Таким образом, имеем следующий список бифурцирующих наборов (bif-раскладов) критических точек функции W: $(9, 12, 4)$, $(5, 12, 8)$, $(8, 8, 1)$, $(4, 4, 1)$, $(5, 8, 4)$, $(5, 4, 0)$, $(1, 4, 4)$, $(1, 0, 0)$. Им соответствуют (с точностью до поворота на угол $\pi/4$) графы, приведенные на рис. 4 (комплексы Морса [11]).

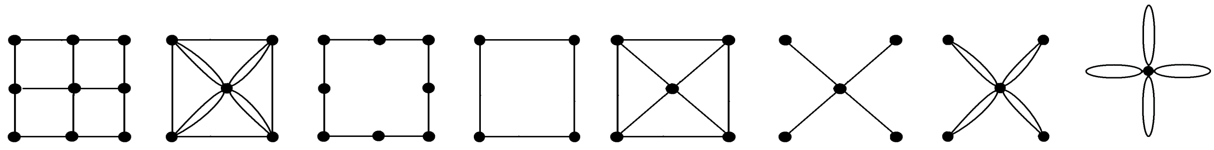

Рис. 4. Комплексы Морса

Библиографический список

1. *Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И.* Фазовые переходы и симметрия кристаллов. М: Наука, 1984. 247 с.
2. *Широков В.Б., Юзюк Ю.И., Dkhil B., Леманов В.В.* Феноменологическое описание фазовых переходов в тонких пленках В.Н. $BaTiO_3$ // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, вып. 5. С. 889–892.
3. *Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ, 2004. Т. 12. С. 3–140.
4. *Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М.* Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 3. С. 530–533.
5. *Darinskii M.M., Sapronov Yu.I., Shalimov V.V.* Phase transitions in crystals characterized by polarization and deformation components of the order parameter // Ferroelectrics. 2002. V. 265. P. 31–42.
6. *Даринский Б.М., Дьяченко А.А., Сапронов Ю.И., Чаплыгин М.Н.* Фазовые переходы в доменных границах ферроиков // Известия РАН. Сер. физическая. 2004. Т. 768, № 7. С. 920–926.
7. *Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере – Шаудера // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, вып. 4. С. 3–54.
8. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.
9. *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977. 208 с.
10. *Сапронов Ю.И., Хуссаин М.А.* Угловые особенности гладких функционалов в задачах о прогибах упругих балок и зарождении нелинейных волн // Труды Воронеж. зимн. мат. школы. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2004. С. 155–167.
11. *Постников М.М.* Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971. 568 с.

УДК 517.538.52, 517.538.7

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ

Е.Н. Кондакова

Владимирский государственный университет,
кафедра функционального анализа и его приложений
E-mail: kebox@mail.ru

В работе рассматривается интерполяция посредством вещественнозначных наипростейших дробей на отрезке действительной оси. Предложены различные способы построения интерполирующих наипростейших дробей при попарно различных узлах интерполяции. Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности интерполирующих наипростейших дробей. Подробно изучается интерполяция констант; в этом случае получена оценка погрешности интерполяции по чебышевской системе узлов.

Ключевые слова: интерполяция, наипростейшие дроби.

Interpolation by the Simplest Fractions

E.N. Kondakova

Vladimir State University,
Chair of Functional Analysis and its Application
E-mail: kebox@mail.ru

The interpolation by means of real simplest fractions is considered. There are offered a different ways of intepolating simpest fractions construction with distinct real nodes. Necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of interpolating simplest fractions are received. Interpolation of constants is in detail investigated; in this case the estimation of an error of interpolation on Chebyshev's system of nodes is received.

Key words: interpolation, simplest fractions.

ВВЕДЕНИЕ

Определение. *Наипростейшей дробью* (н.д.) n-й степени называется рациональная функция вида

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad n \geq 1, \tag{1}$$

где точки $z_k \in \mathbb{C}$ — полюсы функции R_n — не обязательно геометрически различны. Таким образом, н.д. есть логарифмическая производная некоторого многочлена $Q_n(z) = C \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$, т.е. $R_n(z) = Q'_n(z)/Q_n(z)$.

