Пример 2. Пусть G — антагонистическая игра с упорядоченными исходами, K — класс ее линейных доупорядочений, $Opt\, G$ — множество ситуаций равновесия по Нэшу; для каждой игры $\Gamma_j \in K$ в качестве $Opt\, \Gamma_j$ выступает множество седловых точек. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Семейство тождественных гомоморфизмов $(f_j)_{j\in J}$ является контравариантно полным семейством ковариантных гомоморфизмов.*

Утверждение теоремы 4 означает справедливость равносильности:

$$(x_0, y_0) \in NEq\, G \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, j \in J)\ \ (x_0, y_0) \in Sp\, \Gamma_j, \quad \text{т.е.} \quad NEq\, G = \bigcap_{j\in J} Sp\, \Gamma_j.$$

Для доказательства теоремы используем теорему Душника -- Миллера, которая утверждает, что всякое отношение порядка может быть представлено как пересечение всех его линейных доупорядочений. По определению справедлива равносильность:

$$(x_0, y_0) \in NEq\, G \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, x \in X)(\forall\, y \in Y)\ F(x, y_0) \overset{\omega}{\leq} F(x_0, y_0) \overset{\omega}{\leq} F(x_0, y).$$

Учитывая, что по теореме Душника – Миллера $\omega = \bigcap\limits_{j\in J} \omega_j$, получаем, что правая часть этой эквивалентности равносильна тому, что при всех $x \in X$, $y \in Y$ выполняется

$$(\forall\, j \in J)\ \ F(x, y_0) \overset{\omega_j}{\leq} F(x_0, y_0) \overset{\omega_j}{\leq} F(x_0, y).$$

Последнее означает, что $(\forall\, j \in J)$ $(x_0, y_0) \in Sp\, \Gamma_j$, т.е. $(x_0, y_0) \in \bigcap\limits_{j\in J} Sp\, \Gamma_j$. Теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Савина Т.Ф.* Ситуации равновесия в играх с отношениями предпочтения // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2008. С. 131–132.

2. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 368 с.

3. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. статей. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.

4. *Розен В.В.* Нахождение оптимальных решений методом построения ковариантно полных семейств контравариантных гомоморфизмов // Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 349–350

УДК 501.1

О ГОМОМОРФИЗМАХ ПОЛУГРУПП ЭНДОМОРФИЗМОВ ГИПЕРГРАФОВ

Е.В. Хворостухина

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

В работе описано строение сюрьективных гомоморфизмов полугрупп эндоморфизмов эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами.

Ключевые слова: гомоморфизм, гиперграф, полугруппа эндоморфизмов.

On Homomorphisms of Endomorphism Semigroups of Hypergraphs

E.V. Khvorostukhina

Saratov State University,
Chair of Mathematical Physics and Calculus Mathematics
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

In the paper we describe a structure of surjective homomorphisms of endomorphism semigroups of effective hypergraphs with p-definable edges.

Key words: homomorphism, hypergraph, semigroup of endomorphisms.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших направлений в теории полугрупп является изучение математических объектов путем исследования некоторых полугрупп отображений, специальным образом связанных с исходными объектами. Многие авторы значительное внимание уделяли исследованию полугрупп эндоморфизмов графов и их обобщений — гиперграфов (см., например, обзор [1]).

В настоящей работе продолжается исследование полугрупп эндоморфизмов гиперграфов. Главный результат — теорема 2 — описывает строение сюрьективных гомоморфизмов полугрупп эндоморфизмов гиперграфов специального вида, называемых эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами.

Основные результаты работы докладывались на Международной конференции, посвященной 100-летию профессора В.В. Вагнера [2].

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В работе используются основные понятия теории гиперграфов и теории полугрупп [3, 4].

Напомним [3], что *гиперграфом* называется система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество и L — семейство произвольных подмножеств X. Элементы множества X называются *вершинами*, а элементы множества L называются *ребрами* гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором его ребре, и *неограниченным* в противном случае. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются *смежными*. Гиперграф $H = (X, L)$ называется *эффективным*, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p — произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть *гиперграфом с p-определимыми ребрами*, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа принадлежат не более чем одному его ребру.

