11. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 6. С. 42–53.
12. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 24–34.
13. *Рыхлов В. С.* О свойствах собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 31–44.
14. *Шигаева О. В.* Кратная неполнота системы собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 50–59.

УДК 517.946

О КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ БИПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

К. И. Худавердиев, М. Н. Гейдарова

Бакинский государственный университет,
кафедра математики
E-mail: karlenkhudaverdiyev@yahoo.com

Изучены вопросы существования и единственности классического решения одномерной смешанной задачи с однородными граничными условиями типа Рикье для одного класса полулинейных бипараболических уравнений четвёртого порядка. Методом априорных оценок доказана теорема существования в целом классического решения изучаемой смешанной задачи.

Ключевые слова: бипараболическое уравнение, классическое решение, существование в малом, существование в целом, априорная оценка.

On Classical Solvability of One-Dimensional Mixed Problem for Fourth Order Semilinear Biparabolic Equations

K. I. Khudaverdiyev, M. N. Heydarova

Baku State University,
Chair of Mathematics
E-mail: karlenkhudaverdiyev@yahoo.com

Existence and uniqueness of classical solution of one-dimensional mixed problem with Riquier type homogenous boundary conditions for one class of fourth order semilinear biparabolic equations are studied. A priori estimates method is used to prove the existence in large theorem for classical solution of mixed problem under consideration.

Key words: biparabolic equation, classical solution, existence in small, existence in large, a priori estimate.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению вопросов существования (как в малом, так и в целом) и единственности классического решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)) \tag{1}$$

$$(0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant \pi),$$

$$u(0,x)=\varphi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant\pi),\quad u_t(0,x)=\psi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant\pi), \tag{2}$$

$$u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0\quad (0\leqslant t\leqslant T), \tag{3}$$

где $0<T<+\infty$, F, φ, ψ — заданные функции, а $u(t,x)$ — искомая функция, причём под классическим решением задачи (1)–(3) понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T]\times[0,\pi]$ вместе с производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)–(3) в обычном смысле.

Отметим некоторые работы, в определённом смысле связанные с задачей (1)–(3).

В 1969 году в работе [1] Ю. И. Ковача рассмотрена задача (1)–(3) в случае, когда $F=F(t,x,u(t,x))$ и специальным методом последовательных приближений доказана теорема существования и единственности ее классического решения.

В том же году в работе [2] Ю. И. Ковача рассмотрена задача (1)–(3) в случае, когда $F=F(t,x,u(t-\tau(t,x),x))$, где $\tau(t,x)\geqslant 0$; принципом сжатых отображений доказано существование в малом ее классического решения.

В 2001 году рассмотрено модифицированное уравнение Буссинеска высокого порядка с затухающим членом вида [3]

$$u_{tt} + \alpha u_{txx} + \beta u_{xxxx} + \gamma (u^n)_{xx} = 0, \quad n \geqslant 3,$$

где α, β, γ — константы. Найдены решения в виде уединённых волн.

В работе [4] (2007) изучены вопросы существования и единственности обобщённого (в определённом смысле) решения задачи (1)–(3).

Вопросы существования и единственности решения почти всюду задачи (1)–(3) представлены в [5, 6] (2008).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

В этом разделе приведём некоторые известные и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое классическое решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx, \tag{4}$$

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t,x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ t \in [0,T]). \tag{5}$$

Тогда после применения метода Фурье нахождение функций $u_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений:

$$u_n(t) = (1 + n^2 t) e^{-n^2 t} \varphi_n + t e^{-n^2 t} \psi_n + \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} \mathcal{F}(u(\tau,x)) \sin nx (t-\tau) e^{-n^2(t-\tau)} dx d\tau \tag{6}$$

$$(n = 1, 2, \ldots;\ t \in [0,T]),$$

$$\varphi_n \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx, \quad \psi_n \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

$$\mathcal{F}(u(t,x)) \equiv F(t, x, u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x)), \tag{8}$$

причём нужно иметь в виду обозначения из (4) и (5).

2. Исходя из определения классического решения задачи (1)–(3), доказана

Лемма. *Если* $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ *— любое классическое решение задачи* (1)–(3)*, то функции* $u_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *удовлетворяют системе* (6).

