УДК 513.812

КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ В РЕПЕРЕ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ $\bar{F}_3^2$

Г. В. Киотина

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина,
кафедра математики и методики преподавания математических дисциплин
E-mail: KiotinaGV@yandex.ru

Методом внешних форм Картана изучаются комплексы прямых в бифлаговом пространстве гиперболического типа, введённом автором. Доказано, что в этом пространстве в окрестности нулевого порядка существует 5 видов неспециальных комплексов. Для каждого из них строится подвижной репер первого порядка.

Ключевые слова: пространство бифлаговое, абсолют, группа, автоморфизмы, дифференцирование внешнее, репер: подвижной, канонический; окрестность, комплекс: специальный, неспециальный.

The Classification of Complexes of Lines in Zeroth Order Frame in $\bar{F}_3^2$ Space

G.V. Kiotina

Ryazan State University named for S. A. Yesenin,
Chair of Mathematics and Method of Teaching of Mathematical Disciplines
E-mail: KiotinaGV@yandex.ru

Complexes of lines in hyperbolic type of biflag space introduced by the author are studied by the method of external Cartan forms. We prove that 5 non-special variants of complexes exist in mentioned space in zero order neighborhood. For every complex a first-order moving flag was drawn.

Key words: space biflag, absolute, group, automorphism, measurement invariant differentiation external, frame: moving, canonical; neighborhood, complex: special, non-special.

Пространством с обобщённой проективной метрикой Кэли – Клейна мы называем проективное n-мерное пространство с абсолютом, с помощью которого в каждом пучке m-плоскостей (за исключением, может быть, некоторого множества этих пучков) определено эллиптическое, гиперболическое, или параболическое измерение углов между m-плоскостями (при $m = 0$ — расстояний между точками), одного вида при данном $m = \overline{0, m-1}$, инвариантное относительно группы проективных автоморфизмов абсолюта [1].

В данной работе классифицируются комплексы прямых в окрестности нулевого порядка в бифлаговом пространстве $\bar{F}_3^2$, абсолют которого состоит из пары плоскостей P_2^1 и P_2^2, определяющих квадрику k_2 ранга 2 индекса 1, пары прямых $P_1^1 = P_2^1 \bigcap P_2^2$, $P_1^2 \subset P_2^1$ и пары точек $A = P_1^1 \bigcap P_1^2$ и $B \in P_1^1$.

Канонический репер $R = \{E_i, E\}$, $i = \overline{0,3}$, пространства $\bar{F}_3^2$ зададим следующим образом: вершины E_2 и E_3 поместим в точки A и B, причём $E_3 \equiv A$, вершины E_0 и E_1 выберем сопряжёнными относительно квадрики k_2, единичную точку возьмём произвольно на прямой P_1^2.

Группу G проективных автоморфизмов абсолюта будем называть *группой движений* пространства $\bar{F}_3^2$. Группа G изоморфна группе матриц вида $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$, где $a^2 - b^2 = \pm 1$, $a_0 + a_1 + a_2 = $ $= a + b$.

Отсюда следует, что деривационные формулы и уравнения структуры пространства $\bar{F}_3^2$ имеют вид

$$dE_i = \omega_i^j E_j, \qquad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \tag{1}$$

где $\omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_2^1 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_2^3 = 0$, $\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_0^1 = \omega_1^0$, $i, j = \overline{0,3}$.

Таким образом, имеем шесть независимых дифференциальных форм инфенитезимального перемещения канонического репера пространства $\bar{F}_3^2$, т. е. подвижность пространства $\bar{F}_3^2$ равна 6 и совпадает с подвижностью классических неевклидовых пространств.

Помещая вершины E_0 и E_1 на прямую u комплекса, выделим главные формы ω_0^α и ω_1^α ($\alpha = 2, 3$) перемещения канонического репера, которые обращаются в ноль при неподвижной прямой u.

© Киотина Г. В., 2011

Так как многообразие прямых комплекса зависит от трёх параметров, то четыре главные формы в репере нулевого порядка удовлетворяют одному линейному уравнению:

$$K_\alpha \omega_0^\alpha + K_\alpha^1 \omega_1^\alpha = 0, \tag{2}$$

где K_α и K_α^1 — функции, зависящие от параметров перемещения прямой u. В зависимости от условий, которым удовлетворяют коэффициенты K_α и K_α^1, будем иметь различные виды комплексов.

1. НЕСПЕЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ПРЯМЫХ

Теорема 1. *Если в уравнении (2) $K_\alpha K_\beta^1 \neq 0$ при $\beta \neq \alpha$, то это уравнение в репере первого порядка можно привести к одному из видов:*

$$\omega_0^\alpha = K\omega_1^\beta + \omega_0^\beta, \qquad \omega_0^\alpha = K\omega_1^\beta.$$

Доказательство. При $K_\alpha K_\beta^1 \neq 0$ уравнение (2) можно записать в виде

$$\omega_0^\alpha = K\omega_1^\beta + K_1\omega_0^\beta + K_2\omega_1^\alpha, \qquad K \neq 0. \tag{3}$$

При $\alpha = 2$ имеем уравнение

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 + K_1\omega_0^3 + K_2\omega_1^2, \qquad K \neq 0. \tag{4}$$

Для построения репера первого порядка, связанного с прямой u комплекса, рассмотрим нормальную корреляцию, при которой каждой точке M прямой u ставится в соответствие плоскость Π, касательная вдоль прямой u к конусу с вершиной в точке M прямых комплекса в проективном пространстве P_3. Известно, что это соответствие является проективным.

Плоскость Π пересекает абсолютную прямую P_1^1 в точке M_1. Тем самым между точками прямых u и P_1^1 устанавливается проективное инволюционное соответствие, которое, как и в [2], назовём *нормальной коллинеацией*. В качестве вершины E_0 на прямой u выберем (при $K_2 \neq \mathrm{const}$) точку, соответствующую точке E_2 в нормальной коллинеации. За точку E_1 примем точку, сопряжённую для E_0 на прямой u. Касательная плоскость Π_1 вдоль прямой E_1E_0 к конусу с вершиной в точке E_1 прямых комплекса пересекает прямую P_1^1 в точке M. Если точка $M \not\equiv E_3$, то примем её за точку $E_2(0;0;1;1)$.

Найдём уравнение комплекса (4) в построенном репере первого порядка. Для конуса с вершиной в точке E_0 прямых комплекса при неподвижной точке E_0 имеем $dE_0 \equiv 0$ и, следовательно, $\omega_0^i = 0$ при всех $i = \overline{0,3}$. Так как касательная плоскость Π к конусу с вершиной в точке E_0 вдоль прямой E_0E_1 пересекает прямую P_1^1 в точке E_2, т. е. не содержит точку E_3, то коэффициент ω_1^3 при E_3 в разложении dE_1 в касательной плоскости Π равен нулю. Тогда из уравнения (4) получим $K_2\omega_1^2 = 0$, т. е. $K_2 = 0$ (при $K_2 \neq \mathrm{const}$). Далее, рассмотрим два случая.

1. В случае, когда точке E_1 в нормальной коллинеации соответствует точка E_2, получим (при неподвижной точке E_1) $dE_1 \equiv 0$, $\omega_1^i = 0$, $dE_0 = \omega_0^1 E_1 + \omega_0^2 E_2 + \omega_0^2 E_3$, т. е. $\omega_0^3 = \omega_0^2$. Из уравнения (4) следует, что $K_1 = 1$. Уравнение (4) примет вид

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 + \omega_0^3. \tag{5}$$

2. В случае, когда точке E_1 в нормальной коллинеации соответствует точка E_3, получим, что в разложении dE_0 в касательной плоскости Π_1 к конусу с вершиной в точке E_1 отсутствует слагаемое с точкой E_2, т. е. $\omega_0^2 = 0$. Учитывая, что $\omega_1^i = 0$ при $dE_1 \equiv 0$, из уравнения (4) получим $K_1\omega_0^3 = 0$. Отсюда следует, что $K_1 = 0$. Уравнение комплекса (4) в этом случае принимает вид

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3. \tag{6}$$

Аналогичный результат получим при $\alpha = 3$. Теорема доказана. □

Уравнение (5) принимает вид (6) при переходе к новому базису: $\tilde\omega_0^2 = \omega_0^2 - \omega_0^3$, $\tilde\omega_0^3 = \omega_0^2 + \omega_0^3$, $\tilde\omega_1^3 = \omega_1^3$, $\tilde\omega_1^2 = \omega_1^2$.