Например, эффективный гиперграф с 1-определимыми ребрами — это гиперграф, ребра которого образуют нетривиальное разбиение множества вершин без одноэлементных классов. С другой стороны, как аффинная, так и проективная плоскости являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами, вершинами которых являются точки этих плоскостей, а ребрами — соответствующие прямые [5].

Гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ в гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$ называется отображение φ множества X в множество X_1, которое смежные в гиперграфе H вершины переводит в смежные вершины гиперграфа H_1, т.е. выполняется свойство

$$(\forall\ r \in L)(\exists\ r' \in L_1)[\varphi(r) \subset r'].$$

Гомоморфизм $f : H \to H_1$ называется *сюрьективным* гомоморфизмом, если образом множества вершин X гиперграфа H является все множество вершин X_1 гиперграфа H_1, т.е. $f(X) = X_1$.

Гомоморфизм гиперграфа H в себя называется *эндоморфизмом* H. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует *полугруппу* $\operatorname{End} H$.

Гиперграфы $H = (X, L)$ и $H_1 = (X_1, L_1)$ называются *изоморфными*, если найдется такая биекция f множества X на множество X_1, которая сохраняет ребра этих гиперграфов, т.е. выполняется

$$(\forall\ Y \subset X)[Y \in L \ \Leftrightarrow\ f(Y) \in L_1].$$

Тождественным отношением на множестве X называется бинарное отношение $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

Для отображения $f : X \to Y$ обозначим f^2 отображение X^2 в Y^2, которое для $(a, b) \in X^2$ определяется по формуле: $f^2(a, b) = (f(a), f(b))$. Тогда для любого преобразования $\varphi : X \to X$ выполняется $f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$.

Пусть $H = (X, L)$ — гиперграф. Последовательность ребер $l_1, l_2, \ldots, l_n$ этого гиперграфа называется *цепью*, если в ней соседние ребра $l_i, l_{i+1} (i = \overline{1, n-1})$ имеют непустое пересечение. На множестве X определим бинарное отношение ε_H по правилу: $(x, x_1) \in \varepsilon_H$ в том и только том случае, если найдется такая цепь $l_1, \ldots, l_n$, что $x \in l_1$ и $x_1 \in l_n$. Легко видеть, что такое отношение ε_H является эквивалентностью на множестве X, для которого используется запись $x \equiv x_1(\varepsilon_H)$. Эквивалентность ε_H называется *отношением связности* гиперграфа H и классы эквивалентности ε_H называются *компонентами связности* гиперграфа H.

2. ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть X — непустое множество. Обозначим через $T(X)$ полугруппу всех преобразований множества X.

Лемма 1. *Для эффективного гиперграфа с p-определимыми ребрами $H = (X, L)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *любое преобразование множества X является эндоморфизмом гиперграфа H;*

2) *выполняется равенство $\operatorname{End} H = T(X)$;*

3) *множество ребер L состоит из одного ребра.*

Доказательство. Очевидно, что условия 1), 2) равносильны.

Покажем, что из истинности условия 2) следует истинность условия 3). Пусть $H = (X, L)$ — эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами и пусть выполняется условие 2). Покажем, что множество ребер этого гиперграфа состоит из одного ребра. Поскольку гиперграф H — эффективный, то этот гиперграф содержит по меньшей мере одно ребро l. В силу p-определимости гиперграфа H, в ребре l найдется по крайней мере $p+1$ вершина $x_1, \ldots, x_{p+1}$, где $x_i \neq x_j$ для всех $i, j = \overline{1, p+1}, i \neq j$. Для произвольной вершины $y \in X$ определим преобразование $\varphi : X \to X$ по формуле

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_i, & \text{если} \quad x = x_i, \ i = \overline{1, p}, \\ y, & \text{для} \quad \text{остальных} \quad x \in X. \end{cases}$$

По условию 2) φ — эндоморфизм гиперграфа H. Значит, множество $\varphi(l) = \{x_1, \ldots, x_p, y\}$ — ограниченное в гиперграфе H, т.е. содержится в некотором его ребре l_1. Поскольку H — гиперграф с p-определимыми ребрами и элементы $x_1, \ldots, x_p \in l \cap l_1$, то выполняется равенство $l = l_1$. Таким образом, произвольный элемент y множества X принадлежит ребру l гиперграфа H. Это означает, что множество ребер данного гиперграфа состоит из одного ребра $l = X$, т.е. выполняется условие 3).