3. С целью изучения вопроса существования классического решения задачи (1)–(3) систему (6) при предположениях

$$\mathcal{F}(u(t,x)), \frac{\partial}{\partial x}\{\mathcal{F}(u(t,x))\} \in C([0,T] \times [0,\pi]), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathcal{F}(u(t,x))\} \in C([0,T]; L_2(0,\pi)), \tag{9}$$

$$\mathcal{F}(u(t,x))|_{x=0} = \mathcal{F}(u(t,x))|_{x=\pi} = 0 \quad \forall\ t \in [0,T], \tag{10}$$

интегрируя по частям по x два раза в правой части (6), преобразуем к виду

$$u_n(t) = (1 + n^2 t) e^{-n^2 t} \varphi_n + t e^{-n^2 t} \psi_n -$$

$$- \frac{2}{\pi n^2} \int_0^t \int_0^{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathcal{F}(u(\tau,x))\} \sin nx (t-\tau) e^{-n^2(t-\tau)} dx d\tau \quad (n = 1, 2, \ldots;\ t \in [0,T]). \tag{11}$$

4. Обозначим через $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (4), рассматриваемых на $[0,T] \times [0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t) \in C^{(l)}([0,T])$ и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^{l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| u_n^{(i)}(t) \right| \right)^{\beta_i} \right\}^{1/\beta_i} < +\infty,$$

где $l \geqslant 0$ — целое число, $\alpha_i \geqslant 0$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant 2$ $(i = \overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\| = J_T(u)$. Все эти пространства банаховы [7].

5. Очевидно, что если $u(t,x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^k_{2,T}$, то для всех $t \in [0,T]$:

$$\|u\|_{B^{k-1}_{1,t}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |u_n(\tau)| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k \max_{0\leqslant\tau\leqslant t}|u_n(\tau)|\right)^2\right\}^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B^k_{2,t}}\,; \quad (12)$$

аналогично

$$\forall\ u \in B^{i,j}_{2,2,T} \quad \|u\|_{B^{i-1,j-1}_{1,1,t}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B^{i,j}_{2,2,t}} \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \quad (13)$$

где k, i, j — любые натуральные числа.

6. Пусть $u(t,x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^{5,3}_{2,2,T}$. Тогда, пользуясь оценкой (12) для $k = 5$ и $k = 3$, для всех $t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$ имеем:

$$\left|\partial^i u(t,x)/\partial x^i\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^i |u_n(t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^i \max_{0\leqslant\tau\leqslant t}|u_n(\tau)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \max_{0\leqslant\tau\leqslant t}|u_n(\tau)| \equiv$$
$$\equiv \|u\|_{B^4_{1,t}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B^5_{2,t}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B^{5,3}_{2,2,t}} \qquad (i = \overline{0,4}), \quad (14)$$

$$\left|\partial^{1+j} u(t,x)/\partial t \partial x^j\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^j |u'_n(t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \max_{0\leqslant\tau\leqslant t}|u'_n(\tau)| \equiv$$
$$\equiv \|u_t\|_{B^2_{1,t}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u_t\|_{B^3_{2,t}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B^{5,3}_{2,2,t}} \qquad (j = \overline{0,2}). \quad (15)$$

Из оценок (14), (15) и структуры пространства $B^{5,3}_{2,2,T}$ следует, что

$$u(t,x),\ u_x(t,x),\ u_{xx}(t,x),\ u_{xxx}(t,x),\ u_{xxxx}(t,x),\ u_t(t,x),\ u_{tx}(t,x),\ u_{txx}(t,x) \in C([0,T]\times[0,\pi]). \quad (16)$$

Кроме того, очевидно, что для всех $t \in [0,T]$:

$$\int\limits_0^\pi u^2_{xxxxx}(t,x)dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n^5 u_n(t))^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\|u\|^2_{B^5_{2,t}} \leqslant \frac{\pi}{2}\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}}\,, \quad (17)$$

$$\int\limits_0^\pi u^2_{txxx}(t,x)dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3 |u'_n(t)|\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\|u_t\|^2_{B^3_{2,t}} \leqslant \frac{\pi}{2}\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}}\,. \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что

$$u_{xxxxx}(t,x),\ u_{txxx}(t,x) \in C([0,T]; L_2[0,\pi]). \quad (19)$$

7. Пусть для натурального числа k:

$$\varphi(x) \in C^{(k-1)}([0,\pi]), \quad \varphi^{(k)}(x) \in L_2(0,\pi), \quad \varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0 \quad \left(s = \overline{0, \left[\tfrac{k-1}{2}\right]}\right).$$

Тогда с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя, легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k \varphi_n\right)^2 \leqslant \frac{2}{\pi}\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\|^2_{L_2(0,\pi)}, \quad (20)$$

где числа φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ определены соотношением (7), причём очевидно, что оценка (20) верна и при $k = 0$, если $\varphi(x) \in L_2(0,\pi)$.