В новом базисе абсолютная точка A принимается за точку E_2. Некоторые виды комплексов в этом базисе изучены в [3].

По аналогии с комплексами в классических неевклидовых пространствах коэффициент K в уравнениях (6) и (5) назовём *кривизной* комплекса. При $K = \mathrm{const}$ комплексы (6) и (5) обозначим (6′) и (5′) и назовем их *комплексами постоянной кривизны*.

Комплексы (5′), (6′) являются частными случаями комплекса (5), (6).

Для выяснения характеристического свойства комплекса (6) введём определение.

Определение. Точки прямой u комплекса, соответствующие в нормальной коллинеации точкам E_2 и E_3 абсолюта назовём *абсолютными точками* прямой комплекса.

На каждой прямой u комплекса имеются две абсолютные точки. Обозначим их M_2 и M_3. Для комплекса (6) абсолютные точки M_2, M_3 являются вершинами E_0, E_1 подвижного репера. Так как вершины E_0, E_1 подвижного репера сопряжены относительно абсолютной квадрики k_2, то имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *На каждой прямой комплекса* (6) *имеется пара сопряженных абсолютных точек.*

Комплекс (6) назовём *абсолютно-сопряженным*.

Теорема 3. *Репер первого порядка для комплексов* (6), (5), (6′), (5′) *является каноническим. Произвол существования комплексов* (5), (6)— *одна функция от трёх переменных, и одна функция от двух переменных для комплексов* (5′), (6′).

Доказательство. Дифференцируя внешним образом уравнение (4), получим следующее квадратичное уравнение:

$$(dK_2 + ((K_2)^2 - 1)\omega_0^1) \wedge \omega_1^2 + (dK_1 + (K + K_1K_2)\omega_0^1 + K_1(\omega_2^2 - \omega_3^3)) \wedge \omega_0^3 +$$
$$+(dK + K(\omega_2^2 - \omega_3^3) + (K_2K + K_1)\omega_0^1) \wedge \omega_1^3 = 0. \tag{7}$$

Разрешая уравнение (7) по лемме Картана, получим:

$$\begin{gathered} dK_2 + ((K_2)^2 - 1))\omega_0^1 = q_{11}\omega_1^2 + q_{12}\omega_0^3 + q_{13}\omega_1^3, \\ dK_1 + (K + K_1K_2)\omega_0^1 + K_1(\omega_2^2 - \omega_3^3) = q_{12}\omega_1^2 + q_{22}\omega_0^3 + q_{23}\omega_1^3, \\ dK + (K_2K + K_1)\omega_0^1 + K(\omega_2^2 - \omega_3^3) = q_{13}\omega_1^2 + q_{23}\omega_0^3 + q_{33}\omega_1^3. \end{gathered} \tag{8}$$

Обозначая через π_i^j дифференциальные формы ω_i^j при неподвижной прямой и учитывая (1), получим 3 уравнения относительно пяти дифференциальных форм π_0^1, π_3^3, dK, dK_1, dK_2, из которых при $K_2 \neq \mathrm{const}$ следует простейшее решение:

$$K_2 = \pi_0^1 = 0, \qquad K_1 = 1, \qquad \pi_3^3 = 0, \qquad dK = 0, \tag{9}$$

а также частное решение при $K_1 \neq \mathrm{const}$:

$$K_2 = K_1 = 0, \qquad \pi_0^1 = \pi_3^3 = 0, \qquad dK = 0. \tag{9′}$$

Решения (9) и (9′) задают соответственно комплексы (5) и (6). Из этих решений следует, что все дифференциальные формы комплексов (5) и (6) становятся главными, и репер первого порядка является каноническим, в том числе и при $dK = 0$.

Выясним произвол существования этих комплексов. Покажем выполнимость критерия Картана. Из того что имеем одно квадратичное уравнение (7), следует, что $S_1 = 1$.