Как аппарат приближения н.д., по-видимому, впервые применялись в работах [1] и [2] (аппроксимация аналитических функций в *интегральных пространствах* $L_1(G, \rho\cdot \mathrm{mes}_2)$ относительно плоской меры mes_2 с определенным весом $\rho(z)$ на ограниченных областях $G \subset \mathbb{C}$). В работе [3] предложена явная конструкция н.д., аппроксимирующих функции в *равномерной* метрике, и доказан аналог теоремы Мергеляна (т.е. всякую функцию, непрерывную на не разделяющем плоскость компакте K и аналитическую в его внутренних точках, можно сколь угодно точно аппроксимировать на K посредством н.д.). Дальнейшее развитие эта тематика получила в других работах [4–12]. Оказалось, что аппроксимативные свойства н.д. и многочленов во многом сходны. Так, при аппроксимации посредством н.д. справедливы аналоги классических теорем Джексона, Уолша. Вместе с тем имеются и существенные отличия, связанные в основном со своеобразной нелинейностью н.д. Например, операции вычитания н.д. или умножения их на не натуральное число выводят из класса н.д. Отметим также, что н.д. наилучшего равномерного приближения может быть неединственной, соответствующие примеры построены П.А. Бородиным (устное сообщение).

Аппроксимации нашли различные приложения в численном анализе и в теории потенциала [10–12]. Последнее связано с тем, что н.д. (1) задают (с точностью до постоянных множителей и операции комплексного сопряжения) плоские поля различной природы, создаваемые равновеликими источниками, расположенными в точках z_k. Задача аппроксимации здесь состоит в том, чтобы определить расположение источников z_k, создающих заранее заданное поле.

Конструкция, предложенная в [3], использует кратную интерполяцию Паде. В данной заметке изучается интерполяция посредством н.д. с *простыми* вещественными узлами. В разделе 1 предлагается несколько способов построения интерполирующих н.д. В разделе 2 рассматривается интерполяция вещественных констант на отрезке действительной оси. Основная трудность здесь возникает при оценке погрешности интерполяции, это связано с тем, что полюсы интерполирующих н.д. могут близко подступать к отрезку интерполяции или даже попадать между узлами интерполяции. В разделе 3 получены некоторые необходимые и достаточные условия существования, единственности интерполяционных н.д. Отметим, что интерполяционные н.д. не всегда существуют, а если существуют, то необязательно единственны; и для существования, и для единственности важны также свойства интерполируемой функции. Другими словами, важен выбор не только узлов, но и таблицы интерполяции.

1. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

1.1. Поскольку дробь (1) имеет n свободных параметров $\{z_k\}$, то интерполирующую н.д. естественно строить по n узлам (для многочлена степени n таких узлов $n+1$). Пусть задана таблица интерполяции (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$, с попарно различными вещественными узлами интерполяции x_k и вещественными значениями y_k. Требуется найти многочлен $Q_n(x) = x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_0$ с вещественными коэффициентами, такой что для н.д. $R_n(z) = Q'_n(z)/Q_n(z)$ выполнены условия интерполяции

$$R_n(x_k) = y_k, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Для этого перепишем условия (2) в виде $Q'_n(x_k) - y_k Q_n(x_k) = 0$ и получим систему линейных уравнений относительно неизвестных q_j:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1x_1-1 & \dots & y_1x_1^{n-1}-(n-1)x_1^{n-2} \\ y_2 & y_2x_2-1 & \dots & y_2x_2^{n-1}-(n-1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ y_n & y_nx_n-1 & \dots & y_nx_n^{n-1}-(n-1)x_n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx_1^{n-1}-y_1x_1^n \\ nx_2^{n-1}-y_2x_2^n \\ \vdots \\ nx_n^{n-1}-y_nx_n^n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Через $A_n = A_n(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ обозначим матрицу этой системы. Будем записывать систему (3) кратко в виде $A_n \cdot q = B_n$. Отсюда сразу получается

Теорема 1.1. *Решение $R_n = Q'_n/Q_n$ интерполяционной задачи* (2) *существует и единственно тогда и только тогда, когда $\det A_n \neq 0$. При этом коэффициенты многочлена Q_n получаются как решение системы* (3).