8. Условимся всюду здесь считать все величины вещественными, все функции действительнозначными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Теорема 1. *Пусть*

1. $F(t,x,u_1,\dots,u_6) \in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$.

2. *При любом* $R>0$ *в* $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^6$

$$|F(t,x,u_1,\dots,u_6) - F(t,x,\tilde u_1,\dots,\tilde u_6)| \leqslant C_R \sum_{i=1}^{6} |u_i - \tilde u_i|\,, \quad C_R = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда задача (1)–(3) *не может иметь более одного классического решения.*

Так как каждое классическое решение задачи (1)–(3) является и её решением почти всюду, то справедливость теоремы 1 следует из теоремы о единственности решения почти всюду задачи (1)–(3), доказанной в работе [6], причём под решением почти всюду задачи (1)–(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x) \in C([0,T]\times[0,\pi])$; $u_{xxxx}(t,x)$, $u_{txx}(t,x)$, $u_{tt}(t,x) \in C([0,T],\, L_2(0,\pi))$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,\pi)$.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ В МАЛОМ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

В этом разделе с помощью принципа сжатых отображений доказывается следующая теорема существования в малом (т. е. справедливая при достаточно малых значениях T) классического решения задачи (1)–(3)

Теорема 2. *Пусть*

1. $\varphi(x) \in C^{(4)}([0,\pi])$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,\pi)$ *и* $\varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0$ $(s=\overline{0,2})$; $\psi(x) \in C^{(2)}([0,\pi])$, $\psi'''(x) \in L_2(0,\pi)$ *и* $\psi(0) = \psi(\pi) = \psi''(0) = \psi''(\pi) = 0$.

2. $F(t,\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_6)$, $F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_6)$ $(i=\overline{0,6})$, $F_{\xi_i\xi_j}(t,\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_6)$ $(i,j=\overline{0,6}) \in C([0,T]\times \times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$.

3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6) = F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6) = 0$ *для всех* $t\in[0,T]$, $\xi_2,\xi_4,\xi_6 \in (-\infty,\infty)$.

4. *При любом* $R>0$ *в* $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^6$

$$\left|F_{\xi_i\xi_j}(t,\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_6) - F_{\xi_i\xi_j}(t,\xi_0,\tilde\xi_1,\dots,\tilde\xi_6)\right| \leqslant C_R \sum_{i=1}^{6}\left|\xi_i - \tilde\xi_i\right|,$$

где $i,j=\overline{0,6}$, *а* $C_R>0$ *— постоянная.*

Тогда существует в малом классическое решение задачи (1)–(3).

Доказательство. В пространстве $B^{5,3}_{2,2,T}$ определим оператор H:

$$H(u(t,x)) = \tilde u(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde u_n(t)\sin nx,$$

где

$$\tilde u_n(t) = (1+n^2t)e^{-n^2t}\varphi_n + te^{-n^2t}\psi_n - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^t\int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathcal F(u(\tau,x))\}\sin nx\times$$
$$\times(t-\tau)e^{-n^2(t-\tau)}dxd\tau \quad (n=1,2,\dots,\quad t\in[0,T]), \tag{21}$$

а числа φ_n,ψ_n $(n=1,2,\dots)$ и оператор $\mathcal F$ определены соотношениями (7) и (8).

