Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М., 2009. 192 с.
5. *Мышкис А. Д.* О решениях линейного однородного двучленного дифференциального неравенства второго порядка с обобщённым коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 5. С. 615–619.
6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975. 512 с.

УДК 539.3

РАЗРЕШИМОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТРАНСМИССИИ ДЛЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В. Ф. Кириченко

Саратовский государственный технический университет,
кафедра математики и моделирования
E-mail: saratuni@list.ru

С помощью метода компактности и нового способа получения априорных оценок доказана разрешимость обобщенной задачи трансмиссии в неклассической теории пологих оболочек.

Ключевые слова: задачи трансмиссии, нелинейные системы уравнений с частными производными, обобщенные решения краевых задач, неклассическая теория оболочек.

Solvability of Evolutionary Equations in Generalized Transmission Problems for Shallow Shells

V. F. Kirichenko

Saratov State Technical University,
Chair of Mathematics and Modelling
E-mail: saratuni@list.ru

We prove the solvability of the generalized transmission problem in the non-classical theory of shallow shells using the method of compactness and a new way of obtaining a priori estimates.

Key words: transmission problems, nonlinear systems of partial differential equations, generalized solutions of boundary value problems, non-classical theory of shells.

В настоящей работе исследуется новый класс обобщенных задач трансмиссии для нелинейной системы уравнений с частными производными, характеризуемой структурной неоднородностью входящих в нее дифференциальных уравнений различного типа. Доказательство корректности такой системы имеет в своей основе метод компактности [1, 2] и новый «трехмерный» способ получения априорных оценок. Заметим, что классические задачи трансмиссии (или дифракции) исследуются, например, в работах [3–5].

Объектом исследования является пологая однородная и изотропная оболочка, занимающая в начальный момент времени наблюдения t_0 трехмерную область $D = D_1 \cup D_2$ из пространства R^3, при этом:

$$D_1 \cap D_2 = \varnothing, \quad D_i = \Omega_i \times \left(-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right) \quad (i = 1, 2),$$
$$\overline{\Omega}_i = \Omega_i \cup \partial\Omega_i \cup \gamma, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega, \quad \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2.$$

Здесь Ω — план оболочки; $\partial\Omega$ — граничный контур плана; γ — достаточно гладкая кривая, разбивающая область Ω на две измеримые подобласти Ω_i; h_i — постоянная толщина части оболочки, занимающей измеримую подобласть D_i; $h_1 \geq h_2 > 0$. Как обычно, отождествляем элементы $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ с координатами точек в геометрическом пространстве, параметризованном декартовой системой координат таким образом, что уравнение $x_3 = 0$ является определяющим для срединной поверхности рассматриваемой оболочки, а ось Ox_3 направлена к центру кривизны оболочки.

Полагаем, что в области D_1 эволюция оболочки описывается на базе обобщенных гипотез Тимошенко, а в области D_2 — гипотез Кирхгофа – Лява. Математическая модель такой оболочки определяется следующим вариационным уравнением Гамильтона – Остроградского:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ \iint\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \Bigg(-\rho\mu_i h_i \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u_{30}) - \rho\mu_i \frac{h_i^3}{12} \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u_{30}) + h_i \mu_i \tilde{\varepsilon}_i \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \delta u_{30} +$$
$$+ \mu_i \tilde{\varepsilon}_i \frac{h_i^3}{12} \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \cdot \operatorname{grad} \delta u_{30} + \mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} (\sigma_{ii}\delta\varepsilon_{ii} + \sigma_{i3-i}\delta\varepsilon_{i3-i} + 2\sigma_{i3}\delta\varepsilon_{i3})\, dx_3 +$$

$$+\mu_2 \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} (s_{ii}\delta f_{ii} + s_{i3-i}\delta f_{i3-i})\,dx_3\Bigg)\,dx_1\,dx_2\Bigg\}\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \iint\limits_{\Omega} g(x_1,x_2,t)\delta u_{30}\,dx_1\,dx_2\,dt \qquad (1)$$

и начальными условиями для функции $u_{30}(x_1,x_2,t)$:

$$u_{30}(x_1,x_2,t_0) = \varphi_{30}(x_1,x_2), \qquad \frac{\partial u_{30}(x_1,x_2,t_0)}{\partial \text{e}} = \psi_{30}(x_1,x_2). \qquad (2)$$

В (1) и (2) используются следующие условные обозначения: $\mu_i = \mu_i(x_1,x_2)$ $(i=1,2)$ — характеристические функции, при этом $\mu_i(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1,x_2)\in\Omega_i, \\ 0, & (x_1,x_2)\in\Omega_{3-i}, \end{cases}$ $\sigma_{ii}, \sigma_{i3-i}, \sigma_{i3}$ $(i=1,2)$ — компоненты тензора напряжений для части оболочки D_1, а s_{ii}, s_{i3-i}, s_{i3} $(i=1,2)$ — для части оболочки D_2, при этом

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{3-i3-i}), \qquad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{12}, \qquad \sigma_{i3} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{i3}, \qquad (3)$$

$$s_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2}(f_{ii} + \nu f_{3-i3-i}), \qquad s_{12} = s_{21} = \frac{E}{1+\nu}\,f_{12}, \qquad (4)$$