Приведем еще один способ построения интерполяционной н.д. Положим

$$D_n(x,y) := \begin{vmatrix} y_1 & y_1x_1-1 & \dots & y_1x_1^{n-1}-(n-1)x_1^{n-2} & y_1x_1^n-nx_1^{n-1} \\ y_2 & y_2x_2-1 & \dots & y_2x_2^{n-1}-(n-1)x_2^{n-2} & y_2x_2^n-nx_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_nx_n-1 & \dots & y_nx_n^{n-1}-(n-1)x_n^{n-2} & y_nx_n^n-nx_n^{n-1} \\ y & yx-1 & \dots & yx^{n-1}-(n-1)x^{n-2} & yx^n-nx^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Предположим, что главный минор a_n, находящийся в левом верхнем углу определителя (4), отличен от нуля, т.е. $a_n = \det A_n \neq 0$.

Теорема 1.2. *Если $\det A_n \neq 0$, то детерминантное уравнение $D_n(x,y) = 0$ задает единственную интерполяционную н.д. $y = R_n(x)$, удовлетворяющую условию* (2).

Доказательство. Имеем $D_n(x_k, y_k) = 0$ при всех $k = 1, \dots, n$, поскольку в определителе $D_n(x_k, y_k)$ имеется две одинаковые строки. Следовательно, все точки (x_k, y_k) лежат на кривой $D_n(x,y) = 0$. Покажем, что функция $y = R(x)$, неявно задаваемая детерминантным уравнением, является наипростейшей дробью. Разложим определитель $D_n(x,y)$ по последней строке и запишем уравнение $D_n(x,y) = 0$ в виде

$$a_1y + a_2(yx-1) + a_3(yx^2-2x) + \dots + a_n(yx^n - nx^{n-1}) = 0,$$

где a_k — алгебраические дополнения к соответствующим элементам последней строки, $a_n = \det A_n \neq 0$. Отсюда получаем

$$y = \frac{nx^{n-1} + (n-1)q_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2q_2x + q_1}{x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \dots + q_2x^2 + q_1x + q_0},$$

где $q_k = a_k/a_n$. Таким образом, детерминантное уравнение $D_n(x,y) = 0$ действительно определяет некоторую н.д. $R(x)$. Единственность следует из теоремы 1.1. □

1.2. Рассмотрим вопрос об интерполяции константы $f(x) = c = \text{const}$. В этом случае имеем $y_k = c$, и задача (2) принимает вид

$$R_n(x_k) = \frac{Q'_n(x_k)}{Q_n(x_k)} = c, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{5}$$

где многочлен $Q_n(x) = x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \dots + q_0$ требуется определить. Система (3) в данном случае принимает вид $A_nq = B_n$, где элементы матриц $A_n = (a_{k,m})$ и $B_n = (b_k)$ вычисляются по формулам

$$a_{k,m} = cx_k^{m-1} - (m-1)x_k^{m-2}, \quad b_k = nx_k^{n-1} - cx_k^n, \quad k, m = 1, \dots, n.$$

Несложно проверить, что элементарными преобразованиями столбцов определитель матрицы A_n сводится к определителю Вандермонда. При этом $\det A_n = c^n \prod\limits_{1 \le k < m \le n} (x_k - x_m)$ и, значит, $\det A_n \neq 0$. Отсюда и из теоремы 1.1 получается

Теорема 1.3. *Решение $R_n(x)$ интерполяционной задачи* (5) *при $c \neq 0$ всегда существует и единственно. При этом коэффициенты многочлена Q_n можно получить как решение системы* (3).

В случае интерполяции констант для вычисления этих коэффициентов можно получить более удобные формулы. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Коэффициенты многочлена* $Q_n(x) = x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_0$ *из задачи* (5) *вычисляются по формуле*

$$q_{n-j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k c^{k-j} \frac{(n-k)!}{(n-j)!} \sigma_k, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad \sigma_0 = 1, \tag{6}$$

где σ_k, $k = 1, \ldots, n$, *суть элементарные симметрические многочлены*

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k}. \tag{7}$$

Доказательство. Заметим, что из (5) получается тождество

$$Q_n'(x) - cQ_n(x) = -c \prod_{k=1}^{n} (x - x_k). \tag{8}$$

Перепишем его в виде

$$\sum_{k=1}^{n} x^{n-k} \left((n-k+1) q_{n-k+1} - c q_{n-k} \right) = -c \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k x^{n-k}, \qquad q_n = 1.$$