Тогда из (21) получаем, что для всех $u,V\in B^{5,3}_{2,2,T}$:

$$\|H(u)\|^2_{B^5_{2,T}} = \|\tilde u\|^2_{B^5_{2,T}} = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\tilde u_n(t)\sin nx\right\|^2_{B^5_{2,T}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde u_n(t)|\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\varphi_n\right)^2+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\psi_n\right)^2+\frac{9}{2\pi}\int\limits_0^T\int\limits_0^{\pi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]\right\}^2dxd\tau,$$

$$\|(H(u))_t\|^2_{B^3_{2,T}}=\|\tilde u_t\|^2_{B^3_{2,T}}=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\tilde u_n'(t)\sin nx\right\|^2_{B^3_{2,T}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde u_n'(t)|\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\varphi_n\right)^2+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\psi_n\right)^2+\frac{15}{\pi}\int\limits_0^T\int\limits_0^{\pi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]\right\}^2dxd\tau,$$

$$\|H(u)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}=\|\tilde u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}=\left(\|\tilde u\|_{B^5_{2,T}}+\|\tilde u_t\|_{B^3_{2,T}}\right)^2\leqslant 2\|\tilde u\|^2_{B^5_{2,T}}+2\|\tilde u_t\|^2_{B^3_{2,T}}\leqslant$$

$$\leqslant a_0+\frac{39}{\pi}\int\limits_0^T\int\limits_0^{\pi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]\right\}^2dxd\tau, \tag{22}$$

где

$$a_0\equiv 12\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\varphi_n\right)^2+12\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\psi_n\right)^2,$$

причём конечность a_0 следует из (20) для $k=5$ и $k=3$; аналогично

$$\|H(u)-H(V)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}\leqslant\frac{13}{\pi}\int\limits_0^T\int\limits_0^{\pi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]-\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(V(\tau,x))]\right\}^2dxd\tau. \tag{23}$$

Пусть K_R — любой фиксированный замкнутый шар пространства $B^{5,3}_{2,2,T}$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда в силу оценок (14),(15) и (17),(18), очевидно, что при любых $u,V\in K_R$:

$$\left\|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right\|_{C(Q_T)}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt6}R\quad(i=\overline{0,4}),\qquad\left\|\frac{\partial^{1+j}u(t,x)}{\partial t\partial x^j}\right\|_{C(Q_T)}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt6}R\quad(j=\overline{0,2}), \tag{24}$$

$$\int\limits_0^{\pi}u^2_{xxxxx}(t,x)dx\leqslant\frac{\pi}{2}R,\qquad\int\limits_0^{\pi}u^2_{txxx}(t,x)dx\leqslant\frac{\pi}{2}R\quad\forall\ t\in[0,T]; \tag{25}$$

$$\left\|\partial^i u(t,x)/\partial x^i-\partial^i V(t,x)/\partial x^i\right\|_{C(Q_T)}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt6}\|u-V\|_{B^{5,3}_{2,2,T}}\quad(i=\overline{0,4}), \tag{26}$$

$$\left\|\partial^{1+j}u(t,x)/\partial t\partial x^j-\partial^{1+j}V(t,x)/\partial t\partial x^j\right\|_{C(Q_T)}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt6}\|u-V\|_{B^{5,3}_{2,2,T}}\quad(j=\overline{0,2}), \tag{27}$$

$$\int\limits_0^{\pi}\left\{u_{xxxxx}(t,x)-V_{xxxxx}(t,x)\right\}^2dx\leqslant\frac{\pi}{2}\|u-V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}\quad\forall\ t\in[0,T], \tag{28}$$

$$\int\limits_0^{\pi}\left\{u_{txxx}(t,x)-V_{txxx}(t,x)\right\}^2dx\leqslant\frac{\pi}{2}\|u-V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}\quad\forall t\in[0,T],\ Q_T\equiv[0,T]\times[0,\pi]. \tag{29}$$

Пользуясь условиями 2, 4 теоремы, оценками (24)–(29) и развёрнутым выражением $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathcal{F}(u(\tau,x))\}$, получаем, что при любом $u,V\in K_R$ для всех $\tau\in[0,T]$:

$$\int\limits_0^{\pi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]\right\}^2dx\leqslant A_R^2, \tag{30}$$

$$\int\limits_0^{\pi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]-\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(V(\tau,x))]\right\}^2dx\leqslant B_R^2\|u-V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}, \tag{31}$$

где $A_R>0$ и $B_R>0$ — некоторые постоянные, зависящие от R.

