|_{L_2 \to L_\infty} = \frac{r^{3/2}}{2} + O\big(r^{7/2}e^{-r}\big). \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\|T_r^{\circ}\|_{L_2\to L_\infty} = \max\{\|T_{r1}^{\circ}\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}, \|T_{r2}^{\circ}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}\},$$

$$\|T_{r1}^{\circ}\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]} = \max_{0\le x\le 1/2}\left(\int_x^1 K_{r1}^2(x,t)dt\right)^{1/2},$$

$$\|T_{r2}^{\circ}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]} = \max_{1/2\le x\le 1}\left(\int_0^x K_{r2}^2(x,t)dt\right)^{1/2},$$

где в соответствии с (2), (12) и (14)

$$K_{r1}(x,t) = r^2(-1 + r(t-x))e^{r(x-t)},\ K_{r2}(x,t) = r^2(1 - r(x-t))e^{-r(x-t)}.$$

Пусть $x \in [0,1/2]$. Тогда, делая замену $t - x = \xi$, получим

$$\int_x^1 K_{r1}^2(x,t)dt = r^4 \int_0^{1-x}(r\xi - 1)^2 e^{-2r\xi}d\xi = \frac{r^3}{4} + O(r^5e^{-r}),$$

откуда будем иметь равенство:

$$\|T_{r1}^{\circ}\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]} = \frac{r^{3/2}}{2} + O\big(r^{7/2}e^{-r}\big).$$

Такая же ситуация будет иметь место и для $\|T_{r2}^{\circ}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}$.

На основании теоремы 3, леммы 6 и оценки (4), записанной для операторов T_r°, для операторов T_r° справедлива

Теорема 4. *Для сходимости*

$$\|T_r^{\circ}f_\delta - u\|_{L_\infty} \to 0 \quad \textit{при} \quad r \to \infty$$

достаточно выбрать $r = r(\delta)$, так чтобы $r(\delta) \to +\infty$, $r^{3/2}(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

б) Пусть теперь $A(x,t)$ в уравнении (10) — ядро, имеющее непрерывные производные $A_x(x,t)$ и $A_{xt}(x,t)$, причем $A(x,x) = 1$, а $A_x(x,t)_{|t=x} = 0$.

Тогда

$$A^{-1}f = f' + Nf', \tag{18}$$

где $N = -A_x + A_x^2 - A_x^3 + \cdots$, A_x — интегральный оператор с ядром $A_x(x,t)$.

В этом легко убедиться, продифференцировав обе части уравнения и воспользовавшись известными фактами из теории интегральных уравнений.

По аналогии с предыдущим случаем рассмотрим операторы:

$$T_r f = \begin{cases} \Omega_r^{(2)} A^{-1} f - r^2 e^{-r(1-x)}(1-x)f(1) \equiv T_{r1} f, & x \in [0,1/2], \\ \Omega_r^{(2)} A^{-1} f \equiv T_{r2} f, & x \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{19}$$

Лемма 7. *Операторы* T_r *имеют вид:*

$$T_r f = T_r^\circ f + T_{rN} f,$$

где $T_r^\circ f$ *определены в* (14),

$$T_{rN} f = \begin{cases} r^2 \int\limits_x^1 N(x,t,r) f(t)dt, & x \in [0,1/2], \\ r^2 \int\limits_0^x N(x,t,r) f(t)dt, & x \in [1/2,1], \end{cases}$$

$$N(x,t,r) = \begin{cases} -\int\limits_x^1 (\tau - x) e^{-r(\tau - x)} N_t(\tau,t)d\tau, \ t \le x, & x \in [0,1/2], \\ -\int\limits_t^1 (\tau - x) e^{-r(\tau - x)} N_t(\tau,t)d\tau, \ t \ge x, & x \in [0,1/2], \\ -\int\limits_t^x (x - \tau) e^{-r(x-\tau)} N_t(\tau,t)d\tau, & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Из (18),(19) имеем:

$$T_{r1} f = \Omega_{r1}^2 f' - r^2 e^{-r(1-x)}(1-x)f(1) + \Omega_{r1}^2 (Nf') \equiv T_{r1}^\circ f + \Omega_{r1}^2 (Nf'),$$

$$T_{r2} f = \Omega_{r2}^2 f' + \Omega_{r2}^2 (Nf') \equiv T_{r2}^\circ f + \Omega_{r2}^\circ (Nf').$$

Обозначим $T_{rN} f = \Omega_r^{(2)}(Nf')$, где $Nf' = \int\limits_0^x N(x,t) f(t)dt$. Беря последний интеграл по частям и учитывая, что $N(x,x) = 0$, $f(0) = 0$, получаем:

$$\Omega_{r1}^2 (Nf') = -r^2 \int\limits_x^1 (t-x) e^{-r(t-x)} \int\limits_0^t N_\tau(t,\tau) f(\tau) d\tau \, dt.$$

Меняя порядок интегрирования, а затем меняя ролями t и τ, приходим к выражению $T_{rN} f$ в лемме при $x \in [0,1/2]$. Аналогично получаем выражение $T_{rN} f$ для отрезка $[1/2,1]$.