ε_{ii}, ε_{12}, ε_{i3} $(i=1,2)$ — компоненты тензора деформаций для части оболочки D_1, а f_{ii}, f_{12} $(i=1,2)$ — для части оболочки D_2, при этом

$$\varepsilon_{ii} = e_{ii} + \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)\frac{\partial u_{i1}}{\partial x_i} - x_3\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2}, \qquad \varepsilon_{i3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2}\right)u_{i1},$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = e_{12} + \frac{1}{2}\left(\left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}}{\partial x_1}\right) - x_3\left(2\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\right), \qquad (5)$$

$$f_{ii} = e_{ii} - x_3\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2}, \qquad f_{12} = f_{21} = e_{12} + \frac{1}{2}\left(-x_3\left(2\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\right), \qquad (6)$$

$$e_{ii} = \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_i} - k_i u_{30} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\right)^2, \qquad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{20}}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial u_{30}}{\partial x_1}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_2}\right), \qquad (7)$$

$u_j(x_1,x_2,x_3,t)$ $(j=\overline{1,3})$ — компоненты вектора перемещений, определяемые по правилам:

$$u_i(x_1,x_2,x_3,t) = \begin{cases} u_{i0} + \left(x_3 - \dfrac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)u_{i1} - x_3\dfrac{\partial u_{30}}{\partial x_i}, & (x_1,x_2,x_3,t)\in\overline{D}_1\times[t_0,t_1], \\ u_{i0} - x_3\dfrac{\partial u_{30}}{\partial x_i}, & (x_1,x_2,x_3,t)\in\overline{D}_2\times[t_0,t_1] \end{cases} \qquad (i=1,2),$$

$$u_3(x_1,x_2,x_3,t) = u_{30}(x_1,x_2,t), \quad (x_1,x_2,t)\in\overline{\Omega}\times[t_0,t_1],$$

где $u_{30} = u_{30}(x_1,x_2,t)$ — функция прогиба; функции $u_{i0} = u_{i0}(x_1,x_2,t)$, $u_{i0} : \overline{\Omega}\times[t_0,t_1]\to R$, определяют перемещения точек срединной поверхности; функции $u_{i1} = u_{i1}(x_1,x_2,t)$, $u_{i1} : \overline{\Omega}_1\times[(t_0,t_1)]\to R$, определяют дополнительные углы поворота нормали к срединной поверхности только в области $\overline{\Omega}_1$; $[t_0,t_1]$ — отрезок времени наблюдения за эволюцией оболочки; ρ, E, ν — положительные постоянные, определяющие соответственно плотность материала, модуль Юнга и коэффициент Пуассона для оболочки; функция $g(x_1,x_2,t)$, $g : \Omega\times([t_0,t_1])\to R$, определяет интенсивность поперечной нагрузки; k_1, k_2 — постоянные кривизны срединной поверхности оболочки в момент времени t_0; переменная t (время) имеет своей областью значений отрезок $[t_0,t_1]$; $\tilde{\varepsilon}_i$ $(i=1,2)$ — постоянные и положительные коэффициенты демпфирования (диссипации); $\varphi_{30}(x_1,x_2)$, $\psi_{30}(x_1,x_2)$ — известные функции, заданные на области $\overline{\Omega}$ и определяющие начальные условия (2); функции $\delta u_{30} = \delta u_{30}(x_1,x_2,t)$, $\delta u_{i0} = \delta u_{i0}(x_1,x_2,t)$ (определенные на области $\overline{\Omega}\times[t_0,t_1]$) и функция $\delta u_{i1} = \delta u_{i1}(x_1,x_2,t)$ (определенная на области $\overline{\Omega}_1\times[t_0,t_1]$) $(i=1,2)$, являются изохронными вариациями соответственно функций u_{30}, u_{i0}, u_{i1}, при этом функции $\delta\varepsilon_{ii}, \delta\varepsilon_{12}, \delta\varepsilon_{i3}, \delta f_{ii}, \delta f_{12}$ получаются из (5)–(7), если в правые части этих равенств вместо функций u_{i0}, u_{i1}, u_{30} подставить вариации $\delta u_{i0}, \delta u_{i1}, \delta u_{30}$, кроме того,

$$\delta u_{i0}(x_1,x_2,t_0) = \delta u_{i0}(x_1,x_2,t_1) = 0, \qquad \delta u_{i1}(x_1,x_2,t_0) = \delta u_{i1}(x_1,x_2,t_1) = 0,$$

$$\delta u_{30}(x_1,x_2,t_0)=\delta u_{30}(x_1,x_2,t_1)=0.$$

Вариационному уравнению (1) символически можно поставить в соответствие различные краевые задачи, в частности, первая краевая задача для нелинейной системы уравнений движения рассматриваемой оболочки представляет собой систему дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами, определенными на различных подобластях области Ω и в совокупности с граничными и начальными условиями имеет такой вид:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\sigma_{ii}\,dx_3+\mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}s_{ii}\,dx_3\right)-\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\sigma_{12}\,dx_3+\mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}s_{12}\,dx_3\right)=0,$$
$$i=1,2,\quad (x_1,x_2)\in\Omega, \tag{8}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)\sigma_{ii}\,dx_3\right)-\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)\sigma_{12}\,dx_3\right)+$$
$$+\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(1-\frac{4x_3^2}{h_1^2}\right)\sigma_{i3}\,dx_3=0,\qquad i=1,2,\quad (x_1,x_2)\in\Omega_1; \tag{9}$$