Теперь, пользуясь оценками (30) и (31), из (22) и (23) получаем, что при любом $u, V \in K_R$:

$$\|H(u)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \leqslant a_0 + \frac{39}{\pi} A_R^2 T, \qquad \|H(u) - H(V)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \leqslant \frac{13}{\pi} B_R^2 T \, \|u - V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} .$$

Пусть число R фиксировано и удовлетворяет условию

$$R > \sqrt{a_0} = \left\{ 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^5 \varphi_n\right)^2 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3 \psi_n\right)^2 \right\}^{1/2} . \tag{32}$$

Тогда очевидно, что при достаточно малых значениях T:

$$a_0 + \frac{39}{\pi} A_R^2 T \leqslant R^2, \quad \frac{13}{\pi} B_R^2 T < 1.$$

Следовательно, для любого фиксированного R, удовлетворяющего условию (32), при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар K_R в себя и удовлетворяет в нём условию Липшица с коэффициентом меньше единицы, т.е оператор H является в K сжатым. Тогда в силу принципа сжатых отображений при достаточно малых значениях T оператор H имеет в K_R единственную неподвижную точку:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^{5,3}_{2,2,T},$$

причём функции $u_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют системе (11).

Легко показывается, что

$$\|u_{tt}(t,x)\|^2_{B^1_{2,T}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |u_n''(t)| \right)^2 < +\infty,$$

т.е. $u_{tt}(t,x) \in B^1_{2,T}$. Отсюда следует, что

$$u_{tt}(t,x) \in C([0,T] \times [0,\pi]), \qquad u_{ttx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi)). \tag{33}$$

Таким образом, функция $u(t,x) \in B^{5,3,1}_{2,2,2,T}$ обладает свойствами (16), (19) и (33). Тогда, в силу условий 2 и 3 данной теоремы и свойств (16) и (19) функции $u(t,x)$, очевидно, что функция $\mathcal{F}(u(t,x))$, определённая соотношением (8), обладает свойствами (9) и (10). Поэтому функции $u_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие системе (11), удовлетворяют и системе (6). Далее, пользуясь этим, легко показывается, что функция $u(t,x)$ является классическим решением задачи (1)–(3). Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Так как из условия 2 теоремы 2 следует выполнение всех условий теоремы 1, то при условиях теоремы 2 классическое решение задачи (1)–(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

Замечание 2. Как видно из процесса доказательства теоремы 2 (см. соотношение (32)), при условиях теоремы 2 о существовании в малом классического решения задачи (1)–(3) для доказательства существования и в целом классического решения задачи (1)–(3) достаточно показать, что всевозможные классические решения задачи (1)–(3), принадлежащие пространству $B^{5,3}_{2,2,T}$, априори ограничены в $B^{5,3}_{2,2,T}$.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ В ЦЕЛОМ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

В этом разделе с целью доказательства теоремы о существовании в целом (т. е. для любого конечного значения T) классического решения задачи (1)–(3) и для полноты изложения приведём следующие три теоремы об априорной ограниченности (в определённых смыслах) решений почти всюду задачи (1)–(3), доказанные в работе [6], которые остаются в силе и для классических решений задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть правая часть уравнения* (1) *имеет вид*

$$F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_x)=f(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_x)+f_0(x,u)+f_1(t,u_t)u_{tx}+(f_2(x,u_x))_x, \quad (34)$$

причём

а) $f_0(x,u)\in C([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ *и при любых* $x\in[0,\pi]$, $u\in(-\infty,\infty)$ *имеет место оценка*

$$\int\limits_0^u f_0(x,\xi)d\xi\equiv g_0(x,u)\leqslant C(1+u^2),$$

б) $f_1(t,V)\in C([0,T]\times(-\infty,\infty))$, (35)

в) $f_2(x,V)\in C^{(1)}([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ *и при любых* $x\in[0,\pi]$, $V\in(-\infty,\infty)$

$$-\int\limits_0^V f_2(x,\xi)d\xi\equiv g_2(x,V)\leqslant C+\delta V^2,\quad 0<\delta<\frac{1}{2\pi^2},$$

г) $f(t,x,u_1,\ldots,u_6)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$ *и в* $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6$

$$f(t,x,u_1,\ldots,u_6)u_5\leqslant C(1+u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_5^2)+\delta_0u_6^2,\quad 0\leqslant\delta_0<2,\quad C>0.$$

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *справедливы априорные оценки:*

$$\int\limits_0^\pi u_t^2(t,x)dx\leqslant C_0,\quad \int\limits_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx\leqslant C_0\quad \forall\ t\in[0,T];\qquad \int\limits_0^T\int\limits_0^\pi u_{tx}^2(t,x)\,dx\,dt\leqslant C_0. \quad (36)$$