Для комплексов (5), (6) $q = 3$, а учитывая, что $S_1 \geq S_2 \geq S_3$, получим $S_1 = S_2 = S_3 = 1$ и число $Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 = 6$. Число N, равное числу независимых коэффициентов q_{ij} в уравнениях (8), также равно 6, т. е. $N = Q$. Критерий Картана выполняется. Так как $S_3 = 1$, то произвол существования комплексов (5), (6) — одна функция от трёх переменных.

Для комплексов (5′), (6′) легко показать, что уравнения (8) зависимы, и поэтому $q = 2$, а $Q = S_1 + 2S_2 = 3$. Число N для этих комплексов также равно трём, так как 6 независимых коэффициентов q_{ij} удовлетворяют трём линейным условиям. Критерий Картана выполняется, комплексы (5′), (6′) существуют с произволом в одну функцию от двух переменных. Теорема доказана. □

При доказательстве теоремы 3 мы исключили случай, когда коэффициент K_2 в репере нулевого порядка является постоянным.

При $K_2 = \mathrm{const}$ уравнение комплекса (4) запишем в виде

$$\omega_1^3 = q\omega_0^2 + q_1\omega_1^2 + q_2\omega_0^3. \qquad (10)$$

Уравнение (10) получается из уравнения (3) (при $\alpha = 3$) перенумерованием индексов 0 и 1, т. е. комплекс (10) получается из комплекса (3) заменой вершин $E_0 \leftrightarrow E_1$ в подвижном репере комплекса. Поэтому аналогично предыдущему уравнение (10) можно привести к одному из видов: $\omega_1^3 = q\omega_0^2 + \omega_1^2$ или $\omega_1^3 = q\omega_0^2$.

В том случае, когда в репере нулевого порядка в уравнении комплекса (3) оба коэффициента K_1 и K_2 постоянны, т. е. $dK_1 = dK_2 = 0$, из уравнений (8) при неподвижной прямой получим (при $(K_2)^2 \neq 1$):

$$dK = 0, \qquad K_1 = 1, \qquad \pi_0^1 = \pi_3^3 = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (3) принимает вид

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 + K_2\omega_1^2 + \omega_0^3, \qquad K_2 = \mathrm{const}. \qquad (12)$$

Комплекс (12) существует с тем же произволом, что и комплекс (5), и репер первого порядка для него является каноническим.

В нормальной коллинеации, связанной с прямой комплекса (12), вершинам E_2, E_3 соответствуют абсолютные точки $M_2(1; -K_2; 0; 0)$, $M_3(1; K; 0; 0)$.

Так как $K_2 = \mathrm{const}$, то на каждой прямой комплекса (12) имеется инвариантная на всем многообразии прямых комплекса абсолютная точка M_3, а при $K = \mathrm{const}$ — две инвариантные абсолютные точки: M_2 и M_3.

Комплекс (12) при $K = \mathrm{const}$ назовём *абсолютно-инвариантным*, а при $K \neq \mathrm{const}$ — *абсолютно-полуинвариантным*.

Учитывая $(E_0E_1M_1M_2) = -K_2/K$, получим, что коэффициент K_2 характеризует отклонение вершин репера E_0, E_1 от абсолютных точек.

Число K_2/K назовём *второй кривизной комплекса* (12).

Для абсолютно-инвариантного комплекса обе кривизны постоянны.

При $K_2 = \pm 1$ комплекс (12) имеет вид

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 \pm \omega_1^2 + \omega_0^3. \qquad (13)$$

Для комплексов (13) уравнение (7) не зависит от ω_1^2, поэтому все три коэффициента в первом уравнении системы (8) равны нулю, т. е. $N = 3$. Учитывая, что в системе (8) два линейно независимых уравнения, имеем $q = 2$, а $Q = 3$.

Комплекс (13) существует с произволом в одну функцию от двух переменных.

Выясним его строение. При $K_2 = -1$ $f(E_2) = E^0(1; 1; 0; 0)$, т. е. точка E^0 является абсолютной точкой. Так как E^0 описывает поверхность, являющуюся инвариантной плоскостью P_2^1, то комплекс (13) расслаивается согласно [4, с. 120] в двухпараметрическое множество пучков прямых с центрами в точках плоскости P_2^1.