$$\rho(\mu_1h_1+\mu_2h_2)\frac{\partial^2u_{30}}{\partial t^2}+(\mu_1h_1\tilde{\varepsilon}_1+\mu_2h_2\tilde{\varepsilon}_2)\frac{\partial u_{30}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\left(\mu_1\frac{h_1^3}{12}+\mu_2\frac{h_2^3}{12}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2u_{30}}{\partial t^2}\right)\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\mu_1\tilde{\varepsilon}_1\frac{h_1^3}{12}+\mu_2\tilde{\varepsilon}_2\frac{h_2^3}{12}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_{30}}{\partial t}\right)\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}(-x_3)\sigma_{ii}\,dx_3+\mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}(-x_3)s_{ii}\,dx_3\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_1\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\sigma_{ii}\,dx_3+\mu_2\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}s_{ii}\,dx_3\right)-k_i\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\sigma_{ii}\,dx_3+\mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}s_{ii}\,dx_3\right)+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_{3-i}}\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}(-x_3)\sigma_{12}\,dx_3+\mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}(-x_3)s_{12}\,dx_3\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_1\frac{\partial u_{30}}{\partial x_{3-i}}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\sigma_{12}\,dx_3+\mu_2\frac{\partial u_{30}}{\partial x_{3-i}}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}s_{12}\,dx_3\right)=g(x_1,x_2,t),\quad i=1,2,\quad (x_1,x_2)\in\Omega; \tag{10}$$

$$u_{30}|_{\Gamma}=0,\qquad \frac{\partial u_{30}}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0,\qquad u_{i1}|_{\Gamma_1}=0,\qquad u_{i0}|_{\Gamma}=0,\qquad i=1,2, \tag{11}$$

$$u_{30}|_{t=t_0}=\varphi_{30}(x_1,x_2),\qquad \frac{\partial u_{30}}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=\psi_{30}(x_1,x_2),\qquad (x_1,x_2)\in\overline{\Omega}, \tag{12}$$

где $\Gamma=\partial\Omega\times[t_0,t_1]$, $\Gamma_1=(\partial\Omega_1\cup\gamma)\times[t_0,t_1]$, n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, условия (11) — граничные условия, а (12) — начальные условия.

Замечание. Если вариационное уравнение (1) записать без использования характеристических функций μ_i, $i=1,2$, то в качестве уравнений Эйлера – Лагранжа для такого уравнения легко получить уравнения движения оболочки по отдельным областям Ω_1 и Ω_2, а также условия сопряжения решений таких уравнений на кривой γ. Так как далее условия сопряжения в явной форме не используются, то в данной работе они не приводятся.

Обозначения используемых далее функциональных пространств соответствуют [2], при этом символами $|\cdot|_A$, $(\cdot,\cdot)_A$ обозначаем норму и скалярное произведение в пространстве $L^2(A)$.

Следующая теорема доказывает корректность первой краевой задачи (7)–(12) в определенных функциональных пространствах.

Теорема. *Пусть кривые $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, γ, $\partial\Omega_1 \cup \gamma$ имеют гладкость, достаточную для используемых теорем вложения, и выполняются такие условия:*

$$g(x_1,x_2,t) \in L^2(Q), \qquad Q = \Omega \times (t_0,t_1), \qquad \varphi_{30}(x_1,x_2) \in H_0^2(\Omega), \qquad \psi_{30}(x_1,x_2) \in H_0^1(\Omega). \tag{13}$$

Тогда: 1) *существует хотя бы одно обобщенное решение $\{\tilde u_{30}, \tilde u_{i0}, \tilde u_{i1}\}$, $i = 1,2$, первой краевой задачи* (7)–(12), *принадлежащее следующим функциональным пространствам:*

$$\tilde u_{30} \in L^\infty(t_0,t_1;H_0^2(\Omega)), \quad \tilde u_{i0},\ \frac{\partial \tilde u_{30}}{\partial t} \in L^\infty(t_0,t_1;H_0^1(\Omega)), \quad \tilde u_{i1} \in L^\infty(t_0,t_1;H_0^1(\Omega_1)) \tag{14}$$