Следствие 1. *Так как* $u(t,0)=u(t,\pi)$ *для любого* $t\in[0,T]$, *то существует такое число* $\xi=$ $=\xi_t\in(0,\pi)$, *что* $u_x(t,\xi_t)=0$. *Тогда очевидно, что для всех* $t\in[0,T]$ *и* $x\in[0,\pi]$:

$$u_x(t,x)=\int\limits_{\xi_t}^x u_{\xi\xi}(t,\xi)d\xi,$$

$$u_x^2(t,x)\leqslant\left\{\int\limits_0^\pi|u_{\xi\xi}(t,\xi)|\,d\xi\right\}^2\leqslant\pi\int\limits_0^\pi u_{\xi\xi}^2(t,\xi)d\xi=\pi\int\limits_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx, \quad (37)$$

$$\int\limits_0^\pi u_x^2(t,x)dx\leqslant\pi\int\limits_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx\pi=\pi^2\int\limits_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx. \quad (38)$$

Тогда, пользуясь соотношениям $u(t,0)=0$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ и оценкой (38), получаем, что $t\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$:

$$u(t,x)=\int\limits_0^x u_\xi(t,\xi)d\xi,\quad u^2(t,x)\leqslant\pi\int\limits_0^\pi u_\xi^2(t,\xi)d\xi\leqslant\pi^3\int\limits_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx. \quad (39)$$

Таким образом, из второй априорной оценки (36), в силу оценок (39) и (37), следует справедливость априорных оценок:

$$\|u(t,x)\|_{C(Q_T)}\leqslant R_0,\qquad \|u_x(t,x)\|_{C(Q_T)}\leqslant R_0. \quad (40)$$

Замечание 3. Как видно из (35), от функции $f_1(t,V)$, фигурирующей в (34), при $|V|\to+\infty$ ничего не требуется, т. е. на порядок её роста при $|V|\to+\infty$ никакого ограничения нет. Кроме того, как видно из формулировки теоремы 3, объединение всех функций, фигурирующих в правой части (34), в одну функцию f или же F нецелесообразно.

Далее, пользуясь априорными оценками (36) и, в частности, априорными оценками (40), в работе [6] доказана следующая теорема о более сильной, чем (36), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)–(3).

Теорема 4. *Пусть*

1. *Выполнены все условия теоремы* 3.
2. *При любом* $R>0$ *в* $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^2\times(-\infty,\infty)^4$

$$|F(t,x,u_1,\ldots,u_6)|\leqslant C_6\left\{1+|u_3|\left(|u_3|+|u_3|\,|u_5|+u_5^2+|u_6|\right)+\right.$$
$$\left.+|u_4|\,(1+|u_5|)+|u_5|^3+|u_5|\,|u_6|+|u_6|\right\},\quad C_R>0.$$

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *справедлива априорная оценка:*

$$\|u(t,x)\|_{B^{3,1}_{2,2,T}}\leqslant C_0. \tag{41}$$

Следствие 2. *Из априорной оценки* (41) *в силу оценки* (13) *для* $i=3,\ j=1$ *и структуры пространства* $B^{3,1}_{2,2,T}$ *следует справедливость априорных оценок:*

$$\|u(t,x)\|_{C(Q_T)},\ \|u_x(t,x)\|_{C(Q_T)},\quad \|u_{xx}(t,x)\|_{C(Q_T)},\quad \|u_t(t,x)\|_{C(Q_T)}\leqslant R_0; \tag{42}$$

$$\int\limits_0^\pi u^2_{xxx}(t,x)dx\leqslant R_0,\quad \int\limits_0^\pi u^2_{tx}(t,x)dx\leqslant R_0\quad \forall\ t\in[0,T]. \tag{43}$$

Кроме того, пользуясь теоремой 4, а по существу, априорными оценками (42) и (43), в работе [6] доказана следующая теорема о более сильной, чем (41), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)–(3).