Покажем теперь, что из условия 3) следует условие 1). Пусть множество ребер $L = \{l\}$. В силу эффективности гиперграфа H выполняется $l = X$, т.е. множество вершин X является ограниченным в гиперграфе H. Значит, все подмножества множества X также ограниченные в H и, следовательно, все преобразования множества X являются эдоморфизмами H, т.е. выполняется условие 1).

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть H — эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами, H_1 — эффективный гиперграф с p_1-определимыми ребрами и $g : \operatorname{End} H \to \operatorname{End} H_1$. Тогда g — гомоморфизм полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$ в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

1) *g — изоморфизм полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$, который представим в виде $g = f^2$ для некоторого изоморфизма f гиперграфа H на гиперграф H_1;*

2) *$g = f^2$ для некоторого гомоморфизма f гиперграфа H на гиперграф H_1, удовлетворяющего равенству $\varepsilon_H = \ker f$, и H_1 — однореберный гиперграф, число вершин которого совпадает с числом компонент связности гиперграфа H.*

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение $g : \operatorname{End} H \to \operatorname{End} H_1$ является гомоморфизмом полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$.

В силу эффективности гиперграфа H все константы вида $C_a : X \to \{a\}$, где $a \in X$, являются эндоморфизмами гиперграфа H. Легко видеть, что в этом случае такие эндоморфизмы, и только они, являются правыми нулями полугруппы $\operatorname{End} H$. Обозначим $g(C_a) = \varphi$. Возьмем произвольное $\psi \in \operatorname{End} H_1$. Заметим, что $\psi = g(\psi_1)$ для некоторого $\psi_1 \in \operatorname{End} H$. Тогда по определению гомоморфизма g выполняются равенства $\psi\varphi = g(\psi_1)g(C_a) = g(\psi_1 C_a) = g(C_a) = \varphi$.

Таким образом, отображение $\varphi = g(C_a)$ является правым нулем полугруппы $\operatorname{End} H_1$. С другой стороны, в силу эффективности гиперграфа H_1 все константы вида $C_{a_1} : X_1 \to \{a_1\}$, где $a_1 \in X_1$, являются эндоморфизмами гиперграфа H_1. В этом случае такие эндоморфизмы, и только они, являются правыми нулями полугруппы $\operatorname{End} H_1$.

Значит, для любого $a \in X$ образ $g(C_a)$ является правым нулем полугруппы $\mathrm{End}\, H_1$ и выполняется $g(C_a) = C_{a_1}$ для некоторого $a_1 \in X_1$.

Этот факт позволяет определить отображение $f : X \to X_1$ по правилу: для любого $a \in X$ значение $f(a) = a_1$, если $g(C_a) = C_{a_1}$ для соответствующего $a_1 \in X_1$. Тогда по определению $g(C_a) = C_{f(a)}$ для любого $a \in X$.

Следовательно, по определению гомоморфизма g для любых $a, b \in X$, $\varphi \in \mathrm{End}\, H$ справедливы утверждения:

$$\varphi(a) = b, \qquad C_a\varphi = C_b, \qquad g(C_a\varphi) = g(C_b),$$

$$g(C_a)g(\varphi) = g(C_b), \qquad C_{f(a)}g(\varphi) = C_{f(b)}, \qquad g(\varphi)(f(a)) = f(b).$$

Это означает, что $g(\varphi) = \{(f(a), f(b)) : (a, b) \in \varphi\} = f^2(\varphi)$, т.е. имеет место равенство

$$g = f^2. \tag{1}$$

Если отображение g взаимнооднозначно, то очевидно и отображение f взаимнооднозначно, т.е. $\ker f = \Delta_X$. В этом случае $g = f^2$ — изоморфизм полугруппы $\mathrm{End}\, H$ на полугруппу $\mathrm{End}\, H_1$ и из теоремы 1 [2] следует, что отображение f — изоморфизм гиперграфа H на гиперграф H_1.