и удовлетворяющее интегральным тождествам

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\iint\limits_{\Omega}\left(\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\tilde\sigma_{ii}\,dx_3 + \mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}\tilde s_{ii}\,dx_3\right)\frac{\partial\upsilon_{1i}}{\partial x_i} + \left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\tilde\sigma_{12}\,dx_3 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}\tilde s_{12}\,dx_3\right)\frac{\partial\upsilon_{1i}}{\partial x_{3-i}}\right)dx_1\,dx_2\,dt = 0, \quad \forall\ \upsilon_{1i} \in L^2(t_0,t_1;H_0^1(\Omega)), \quad i = 1,2; \tag{15}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\iint\limits_{\Omega_1}\left(\left(\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)\tilde\sigma_{ii}\,dx_3\right)\frac{\partial\upsilon_{2i}}{\partial x_i} + \left(\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)\tilde\sigma_{12}\,dx_3\right)\frac{\partial\upsilon_{2i}}{\partial x_{3-i}} + \right.$$
$$\left. + \left(\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2}\right)\sigma_{i3}\,dx_3\right)\upsilon_{2i}\right)dx_1\,dx_2\,dt = 0, \qquad \forall\ \upsilon_{2i} \in L^2(t_0,t_1;H_0^1(\Omega_1)), \qquad i = 1,2; \tag{16}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\iint\limits_{\Omega}\left(-\rho\,(\mu_1h_1 + \mu_2h_2)\,\frac{\partial\tilde u_{30}}{\partial t}\frac{\partial\upsilon_3}{\partial t} + (\mu_1h_1\tilde\varepsilon_1 + \mu_2h_2\tilde\varepsilon_2)\,\frac{\partial\tilde u_{30}}{\partial t}\upsilon_3 + \right.$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\left(-\rho\left(\mu_1\frac{h_1^3}{12} + \mu_2\frac{h_2^3}{12}\right)\frac{\partial^2\tilde u_{30}}{\partial x_i\partial t}\cdot\frac{\partial^2\upsilon_3}{\partial x_i\partial t} + \left(\mu_1\tilde\varepsilon_1\frac{h_1^3}{12} + \mu_2\tilde\varepsilon_2\frac{h_2^3}{12}\right)\frac{\partial^2\tilde u_{30}}{\partial x_i\partial t}\cdot\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_i} + \right.$$
$$+\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}(-x_3)\tilde\sigma_{ii}\,dx_3 + \mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}(-x_3)\tilde s_{ii}\,dx_3\right)\frac{\partial^2\upsilon_3}{\partial x_i^2} +$$
$$+\left(\mu_1\frac{\partial\tilde u_{30}}{\partial x_i}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\tilde\sigma_{ii}\,dx_3 + \mu_2\frac{\partial\tilde u_{30}}{\partial x_i}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}\tilde s_{ii}\,dx_3\right)\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_i} - k_i\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\tilde\sigma_{ii}\,dx_3 + \right.$$
$$\left. + \mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}\tilde s_{ii}\,dx_3\right)\upsilon_3 + \left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}(-x_3)\tilde\sigma_{12}\,dx_3 + \mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}(-x_3)\tilde s_{12}\,dx_3\right)\frac{\partial^2\upsilon_3}{\partial x_i\partial x_{3-i}} +$$
$$\left.\left. + \left(\mu_1\frac{\partial\tilde u_{30}}{\partial x_{3-i}}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\tilde\sigma_{12}\,dx_3 + \mu_2\frac{\partial\tilde u_{30}}{\partial x_{3-i}}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}\tilde s_{12}\,dx_3\right)\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_i}\right)\right)dx_1\,dx_2\,dt -$$
$$-\iint\limits_{\Omega}\rho(\mu_1h_1 + \mu_2h_2)\psi_{30}\upsilon_3(x_1,x_2,t_0)\,dx_1\,dx_2 - \iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\left(\rho\left(\mu_1\frac{h_1^3}{12} + \mu_2\frac{h_2^3}{12}\right)\frac{\partial\psi_{30}}{\partial x_i}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial\upsilon_3(x_1,x_2,t_0)}{\partial x_i}\right)dx_1\,dx_2 = \int\limits_{t_0}^{t_1}\iint\limits_{\Omega}g(x_1,x_2,t)\upsilon_3\,dx_1\,dx_2\,dt, \tag{17}$$

для любых функций $v_3 \in L^2(t_0, t_1; H_0^2(\Omega))$ *таких, что* $\partial v_3/\partial t \in L^2(t_0, t_1; H_0^1(\Omega))$ *и* $v_3(x_1, x_2, t_1) = 0$, *при этом второе начальное условие из* (12) *удовлетворяется в смысле интегрального тождества* (17), *а первое начальное условие из* (12) — *в смысле предельного равенства*

$$\lim_{t \to t_0 + 0} \iint\limits_{\Omega} (u_{30}(x_1, x_2, t) - \varphi_{30})^2 \, dx_1 \, dx_2 = 0; \tag{18}$$

2) *приближенное решение задачи* (7)–(12), *удовлетворяющее условиям* (14)–(18), *может быть получено с помощью метода Бубнова – Галеркина, при этом получаемое множество приближенных решений является слабо компактным в пространствах, соответствующих условиям* (14), *а всякая предельная точка этого множества определяет обобщенное решение задачи* (7)–(12).

Доказательство. *1. Построение приближенного решения.* Обобщенное решение задачи (7)–(12) определяем с помощью метода Бубнова – Галеркина. Следуя алгоритму этого метода, выбираем последовательность функций $\{\chi_{k3}\}$, образующих базис в пространстве $H_0^2(\Omega)$ (для определенности полагаем, что базис образован функциями из класса $C^\infty(\Omega)$) с компактным носителем в Ω, ортонормированными по следующей норме пространства $H_0^1(\Omega)$:

$$|\chi_{k3}|^2_{H_0^1} = \iint\limits_{\Omega} \left(\rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2)(\chi_{k3})^2 + \sum_{i=1}^{2} \left(\rho \left(\mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \left(\frac{\partial \chi_{k3}}{\partial x_i} \right)^2 \right) \right) dx_1 \, dx_2,$$

далее определяем функцию $u_{30}^n = u_{30}^n(x_1, x_2, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) имеет место равенство

$$u_{30}^n = \sum_{k3=1}^{n} g_{k3}(t) \chi_{k3}(x_1, x_2); \tag{19}$$

2) коэффициенты $g_{k3}(t)$ в разложении (19) определяем как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\left(\rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial t^2}, \chi_{p3} \right)_\Omega + \left((\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2) \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}, \chi_{p3} \right)_\Omega + \\
+ \sum_{i=1}^{2} \Bigg(\left(\rho \left(\mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^3 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t^2}, \frac{\partial \chi_{p3}}{\partial x_i} \right)_\Omega + \left(\left(\mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t}, \frac{\partial \chi_{p3}}{\partial x_i} \right)_\Omega + \\
+ \left(\left(\mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{ii}^n \, dx_3 + \mu_2 \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{ii}^n \, dx_3 \right), \frac{\partial^2 \chi_{p3}}{\partial x_i^2} \right)_\Omega + \\
+ \left(\left(\mu_1 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^n \, dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^n \, dx_3 \right), \frac{\partial \chi_{p3}}{\partial x_i} \right)_\Omega - \\
- \left(k_i \left(\mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^n \, dx_3 + \mu_2 \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^n \, dx_3 \right), \chi_{p3} \right)_\Omega + \\
+ \left(\left(\mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{12}^n \, dx_3 + \mu_2 \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{12}^n \, dx_3 \right), \frac{\partial^2 \chi_{p3}}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right)_\Omega + \\
+ \left(\left(\mu_1 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{12}^n \, dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{12}^n \, dx_3 \right), \frac{\partial \chi_{p3}}{\partial x_i} \right)_\Omega \Bigg) = (g, \chi_{p3})_\Omega, \quad p3 = \overline{1, n}.
\end{gathered} \tag{20}$$