Далее, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем рекуррентное соотношение между коэффициентами многочлена Q_n:

$$q_n = 1, \quad q_{n-j} = c^{-1}(n-j+1) q_{n-j+1} + (-1)^j \sigma_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Отсюда последовательно находим

$$q_{n-1} = c^{-1}(nq_n - c\sigma_1) = c^{-1}n - \sigma_1, \quad q_{n-2} = c^{-2}n(n-1) - c^{-1}\sigma_1(n-1) + \sigma_2,$$

и, вообще, $q_{n-j} = c^{-j} n(n-1)\ldots(n-j+1) + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k c^{k-j} (n-k)\ldots(n-j+1)\sigma_k, \quad j = \overline{1,n}.$
Тем самым формула (6) доказана. □

В заключение приведем еще одну формулу для вычисления $Q_n(x)$, которая легко получается как решение дифференциального уравнения (8):

$$Q_n(x) = -c \left(\int_0^x e^{-ct} P(t) dt + q_0 \right) e^{cx}, \quad P(t) = (t - x_1) \cdots (t - x_n), \tag{10}$$

где параметр q_0 подбирается так, что выражение $Q_n(x)$ в (10) не содержит экспонент. А именно $q_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \sigma_k (n-k)! c^{k-n-1}$.

Если, в частности, узлы x_k являются корнями многочлена Чебышева, то $P(t) = 2^{1-n}\cos(n \arccos t)$, и из (10) получаем

$$Q_1(x) = x + \frac{1}{c}, \qquad Q_2(x) = x^2 + \frac{2}{c}x + \frac{2}{c^2} - \frac{1}{2}, \qquad Q_3(x) = x^3 + \frac{3}{c}x^2 + \left(\frac{6}{c^2} - \frac{3}{4} \right) x + \left(\frac{6}{c^3} - \frac{3}{4c} \right)$$

и т.д.

2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КОНСТАНТ

Хорошо известно, что чебышевская система узлов $\{x_k\}$ является в определенном смысле наилучшей в случае интерполяции многочленами [13]. Используем ее для интерполяции константы $f(x) = c$ посредством н.д. на отрезке $[-1, 1]$. Итак, пусть узлы $x_k \in [-1, 1]$ являются нулями многочлена Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, т.е.

$$2^{1-n}T_n(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n), \quad x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n}(-1+2k)\right), \quad k=1,\ldots,n.$$

Через $R_n(x)$ обозначим интерполяционную н.д. и положим

$$\rho_n(x) = R_n(x) - c = \frac{Q_n'(x) - cQ_n(x)}{Q_n(x)},$$

где $Q_n(x) = x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_0$. Тогда, очевидно,

$$\rho_n(x) = -c\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(x-x_k)}{Q_n(x)} = -\frac{c}{2^{n-1}}\frac{T_n(x)}{Q_n(x)}. \tag{11}$$

Теорема 2.1. *Пусть c — положительная постоянная, $0 < c < 15/31$. Тогда погрешность интерполяции этой постоянной посредством н.д. по чебышевской системе узлов оценивается следующим образом:*

$$\|\rho_n\| \le \frac{c}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{|Q_n(-1)|} < \frac{c}{2^{2n-1}n!} \cdot \frac{1-c}{1-2c}, \quad n \ge 2. \tag{12}$$

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 2.1. *Если $Q_n(-1) \ge a2^{1-n}$ с произвольной постоянной $a > 1$, то функция $Q_n(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[-1,1]$.*

Доказательство. Если выполнено предположение леммы, то, переписав равенство (11) в виде

$$Q_n'(x) = cQ_n(x) - c2^{1-n}T_n(x), \tag{13}$$

получим $Q_n'(-1) \ge cQ_n(-1) - c2^{1-n} \ge c(a-1)2^{1-n} = 2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Выберем величину $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, такую что $|Q_n'(x) - Q_n'(y)| \le \varepsilon$ при всех $x, y \in [-1,1]$ с $|x-y| \le \delta$. Пусть натуральное N удовлетворяет условию $2N^{-1} \le \delta$. Разобьем отрезок $[-1,1]$ на N равных отрезков

$$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], \quad x_0 = -1, \quad x_k = -1 + 2\,k\,N^{-1}, \quad k=1,\ldots,N.$$