Рассмотрим случай, когда отображение g не является взаимнооднозначным. Тогда отображение f также не является взаимнооднозначным, т.е. $\ker f \neq \Delta_X$. Это означает, что для некоторых различных $z_1, z_2 \in X$ имеет место $z_1 \equiv z_2(\ker f)$, т.е. $f(z_1) = f(z_2) = z$ для некоторого $z \in X_1$. Покажем, что в этом случае $\ker f = \varepsilon_H$. Сначала докажем, что $\varepsilon_H \subset \ker f$. Для этого достаточно показать, что $l^2 \subset \ker f$ для любого $l \in L$. Предположим противное. Пусть в некотором ребре $l \in L$ найдутся точки x_1, x_2 такие, что $x_1 \not\equiv x_2(\ker f)$, т.е. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Определим преобразование $\varphi : X \to X$ по формуле

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_1, & \text{если} \;\; x = z_1; \\ x_2, & \text{для} \;\; \text{остальных} \;\; x \in X. \end{cases}$$

Отображение φ удовлетворяет $\varphi(X) = \{x_1, x_2\} \subset l$ и, значит, является эндоморфизмом гиперграфа H. По формуле (1) $g(\varphi) = f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$. Тогда по определению φ для $i = 1, 2$ получаем $g(\varphi)(z) = (f^{-1}\varphi f)(f(z_i)) = (\varphi f)((f^{-1}f)(z_i)) = f(\varphi(z_i)) = f(x_i)$. Следовательно, $f(x_1), f(x_2) \in g(\varphi)(z)$, что противоречит однозначности отображения $g(\varphi)$. Значит, наше предположение неверно и выполняется $\varepsilon_H \subset \ker f$.

Теперь покажем, что $\ker f \subset \varepsilon_H$. Предположим противное: допустим, что существуют $x_1, x_2 \in X$, такие что $x_1 \equiv x_2(\ker f)$, но $x_1 \not\equiv x_2(\varepsilon_H)$. В этом случае $f(x_1) = f(x_2)$ и x_1, x_2 лежат в разных компонентах связности. Зафиксируем некоторый элемент $x_3 \in X$ такой, что $f(x_3) \neq f(x_1)$. Такой элемент существует, так как в силу p_1-определимости гиперграфа H_1 его множество вершин X_1 содержит по меньшей мере $p_1 + 1$ вершину, где $p_1 \geq 1$.

Определим преобразование $\varphi : X \to X$ по формуле

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_1, & \text{если} \;\; x \in \varepsilon_H(x_1), \\ x_3, & \text{для} \;\; \text{остальных} \;\; x \in X. \end{cases}$$

Заметим, что $\varphi(X) = \{x_1, x_3\}$, $\varphi^{-1}(x_1) = \varepsilon_H(x_1)$, $\varphi^{-1}(x_3) = X \setminus \varepsilon_H(x_1)$. В силу того, что множества $\varepsilon_H(x_1)$ и $X \setminus \varepsilon_H(x_1)$ не имеют смежных вершин, отображение φ является эндоморфизмом гиперграфа H . Тогда образ $g(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ — элемент полугруппы $\mathrm{End}\, H_1$. Обозначим $a = f(x_1) = f(x_2)$, $b = f(x_3)$. Тогда получаем для $i = 1, 2$, что $g(\varphi)(a) = (f^{-1}\varphi f)(f(x_i)) = (\varphi f)((f^{-1}f)(x_i)) = f(\varphi(x_i)) = f(x_j)$, где $j = 1$, если $i = 1$, и $j = 3$, если $i = 2$. Таким образом, $a, b \in g(\varphi)(a)$, при этом $a \neq b$. Это противоречит однозначности отображения $g(\varphi)$. Значит, наше предположение неверно и выполняется $\ker f \subset \varepsilon_H$.

Следовательно, выполняется равенство $\ker f = \varepsilon_H$. Это означает, что всякая компонента связности гиперграфа H отображается в некоторую точку гиперграфа H_1 и, с другой стороны, каждой точке гиперграфа H_1 соответствует единственная компонента связности гиперграфа H. Следовательно, множество вершин гиперграфа H_1 равномощно множеству компонент связности гиперграфа H. При этом $f(X) = X_1$, т.е. f — гомоморфизм гиперграфа H на гиперграф H_1.