с начальными условиями

$$u_{30}^n(x_1,x_2,t_0)=\varphi_{30}^n,\qquad \varphi_{30}^n=\sum_{k_3=1}^{n}a_{k3}\chi_{k3},\qquad \varphi_{30}^n\to\varphi_{30}\quad \text{в}\quad H_0^2(\Omega),$$

$$\frac{\partial u_{30}^n(x_1,x_2,t_0)}{\partial t}=\psi_{30}^n,\qquad \psi_{30}^n=\sum_{k_3=1}^{n}b_{k3}\chi_{k3},\qquad \psi_{30}^n\to\psi_{30}\quad \text{в}\quad H_0^1(\Omega),\tag{21}$$

«стрелки» в (21) указывают на сходимость по норме указанных пространств, при этом функции σ_{ii}^n, σ_{12}^n, s_{ii}^n, s_{12}^n в (20) получаются из (3)–(7), если вместо функций u_{30}, u_{i0}, u_{i1} в эти соотношения подставить функции u_{30}^n, u_{i0}^n, u_{i1}^n, в свою очередь, функции $u_{i0}^n=u_{i0}^n(x_1,x_2,t)$, $u_{i1}^n=u_{i1}^n(x_1,x_2,t)$ определяются из решения систем уравнений (8), (9) эллиптического типа с граничными условиями из (11) при условии, что в эти уравнения вместо функции u_{30} подставлена функция u_{30}^n.

Заметим, что указанным задачам Дирихле для систем (8), (9), определяющим две вектор-функции с компонентами $(u_{10}^n,\,u_{20}^n)$ и $(u_{11}^n,\,u_{21}^n)$, соответствуют положительно определенные операторы в пространствах $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ и $L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_1)$ соответственно. Этот факт следует из доказательства положительной определенности оператора, соответствующего задаче Дирихле для уравнений равновесия в линейной теории упругости [6, с. 186–187], приводимого далее «энергетического» неравенства и неравенства Фридрихса [7, с. 129].

Таким образом, существует единственное обобщенное решение $(u_{10}^n,\,u_{20}^n,\,u_{11}^n,\,u_{21}^n)$ задач Дирихле для систем (8), (9) (существование обобщенного решения задачи Дирихле только для системы (8) доказано в лемме 1.2 из работы [1]), при этом $u_{i0}^n\in H_0^1(\Omega)$, $u_{i1}^n\in H_0^1(\Omega_1)$.

Разрешимость задачи Коши (20), (21) на некотором отрезке $[t_0,t_n]$ следует из теоремы Шаудера и доказывается подобно лемме 5.1 из [1].

2. Априорные оценки. Умножим каждое уравнение из системы (20) на соответствующую функцию dg_{p3}/dt и просуммируем по $p3$. Получаем равенство

$$\left(\rho\,(\mu_1h_1+\mu_2h_2)\,\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial t^2},\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)_\Omega+\left((\mu_1h_1\tilde\varepsilon_1+\mu_2h_2\tilde\varepsilon_2)\,\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t},\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)_\Omega+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\left(\rho\left(\mu_1\frac{h_1^3}{12}+\mu_2\frac{h_2^3}{12}\right)\frac{\partial^3u_{30}^n}{\partial x_i\partial t^2},\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i\partial t}\right)_\Omega+\left(\left(\mu_1\tilde\varepsilon_1\frac{h_1^3}{12}+\mu_2\tilde\varepsilon_2\frac{h_2^3}{12}\right)\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i\partial t},\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i\partial t}\right)_\Omega+$$

$$+\left(\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}(-x_3)\,\sigma_{ii}^n\,dx_3+\mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}(-x_3)\,s_{ii}^n\,dx_3\right),\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i^2}\right)\right)_\Omega+$$

$$+\left(\left(\mu_1\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\sigma_{ii}^n\,dx_3+\mu_2\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}s_{ii}^n\,dx_3\right),\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\right)\right)_\Omega-$$

$$-\left(k_i\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\sigma_{ii}^n\,dx_3+\mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}s_{ii}^n\,dx_3\right),\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)_\Omega+$$

$$+\left(\left(\mu_1\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}(-x_3)\,\sigma_{12}^n\,dx_3+\mu_2\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}(-x_3)\,s_{12}^n\,dx_3\right),\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i\partial x_{3-i}}\right)\right)_\Omega+$$

$$+\left(\left(\mu_1\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\sigma_{12}^n\,dx_3+\mu_2\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}s_{12}^n\,dx_3\right),\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\right)\right)_\Omega\Bigg)=\left(g,\frac{\partial u_{30}}{\partial t}\right)_\Omega.\tag{22}$$