Теорема 5. *Пусть*

1. *Выполнены условия* 2 *и* 3 *теоремы* 2.
2. *Выполнены все условия теоремы* 4.
3. *Для любого* $R>0$ *в* $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)|\leqslant C_R\left(1+\xi_4^2+\xi_6^2\right)\quad (i=0,1,2),$$
$$|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)|\leqslant C_R\,(1+|\xi_4|+|\xi_6|)\quad (i=3,5),$$
$$|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)|\leqslant C_R\ \ (i=4,6),\quad C_R>0 - \textit{постоянная}.$$

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *справедлива априорная оценка:*

$$\|u(t,x)\|_{B^{4,2}_{2,2,T}}\leqslant C_0. \tag{44}$$

Следствие 3. *Из априорной оценки* (44) *в силу оценки* (13) *для* $i=4,\ j=2$ *и структуры пространства* $B^{4,2}_{2,2,T}$ *следует справедливость априорных оценок:*

$$\left\|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right\|_{C(Q_T)}\leqslant R_0\quad (i=\overline{0,3}),\qquad \left\|\frac{\partial^{1+j} u(t,x)}{\partial t\partial x^j}\right\|_{C(Q_T)}\leqslant R_0\quad (j=0,1); \tag{45}$$

$$\int\limits_0^\pi u^2_{xxxx}(t,x)\,dx\leqslant R_0,\qquad \int\limits_0^\pi u^2_{txx}(t,x)\,dx\leqslant R_0\qquad \forall t\in[0,T]. \tag{46}$$

Замечание 5. Так как каждое классическое решение задачи (1)–(3) является и её решением почти всюду, то все теоремы 3–5 и из них вытекающие следствия 1–3 остаются в силе и для классических решений задачи (1)–(3).

Наконец, пользуясь теоремой 2 о существовании в малом классического решения задачи (1)–(3) и теоремой 5 об априорной ограниченности в $B^{4,2}_{2,2,T}$ всевозможных решений почти всюду (и, тем более, классических решений) задачи (1)–(3), докажем следующую теорему о существовании в целом классического решения задачи (1)–(3).

Теорема 6. *Пусть выполнены все условия теорем* 2, 3, *условие* 2 *теоремы* 4 *и условие* 3 *теоремы* 5. *Тогда задача* (1)–(3) *имеет единственное классическое решение.*

Доказательство. По теореме 2 классическое решение задачи (1)–(3) существует, по крайней мере, в малом, причём в силу замечания 1 оно единственное в целом.

Кроме того, как отмечено в замечании 2, при условиях теоремы 2 для доказательства существования и в целом классического решения задачи (1)–(3) достаточно показать априорную ограниченность в $B^{5,3}_{2,2,T}$ всевозможных классических решений задачи (1)–(3), принадлежащих пространству $B^{5,3}_{2,2,T}$. Итак, пусть $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$ — любое классическое решение задачи (1)–(3), принадлежащее пространству $B^{5,3}_{2,2,T}$. Тогда в силу леммы из разд. 1 функции $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (6).

Далее, так как из условий данной теоремы следует выполнение всех условий теоремы 5, то по этой же теореме 5 для всевозможных решений почти всюду задачи (1)–(3) и, тем более, для всевозможных классических решений $u(t,x)$ задачи (1)–(3), принадлежащих пространству $B^{5,3}_{2,2,T}$, справедлива априорная оценка (44), из которой, как объяснено в следствии 3, следует справедливость априорных оценок (45) и (46).

Кроме того, очевидно, что при условиях данной теоремы для классического решения $u(t,x)\in B^{5,3}_{2,2,T}$ задачи (1)–(3) функция $\mathcal{F}(u(t,x))$, определённая соотношением (8), удовлетворяет всем условиям (9) и (10). Тогда очевидно, что функции $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$, удовлетворяющие системе (6), удовлетворяют и системе (11). Пользуясь этим, совершенно аналогично (22) получаем, что

$$\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \leqslant a_0 + \frac{39}{\pi}\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]\right\}^2 dx d\tau. \tag{47}$$

В силу априорных оценок (45) и (46), очевидно, что для всех $\tau\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]\right| \leqslant C_1 + C_2\left\{u^2_{xxxx}(\tau,x)+u^2_{\tau xx}(\tau,x)+|u_{xxxxx}(\tau,x)|+|u_{\tau xxx}(\tau,x)|\right\},$$

$$\int\limits_0^\pi\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]\right\}^2 dx \leqslant 5C_1^2\pi + 5C_2^2\left\{\int\limits_0^\pi u^4_{xxxx}(\tau,x)dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^\pi u^4_{\tau xx}(\tau,x)dx + \int\limits_0^\pi u^2_{xxxxx}(\tau,x)dx + \int\limits_0^\pi u^2_{\tau xxx}(\tau,x)dx\right\},\quad C_i>0. \tag{48}$$