Покажем, что любое преобразование $\psi : X_1 \to X_1$ является образом некоторого элемента $\varphi \in \operatorname{End} H$, т.е. $\psi = g(\varphi) = f^{-1}\varphi f$. Поскольку $\ker f = \varepsilon_H$, всякий элемент множества X_1 — это образ некоторой компоненты связности гиперграфа H. В каждом классе K эквивалентности ε_H зафиксируем элемент $x_K \in K$. Тогда $f(x_K) = f(x)$ для любого $x \in K$. Определим отображение $\varphi : X \to X$ по правилу: $\varphi(z) = x_{[y]}$, если $\psi(f(z)) = f(y)$ для произвольного $z \in X$ и соответствующего $y \in X$. Следовательно, $f(\varphi(z)) = f(x_{[y]}) = f(y) = \psi(f(z))$, т.е. выполняется равенство $\varphi f = f\psi$. Умножив последнее равенство слева на f^{-1}, получим $f^{-1}\varphi f = \psi$. Это означает, что $g(\varphi) = f^2(\varphi) = \psi$.

Таким образом, всякое преобразование множества X_1 является эндоморфизмом гиперграфа H_1, т.е. $T(X_1) = \operatorname{End} H_1$. Тогда из леммы 1 следует, что гиперграф H_1 состоит из одного ребра.

Достаточность условия 1). Если f — изоморфизм гиперграфа H на гиперграф H_1, то из теоремы 1 [2] следует, что отображение $g = f^2$ является изоморфизмом полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$.

Достаточность условия 2). Пусть отображение $f : H \to H_1$ удовлетворяет $\varepsilon_H = \ker f$ и является гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ на гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$, где H — эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами, H_1 — однореберный эффективный гиперграф с p_1-определимыми ребрами. Проверим, что отображение $g = f^2$ является гомоморфизмом полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$.

Пусть $\varphi : X \to X$ — произвольный элемент полугруппы $\operatorname{End} H$. Покажем, что $g(\varphi) = (f^2)(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ является эндоморфизмом гиперграфа H_1.

Поскольку по условию 2) $\varepsilon_H = \ker f$, то при отображении f образом пересекающихся ребер l_1, l_2 является некоторая вершина $y \in X_1$. Таким образом, всякая компонента связности гиперграфа H отображается в некоторую точку единственного ребра r гиперграфа H_1. При этом для любых $x, x_1 \in X$ для любого эндоморфизма $\varphi \in \operatorname{End} H$ из условия $x \equiv x_1(\varepsilon_H)$ следует $\varphi(x) \equiv \varphi(y)(\varepsilon_H)$. В самом деле, если x, x_1 соединены цепью $l_1, \ldots, l_n$, то $\varphi(x), \varphi(x_1)$ соединены цепью $\varphi(l_1), \ldots, \varphi(l_n)$, так как для всех $i = \overline{1, n-1}$ из $l_i \cap l_{i+1} \neq \emptyset$ следует $\emptyset \neq \varphi(l_i \cap l_{i+1}) \subset \varphi(l_i) \cap \varphi(l_{i+1})$. В этом случае имеем, что условие $f(x) = f(x_1)$ влечет $f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_1))$. Отсюда следует, что образ $g(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ является отображением X_1 в X_1. Поскольку гиперграф H_1 состоит из одного ребра, то в силу леммы 1 преобразование $g(\varphi) : X_1 \to X_1$ является эндоморфизмом гиперграфа H_1.

Кроме того, из проведенных рассуждений следует, что для любого эндоморфизма $\varphi \in \operatorname{End} H$ выполняются условия: $\varphi^2(\ker f) \subset \ker f$, $\varphi^{-1}(\ker f)\varphi \subset \ker f$ и, значит, $(\ker f)\varphi \subset \varphi(\ker f)$.