При $K_2 = 1$ имеем комплекс того же вида, центры пучков его принадлежат абсолютной плоскости P_2^2. Комплекс (13) является квазиспециальным [4, с. 120].

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Существуют 5 типов комплексов ненулевой кривизны:*

1) комплекс общего вида;

2) абсолютно-сопряженный комплекс;

3) квазиспециальный комплекс;

4) абсолютно-полуинвариантный комплекс;

5) абсолютно-инвариантный комплекс.

В каждом из трёх первых типов выделяются комплексы постоянной кривизны.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ И ВЫРОЖДЕННЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Для комплесков, кривизна которых равна нулю для любой прямой, $K_\alpha K^1_\beta = 0$ при всех $\beta \neq \alpha$, $\alpha = 2, 3$. Комплекс (2) в этом случае принимает один из видов:

$$K_\alpha \omega_0^\alpha = K_\beta \omega_0^\beta, \qquad K^1_\alpha \omega_1^\alpha = K^1_\beta \omega_1^\beta, \qquad K_\alpha \omega_0^\alpha = K^1_\beta \omega_1^\alpha.$$

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 5. *Существуют три типа комплексов нулевой кривизны: специальный, тангенциально-вырожденный специальный, вырожденный специальный. Для комплексов первых двух типов существует канонический репер первого порядка. Канонический репер вырожденного специального комплекса не существует.*

Специальный комплекс состоит из прямых, касающихся некоторой поверхности V. Если поверхность V является тангенциально-вырожденной, то комплекс мы называем *тангенциально-вырожденным специальным*. Вырожденный специальный комплекс состоит из однопараметрического множества связок прямых, центры которых описывают некоторую кривую в абсолютной плоскости [5].

Библиографический список

1. *Киотина Г. В.* Группа движений обобщенно-галилеева пространства // Вестн. Рязан. ГПУ. 2004. С. 117—126.

2. *Розенфельд Б. А., Зацепина О. В., Стеганцева П. Г.* Гиперкомплексы прямых в евклидовом и неевклидовом пространствах // Изв. вузов. Математика. 1990. № 3. С. 57—66.

3. *Киотина Г. В.* Комплексы прямых в бифлаговом пространстве $\bar{F}_3^2$ // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2004. С. 338—344.

4. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов. Киев, 1963. 292 с.

5. *Киотина Г. В., Зацепина О. В., Ромакина Л. Н.* Специальные комплексы прямых в пространствах $\bar{F}_3^2$, ${}^1S_5$, $\bar{B}_3^h$ // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: тез. докл. международ. конф. Саратов, 2008. С. 85–86.

УДК 513.6

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВ ТОЛЕРАНТНЫХ ПЕТЕЛЬ

Е. В. Коробченко

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел.
E-mail: KorobchenkoEV@mail.ru

В статье доказывается теорема об изоморфизме между гомотопическими группами исходного толерантного пространства и гомотопическими группами на единицу меньшей размерности пространства толерантных петель исходного пространства.

Ключевые слова: толерантное пространство, пространство толерантных петель, гомотопические группы толерантного пространства.

Homotopy Groups of Space of Tolerant Loops.

E. V. Korobchenko

Saratov State University,
Chair of Computer Algebra and the Theory of Numbers
E-mail: KorobchenkoEV@mail.ru

In the article is proved the theorem about isomorphism between homotopy groups of initial tolerant space and homotopy groups with descremented by one dimension of space of tolerant loops.

Key words: tolerant space, space of tolerant loops, homotopy groups of tolerant space.

Толерантное пространство (Т-пространство), по определению Зимана [1], — это пара (X, τ), где X — множество, а $\tau \subset X \times X$ — рефлексивное и симметричное отношение, называемое *отношением толерантности*. Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ Т-пространств называется *толерантным* (Т-отображением), если из $x_1 \tau x_2$ следует $f(x_1) \theta f(x_2)$. К настоящему времени имеется достаточно развитая гомологическая и гомотопическая теория Т-пространств [2].

© Коробченко Е. В., 2011