Далее, учитывая оценки (14) (для $i=4$), (15) (для $j=2$), (13) (для $i=5$, $j=3$), (17), (18) и априорные оценки (46), для всех $\tau\in[0,T]$ имеем:

$$\int\limits_0^\pi u^4_{xxxx}(\tau,x)dx \leqslant \|u_{xxxx}(\tau,x)\|^2_{C([0,\pi])}\int\limits_0^\pi u^2_{xxxx}(\tau,x)dx \leqslant \|u\|^2_{B^{4,2}_{1,1,\tau}} R_0 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi^2}{6}\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}} R_0 = \frac{\pi^2}{6}R_0\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}}, \tag{49}$$

$$\int\limits_0^\pi u^4_{\tau xx}(\tau,x)dx \leqslant \|u_{\tau xx}(\tau,x)\|^2_{C([0,\pi])}\int\limits_0^\pi u^2_{\tau xx}(\tau,x)dx \leqslant \|u\|^2_{B^{4,2}_{1,1,\tau}} R_0 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi^2}{6}\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}} R_0 = \frac{\pi^2}{6}R_0\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}}, \tag{50}$$

$$\int\limits_0^\pi u^2_{xxxxx}(\tau,x)dx \leqslant \frac{\pi}{2}\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}}, \qquad \int\limits_0^\pi u^2_{\tau xxx}(\tau,x)dx \leqslant \frac{\pi}{2}\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}}. \tag{51}$$

Теперь в силу оценок (49)–(51) из (48) для всех $\tau\in[0,T]$ имеем:

$$\int\limits_0^\pi\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{F}(u(\tau,x))]\right\}^2 dx \leqslant 5\pi C_1^2 + 5C_2^2\left(\frac{\pi^2}{3}R_0+\pi\right)\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}}. \tag{52}$$

Таким образом, в силу оценки (52), из (47) получаем, что для всех $t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \leqslant a_0 + \frac{39}{\pi} 5\pi C_1^2 T + \frac{39}{\pi} 5 C_2^2 \left(\frac{\pi^2}{3} R_0 + \pi\right) \int\limits_0^t \|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}} \, d\tau. \qquad (53)$$

Из (53), применив неравенство Гроноулла – Беллмана, получаем

$$\|u\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \leqslant \left(a_0 + 195 T C_1^2\right) \exp\left\{195 \left(\frac{\pi}{3} R_0 + 1\right) C_2^2 T\right\} \equiv C_3^2.$$

Таким образом, всевозможные классические решения $u(t,x)$ задачи (1)–(3), принадлежащие пространству $B^{5,3}_{2,2,T}$, априори ограничены в $B^{5,3}_{2,2,T}$. Теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Ковач Ю. И.* О краевой задаче для оператора m_i-го порядка параболического или гиперболического вида // Украинский мат. журн. 1969. Т. 21, № 5. С. 579–593.

2. *Ковач Ю. И.* Об оценке решения нелинейной системы с запаздыванием, содержащей оператор m_i-го порядка параболического или гиперболического вида // Численный анализ. Киев, 1969. Вып. 2. С. 20–38.

3. *Yan Zhen-Ya, Xie Fu-Ding, Zhang Hong-Qing.* Symmetry reductions, integrability and solitary wave solutions to high-order modified Boussinesg equations with damping term // Commun Theor. Phys. 2001. Vol. 36, № 1. P. 1–6.

4. *Худавердиев К. И., Гейдарова М. Н.* Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2007. № 1. С. 5–14.

5. *Худавердиев К. И., Гейдарова М. Н.* Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для нелинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2008. № 2. С. 5–15.

6. *Khudaverdiyev K. I., Heydarova M. N.* On existence in large for almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for fourth order semilinear biparabolic equation // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of Nat. Acad. Sci. Azerb. 2008. Vol. XXIX. P. 79–96.

7. *Худавердиев К. И.* Исследование классического решения многомерной смешанной задачи для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка // Учен. записки Азерб. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 1972. № 1. С. 3–27.