Рассмотрим произвольные эндоморфизмы $\varphi, \psi \in \operatorname{End} H$. Покажем, что $g(\varphi\psi) = g(\varphi)g(\psi)$. Так как $(\ker f)\psi \subset \psi(\ker f)$ и $(\ker f)f = ff^{-1}f = f$, то по определению отображения g выполняются условия:

$$g(\varphi)g(\psi) = (f^{-1}\varphi f)(f^{-1}\psi f) = f^{-1}\varphi(ff^{-1})\psi f = f^{-1}\varphi(\ker f)\psi f \subset$$

$$\subset f^{-1}\varphi\psi(\ker f)f = f^{-1}(\varphi\psi)f = f^2(\varphi\psi) = g(\varphi\psi).$$

Отсюда в силу однозначности бинарных отношений $g(\varphi)g(\psi), g(\varphi\psi)$ следует равенство

$$g(\varphi)g(\psi) = g(\varphi\psi).$$

Таким образом, g — гомоморфизм полугруппы $\operatorname{End} H$ в полугруппу $\operatorname{End} H_1$.

Докажем, что образом полугруппы $\operatorname{End} H$ при гомоморфизме g является вся полугруппа $\operatorname{End} H_1$. Рассмотрим произвольное отображение $\psi : X_1 \to X_1$ и покажем, что $\psi = g(\varphi)$ для некоторого $\varphi \in \operatorname{End} H$. Как уже отмечалось выше, всякий элемент множества X_1 — это образ некоторой компоненты связности гиперграфа H. В каждом классе K эквивалентности ε_H зафиксируем элемент $x_K \in K$ и определим отображение $\varphi : X \to X$ по следующему правилу: $\varphi(z) = x_{[y]}$, если $\psi(f(z)) = f(y)$ для любого $z \in X$ и соответствующего $y \in X$. Следовательно, $f(\varphi(z)) = f(x_{[y]}) = f(y) = \psi(f(z))$, т.е. выполняется равенство $\varphi f = f\psi$. Умножив последнее равенство слева на f^{-1}, получим $f^{-1}\varphi f = \psi$. Это означает, что $g(\varphi) = f^2(\varphi) = \psi$. Следовательно, всякий эндоморфизм $\psi \in \operatorname{End} H_1$ является образом некоторого эндоморфизма $\varphi \in \operatorname{End} H$.

Таким образом, отображение g является гомоморфизмом полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Molchanov V. A.* Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. C. 155–199.
2. *Хворостухина Е.В.* О полугруппах эндоморфизмов гиперграфов // Совр. проблемы диф. геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 136–137.
3. *Зыков А.А.* Гиперграфы // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 6. С. 89–154.
4. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
5. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970. 161 с.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

А.А. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Построены семейства операторов и исследованы их аппроксимирующие свойства в задаче приближения производных функций и в задаче приближения гладких решений интегральных уравнений.

Ключевые слова: аппроксимация функций и их производных, резольвента, интегральное уравнение, приближенное решение.

Approximating Properties of the Powers of the Differentiation Operator Resolvent

A.A. Khromov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

The families of operators are constructed and their approximating properties are investigated in the problems of approximating the derivative of functions and the smooth solutions of integral equations.

Key words: approximation of functions and their derivatives, resolvent, integral equation, approximate solution.

1. Рассмотрим операторы

$$\Omega_r u = \begin{cases} \Omega_{2r} u \equiv r \int\limits_x^1 e^{r(x-t)} u(t)dt, & x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r} u \equiv r \int\limits_0^x e^{-r(x-t)} u(t)dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Задание разрывной на отрезке $[0,1]$ функции в таком виде здесь и в дальнейшем означает, что мы не обращаем внимания на то, как именно она задана в точке $x = 1/2$, поскольку это несущественно.

Построим операторы, комбинирующиеся из степеней операторов Ω_{1r} и Ω_{2r}, а именно операторы

$$\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} \Omega_{2r}^k u, & x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r}^k u, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \qquad D^m \Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} D^m \Omega_{2r}^k u, & x \in [0, 1/2], \\ D^m \Omega_{1r}^k u, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где D^m — оператор m-го дифференцирования по x.

Лемма 1. *Операторы $\Omega_r^{(k)}$, $k = 2, \ldots$ имеют вид*

$$\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} r^k \int\limits_x^1 \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{r(x-t)} u(t)dt, & x \in [0, 1/2], \\ r^k \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-r(x-t)} u(t)dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Доказательство для $k = 2$ приведено в работе [1], для любого k получается по индукции.