Теорема 5. *Для операторов* T_r *справедлива теорема 4 с заменой* T_r° *на* T_r.

Доказательство. Для операторов $T_r A$ справедливы выражения (15) с заменой $\int\limits_0^1 u(t)dt$ на $\int\limits_0^1 A(1,t)u(t)dt$. Значит, будет справедлива и теорема 3 с заменой $T_r^\circ A$ на $T_r A$.

Далее, для норм $\|T_{rN}\|_{L_2 \to L_\infty}$ справедлива оценка: $\|T_{rN}\|_{L_2 \to L_\infty} = O(r)$. Действительно, обозначим

$$T_{rN} f = \begin{cases} T_{rN}^{(1)} f, & x \in [0,1/2], \\ T_{rN}^{(2)} f, & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Из леммы 7 имеем:

$$\|T_{rN}^{(1)} f\|_{C[0,1/2]} \le r^2 \|N_t(\tau,t)\|_{C[0,1]} \int\limits_x^1 (\tau - x) e^{-r(\tau - x)} d\tau \|f\|_{L_2},$$

откуда получаем требуемую оценку. Аналогично оцениваем $\|T_{rN}^{(2)} f\|_{C[1/2,1]}$.

Наконец, пользуемся оценкой (4)и приходим к утверждению теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (*проект НШ*-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.:Наука, 1978.
2. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49–52.
3. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. *Хромов А.А.* О приближенном решении уравнения первого рода с оператором интегрирования // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронеж. весен. мат. школы «Понтрягинские чтения – XIX». Воронеж: Издат.-полиграфич. центр ВГУ, 2008. С. 224–225.
5. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959.

УДК 517.54

ОДИН СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С ОСОБЕННОСТЯМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

П.Л. Шабалин

Казанский архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики
E-mail: Pavel.Shabalin@mail.ru

Рассмотрена задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов в ситуации, когда ряд, составленный из скачков аргумента функции коэффициентов, расходится, а индекс задачи конечен. Получена формула общего решения этой задачи, исследована картина разрешимости.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, индекс задачи, задача Шварца.

Certain Case of the Riemann – Hilbert Boundary Value Problem with Peculiarities of Coefficients

P.L. Shabalin

We consider the Riemann – Hilbert boundary value problem for a case where the coefficients have countable set of discontinuity points of the first kind such that the series of jumps of argument of the coefficient function is divergent, but the index of the Hilbert problem is finite. We derive the formulae for general solution of the problem and investigate the picture of solvability.

Key words: Riemann – Gilbert value problem, finite index, Schwarz value problem.

Задача Гильберта для полуплоскости — это задача об определении аналитической в верхней полуплоскости $D = \{z : z = x + iy,\ y > 0\}$ функции $\Phi(z)$ по заданному краевому условию:

$$a(t)\,\mathrm{Re}\,\Phi(t) - b(t)\,\mathrm{Im}\,\Phi(t) = c(t). \tag{1}$$

Ситуация, когда коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ непрерывны на вещественной оси всюду, кроме конечного множества точек разрыва первого рода, изучалась в работах [1, с. 467; 2, с. 302; 3; 4]. Задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов впервые исследовалась Р.Б. Салимовым и П.Л. Шабалиным в работе [5, с. 108]. В статье [6] эта задача изучена в случаях, когда ряд, составленный из скачков в точках разрыва коэффициентов функции $\nu(t) = \arg G(t)$, $G(t) = a(t) - ib(t)$, сходится, и индекс задачи конечен, либо указанный ряд расходится, и индекс обращается в плюс бесконечность. В данной статье эта задача рассмотрена в еще не изученном случае, когда коэффициенты имеют счетное множество точек разрыва первого рода, причем указанный ряд расходится, но индекс задачи конечен.

Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициента краевой задачи Римана ранее изучался М.И. Журавлевой в работах [7, 8], в которых допускается обращение коэффициента краевого условия в нуль или в бесконечность целого порядка в бесконечном множестве точек. Такие особенности коэффициента не характерны для задачи Гильберта. Потому использование результатов М.И. Журавлевой для решения задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов методом Н.И. Мусхелишвили не выглядит перспективным, так как требует особого нетривиального рассмотрения.

Рассмотрим задачу об определении аналитической в верхней полуплоскости D функции $\Phi(z)$ по краевому условию (1), которое выполняется на вещественной оси L всюду, кроме сгущающейся на