Так как положительно определенному оператору соответствует линейный, ограниченный и положительный обратный оператор [7, с. 94–95], то, определяя с помощью таких операторов обобщенные решения (u_{10}^n, u_{20}^n), (u_{11}^n, u_{21}^n) для задач Дирихле (8), (9), (11) и дифференцируя равенства с обратными операторами по переменной t (это возможно в силу существования при любом фиксированном $t \in [t_0, t_n]$ производных $\dfrac{\partial u_{30}}{\partial t} = \sum\limits_{k3=1}^{n} \dfrac{dg_{k3}(t)}{dt}\chi_{k3}$ из класса $C^\infty(\Omega)$ с компактным носителем в Ω), заключаем, что $\dfrac{\partial u_{i0}^n}{\partial t} \in H_0^1(\Omega)$, $\dfrac{\partial u_{i1}^n}{\partial t} \in H_0^1(\Omega_1)$. Поэтому для обобщенных решений u_{i0}^n, u_{i1}^n справедливы интегральные равенства:

$$\left(\left(\mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^n\, dx_3 + \mu_2 \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^n\, dx_3\right), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_i}\right)\right)_\Omega +$$

$$+ \left(\left(\mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{12}^n\, dx_3 + \mu_2 \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{12}^n\, dx_3\right), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_{3-i}}\right)\right)_\Omega = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{23}$$

$$\left(\left(\mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right) \sigma_{ii}^n\, dx_3\right), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i}\right)\right)_\Omega +$$

$$+ \left(\left(\mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right) \sigma_{12}^n\, dx_3\right), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_{3-i}}\right)\right)_\Omega +$$

$$+ \left(\left(\mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2}\right) \sigma_{i3}^n\, dx_3\right), \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial t}\right)_\Omega = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{24}$$

Равенства (23) и (24) просуммируем с равенством (22) и получим следующее «энергетическое» равенство:

$$\left(\rho\,(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2)\, \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial t^2}, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)_\Omega + \left((\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2)\, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)_\Omega +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \left(\left(\rho\left(\mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12}\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t}\right), \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t}\right)_\Omega + \left(\left(\mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12}\right) \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t}, \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t}\right)_\Omega +\right.$$

$$+ \left(\sigma_{ii}^n, \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{ii}^n\right)_{D_1} + \left(s_{ii}^n, \frac{\partial}{\partial t} f_{ii}^n\right)_{D_2} + \left(\sigma_{12}^n, \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_{3-i}} + \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right) \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_{3-i}} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial x_{3-i}}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\right)\right)\right)_{D_1} + \left(s_{12}^n, \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_{3-i}} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial x_{3-i}}\right) + \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\right)\right)\right)_{D_2} +$$

$$\left. + \left(\sigma_{i3}^n, \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2}\right) u_{i1}^n\right)\right)_{D_1}\right) = \left(g, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)_\Omega, \tag{25}$$

где

$$\varepsilon_{ii}^n = e_{ii}^n + \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right) \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2}, \qquad (x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$f_{ii}^n = e_{ii}^n - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2}, \qquad (x_1, x_2) \in \Omega_2, \qquad e_{ii}^n = \frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_i} - k_i u_{30}^n + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\right)^2.$$

Для краткости последующего изложения введем обозначения:

$$A_{ii}^{1n} = \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right) \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2}, \quad A_{12}^{1n} = \frac{1}{2}\left(\left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)\left(\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1}\right) - x_3\left(2\frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\right),$$

$$A_{ii}^{2n} = -x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2}, \qquad A_{12}^{2n} = \frac{1}{2}\left(-2x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2}\right), \qquad i = 1, 2. \tag{26}$$

С учетом (26) равенство (25) принимает в явной форме следующий вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\left(\rho\left(\mu_1 h_1+\mu_2 h_2\right)\right)^{1/2}\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right|_\Omega^2+\left|\left(\mu_1 h_1\tilde{\varepsilon}_1+\mu_2 h_2\tilde{\varepsilon}_2\right)^{1/2}\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right|_\Omega^2+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\left(\rho\left(\mu_1\frac{h_1^3}{12}+\mu_2\frac{h_2^3}{12}\right)\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)\right|_\Omega^2+\left|\left(\mu_1\tilde{\varepsilon}_1\frac{h_1^3}{12}+\mu_2\tilde{\varepsilon}_2\frac{h_2^3}{12}\right)^{1/2}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)\right|_\Omega^2\right)\right)+\frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(h_1\left|e_{11}^n\right|_{\Omega_1}^2+h_1\left|e_{22}^n\right|_{\Omega_1}^2+2\nu h_1\left(e_{11}^n,e_{22}^n\right)_{\Omega_1}+\right.$$

$$+\left|A_{11}^{1n}\right|_{D_1}^2+\left|A_{22}^{1n}\right|_{D_1}^2+2\nu\left(A_{11}^{1n},A_{22}^{1n}\right)_{\Omega_1}+h_2\left|e_{11}^n\right|_{\Omega_2}^2+h_2\left|e_{22}^n\right|_{\Omega_2}^2+2\nu h_2\left(e_{11}^n,e_{22}^n\right)_{\Omega_2}+\left|A_{11}^{2n}\right|_{D_2}^2+$$

$$\left.+\left|A_{22}^{2n}\right|_{D_2}^2+2\nu\left(A_{11}^{2n},A_{22}^{2n}\right)_{D_2}\right)+\frac{2E}{1+\nu}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|e_{12}^n+A_{12}^{1n}\right|_{D_1}^2+\left|e_{12}^n+A_{12}^{2n}\right|_{D_2}^2\right)+$$

$$+\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\left(1-\frac{4x_3^2}{h_1^2}\right)u_{11}^n\right|_{D_1}^2+\left|\left(1-\frac{4x_3^2}{h_1^2}\right)u_{21}^n\right|_{D_1}^2\right)=\left(g,\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)_\Omega. \qquad (27)$$

Проинтегрируем равенство (27) по отрезку $[t_0,t]$, $t\in[t_0,t_n]$, и получим

$$\left\{\frac{1}{2}\left|\left(\rho\left(\mu_1 h_1+\mu_2 h_2\right)\right)^{1/2}\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right|_\Omega^2+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\left|\left(\rho\left(\mu_1\frac{h_1^3}{12}+\mu_2\frac{h_2^3}{12}\right)\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)\right|_\Omega^2+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{1}{2}\left|\left(1-\frac{4x_3^2}{h_1^2}\right)u_{i1}^n\right|_{D_1}^2\right)+\frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\left(h_1|e_{11}^n|_{\Omega_1}^2+h_1|e_{22}^n|_{\Omega_1}^2+2\nu h_1\left(e_{11}^n,e_{22}^n\right)_{\Omega_1}+\left|A_{11}^{1n}\right|_{D_1}^2+\right.$$

$$+\left|A_{22}^{1n}\right|_{D_1}^2+2\nu\left(A_{11}^{1n},A_{22}^{1n}\right)_{\Omega_1}+h_2\left|e_{11}^n\right|_{\Omega_2}^2+h_2\left|e_{22}^n\right|_{\Omega_2}^2+2\nu h_2\left(e_{11}^n,e_{22}^n\right)_{\Omega_2}+\left|A_{11}^{2n}\right|_{D_2}^2+\left|A_{22}^{2n}\right|_{D_2}^2+$$

$$\left.\left.+2\nu\left(A_{11}^{2n},A_{22}^{2n}\right)_{D_2}\right)+\frac{2E}{1+\nu}\frac{1}{2}\left(\left|e_{12}^n+A_{12}^{1n}\right|_{D_1}^2+\left|e_{12}^n+A_{12}^{2n}\right|_{D_2}^2\right)\right\}+\int_{t_0}^{t}\left|\left(\mu_1 h_1\tilde{\varepsilon}_1+\mu_2 h_2\tilde{\varepsilon}_2\right)^{1/2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right|_\Omega^2 dt+\sum_{i=1}^{2}\int_{t_0}^{t}\left|\left(\mu_1\tilde{\varepsilon}_1\frac{h_1^3}{12}+\mu_2\tilde{\varepsilon}_2\frac{h_2^3}{12}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\right)\right|_\Omega^2 dt=C+\int_{t_0}^{t}\left(g,\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)_\Omega dt. \qquad (28)$$

Здесь постоянная C — это выражение в фигурных скобках из левой части равенства (28) в точке $t=t_0$, при этом функции $u_{i0}^n(x_1,x_2,t_0)$ и $u_{i1}^n(x_1,x_2,t_0)$ определяются как обобщенные решения задач Дирихле (8), (9), (11), если в системы (8), (9) подставить вместо функций u_{30}^n функции $\varphi_{30}^n(x_1,x_2)$.

Используя неравенство $|ab|\le\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, $\forall a,b\in R$ и условие $0<\nu<\frac{1}{2}$, из равенства (28) получаем следующее «энергетическое» неравенство

$$\frac{1}{2}\left|(\rho(\mu_1 h_1+\mu_2 h_2))^{1/2}\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right|_\Omega^2+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\left|\left(\rho\left(\mu_1\frac{h_1^3}{12}+\mu_2\frac{h_2^3}{12}\right)\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right)\right|_\Omega^2+\right.$$

$$+\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{1}{2}\left|\left(1-\frac{4x_3^2}{h_1^2}\right)u_{i1}^n\right|_{D_1}^2+\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(h_i(1-\nu)\left(|e_{11}^n|_{\Omega_i}^2+|e_{22}^n|_{\Omega_i}^2\right)+(1-\nu)\left(\left|A_{11}^{in}\right|_{D_i}^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left|A_{22}^{in}\right|_{D_i}^2\right)\right)\right)+\frac{E}{1+\nu}\left(\left|e_{12}^n+A_{12}^{1n}\right|_{D_1}^2+\left|e_{12}^n+A_{12}^{2n}\right|_{D_2}^2\right)\le\left(C+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}|g|_\Omega^2\,dt\right)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}\right|_\Omega^2 dt, \qquad (29)$$

при этом из левой части равенства (28) отброшены слагаемые, стоящие вне фигурных скобок.

Из неравенства (29) на основании леммы Гроноулла [3, с. 152–153] заключаем, что каждое слагаемое из левой части неравенства (29) ограничено некоторой постоянной, не зависящей от номера n

(учитываем, что последовательности $\{\varphi_{30}^n\}$ и $\{\psi_{30}^n\}$ сходятся по норме пространств $H_0^2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ соответственно и, следовательно, ограничены в этих нормах) и зависящей от значения t_1.

Наибольший интерес вызывает последующая оценка слагаемых $|A_{11}^{1n}|_{D_i}^2$ и $|A_{22}^{1n}|_{D_i}^2$, покажем на примере, как такие оценки реализуются. Итак,

$$C \geq |A_{11}^{1n}|_{D_1}^2 = \iint\limits_{\Omega_1} \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_1} \left\{ \left(\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \right)^2 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right)^2 dx_3 - 2 \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} x_3 \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) dx_3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right)^2 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} x_3^2\, dx_3 \right\} dx_1\, dx_2 = \iint\limits_{\Omega_1} h_1^3 \left\{ \frac{17}{315} \left(\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{2}{15} \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right)^2 \right\} dx_1\, dx_2 \geq \left\{ \iint\limits_{\Omega_1} h_1^3 \left(\frac{17}{315} - \frac{\varepsilon}{15} \right) \left(\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right)^2 \right\} dx_1\, dx_2, \quad (30)$$

в (30) использовалось неравенство $|ab| \leq \dfrac{\varepsilon a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2\varepsilon}$ для любых $a, b \in R$, $\varepsilon > 0$.

Для получения из (30) априорных оценок норм $\left| \dfrac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \right|_{\Omega_1}^2$ и $\left| \dfrac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right|_{\Omega_1}^2$ выбираем число ε из условий

$$\begin{cases} \dfrac{17}{315} - \dfrac{\varepsilon}{15} > 0, \\ \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{15\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (31)$$

или

$$\begin{cases} \varepsilon < \dfrac{17}{21}, \\ \varepsilon > \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Так как $17/21 - 4/5 = 1/105 > 0$, то всегда можно подобрать ε, удовлетворяющее условиям (31) и тем самым устанавливается ограниченность указанных норм.

Аналогично, в том числе используя неравенство Корна [6, с. 185] и результаты из работы [1], устанавливается ограниченность норм $\left| \dfrac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right|_{\Omega}^2$, $\left| \dfrac{\partial}{\partial x_1} \left(\dfrac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right) \right|_{\Omega}^2$, $\left| \dfrac{\partial}{\partial x_2} \left(\dfrac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right) \right|_{\Omega}^2$, $|u_{i1}^2|_{H_0^1(\Omega_1)}^2$, $|u_{i0}^2|_{H_0^1(\Omega)}^2$, $|u_{30}^2|_{H_0^2(\Omega)}^2$.

Согласно лемме 5.1 из работы [1] решение задачи Коши (20), (21) можно продолжить на весь отрезок $[t_0, t_1]$.

Таким образом, множество $\{u_{30}^n\}$ ограничено в $L^\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega))$, множества $\left\{ \dfrac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right\}$ и $\{u_{i0}^n\}$ ограничены в $L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega))$, множество $\{u_{i1}^n\}$ ограничено в $L^\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega_1))$.

Из установленной ограниченности множеств в (31) следует слабая компактность указанных множеств в пространствах, соответствующих (14), и возможность выделения в них слабо сходящихся последовательностей, т. е.

$$u_{30}^m \to \tilde{u}_{30} \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega)), \qquad u_{i0}^m \to \tilde{u}_{i0} \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)),$$
$$u_{i1}^m \to \tilde{u}_{i1} \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega_1)), \quad (32)$$
$$\frac{\partial u_{30}^m}{\partial t} \to \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)), \quad i = 1, 2,$$

при этом использованы обозначения из [2].

3. Предельный переход. Пусть функции $g_j(t)$, $1 \le j \le j_0$, принадлежат пространству $C^1([t_0, t_1])$, $g_j(t_1) = 0$ и

$$\tilde{v}_3(x_1, x_2, t) = \sum_{j=1}^{j_0} g_j(t) \otimes \chi_j(x_1, x_2), \tag{33}$$

где $\chi_j(x_1, x_2)$ — функции из базиса $\{\chi_{k3}\}$. Тогда из (20) следует, что при $n = m > j_0$ выполняется равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} \Bigg(- \rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \frac{\partial u_{30}^m}{\partial t} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial t} + (\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2) \frac{\partial u_{30}^m}{\partial t} \tilde{v}_3 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \Bigg(- \rho \left(\mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 u_{30}^m}{\partial x_i \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x_i \partial t} + \left(\mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 u_{30}^m}{\partial x_i \partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_i} +$$

$$+ \left(\mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{ii}^m \, dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{ii}^m \, dx_3 \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x_i^2} + \left(\mu_1 \frac{\partial u_{30}^m}{\partial x_i} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^m \, dx_3 + \right.$$

$$\left. + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^m}{\partial x_i} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^m \, dx_3 \right) \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_i} - k_i \left(\mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^m \, dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^m \, dx_3 \right) \tilde{v}_3 + \left(\mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{12}^m \, dx_3 + \right.$$

$$\left. + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{12}^m \, dx_3 \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x_i \partial x_{3-i}} + \left(\mu_1 \frac{\partial u_{30}^m}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{12}^m \, dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^m}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{12}^m \, dx_3 \right) \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_i} \Bigg) \Bigg) \, dx_1 \, dx_2 \, dt -$$

$$- \iint_{\Omega} \rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \psi_{30}^m \tilde{v}_3(x_1, x_2, t_0) \, dx_1 \, dx_2 - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \left(\rho \left(\mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial \psi_{30}^m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \tilde{v}_3(x_1, x_2, t_0)}{\partial x_i} \right) dx_1 \, dx_2 = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} g(x_1, x_2, t) \tilde{v}_3 \, dx_1 \, dx_2 \, dt. \tag{34}$$

Предельным переходом в (34), дословно повторяя рассуждения из работы [1], заключаем, что выполняется тождество (17) и сопутствующие ему тождества (15) и (16).

Теорема доказана. □

Замечание. Полученный в теореме результат остается справедливым и в том случае, когда кривая γ является простым и достаточно гладким замкнутым контуром, целиком принадлежащим области Ω.

Библиографический список

1. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1957. Т. 21, № 6. С. 747–784.
2. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972. 587 с.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973. 408 с.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 736 с.
5. *Обэн Ж. П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М., 1977. 383 с.
6. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.; Л., 1952. 216 с.
7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 512 с.