Пусть $x \in \Delta_1$. Тогда из неравенств $Q_n'(x_0) = Q_n'(-1) \ge 2\varepsilon$ и $|Q_n'(x_0) - Q_n'(x)| \le \varepsilon$ находим

$$Q_n'(x) \ge Q_n'(x_0) - |Q_n'(x_0) - Q_n'(x)| \ge 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0.$$

Таким образом, $Q_n'(x) > 0$ на Δ_1 и, значит, функция $Q_n(x)$ возрастает на Δ_1. Отсюда получаем, что $Q_n(x_1) > Q_n(x_0) \ge a2^{1-n}$ и из (13) получаем оценку $Q_n'(x_1) \ge cQ_n(x_1) - c2^{1-n} \ge c(a-1)2^{1-n} = 2\varepsilon$. Дословно повторив предыдущее рассуждение для $x \in \Delta_2$, получим, что

$$Q_n'(x) \ge Q_n'(x_1) - |Q_n'(x_1) - Q_n'(x)| \ge 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0.$$

Так что и на Δ_2 производная $Q_n'(x)$ положительна, и функция $Q_n(x)$ возрастает. Повторив аналогичную процедуру N раз, придем к заключению леммы 2.1. $\square$

Лемма 2.2. *При $0 < c < 1/2$ имеет место неравенство*

$$Q_n(-1) > \frac{1-2c}{1-c}n!c^{-n} > \frac{1-2c}{1-c}n!2^n > 0. \tag{14}$$

Доказательство. Положим $T(x) = 2^{1-n}T_n(x)$. Тогда из равенства (13) последовательно получаем

$$Q_n'(x) = cQ_n(x) - cT(x), \quad Q_n''(x) = c^2Q_n(x) - c^2T(x) - cT'(x)$$

и, наконец, $Q_n^{(n)}(x) = n! = c^nQ_n(x) - c^nT(x) - c^{n-1}T'(x) - \ldots - cT^{(n-1)}(x)$. Отсюда находим

$$Q_n(-1) \ge n!c^{-n} - \sum_{k=0}^{n-1} c^{-k}|T^{(k)}(-1)|. \tag{15}$$

Для оценки суммы в (15) воспользуемся неравенством В.А. Маркова [14] для max-нормы на отрезке $[a,b]$ производной многочлена P степени n, ограниченного на $[a,b]$ некоторой величиной M:

$$\|P^{(k)}\| \le \frac{M\,2^k}{(b-a)^k}\frac{2^k k!}{(2k)!}n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(k-1)^2) = \frac{M\,2^k}{(b-a)^k}\frac{2^k k!}{(2k)!}\frac{n(n+k-1)!}{(n-k)!}.$$

В нашем случае имеем $[a,b]=[-1,1]$, $P=T$, $M=2^{1-n}$ и, следовательно,

$$|T^{(k)}(-1)| \le c^k a_k, \qquad a_k := c^{-k}2^k\frac{n}{2^{n-1}}\frac{k!}{(2k)!}\frac{(n+k-1)!}{(n-k)!}.$$

Пусть $0<c<1$. Тогда

$$a_{n-1} = c^{-n+1}n!, \quad \frac{a_k}{a_{k+1}} = c\frac{2k+1}{n^2-k^2} \le c < 1, \quad k=0,\dots,n-2, \tag{16}$$

откуда $a_{n-2} \le ca_{n-1}$, $a_{n-3} \le c^2 a_{n-1}$, и, вообще, $a_k \le c^{n-k-1}a_{n-1}$. Отсюда с учетом того, что $a_{n-1}=c^{-n+1}n!$, получаем

$$Q_n(-1) \ge n!c^{-n} - \sum_{k=0}^{n-1}a_k \ge n!c^{-n} - a_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}c^{n-k-1} > n!c^{-n} - \frac{c}{1-c}\,n!c^{-n} = \frac{1-2c}{1-c}\,n!\,c^{-n} > 0,$$

что и доказывает лемму 2.2. □

Доказательство теоремы 2.1. Заметим, что при $0<c<15/31$ и $n\ge 2$ выполнение условия леммы 2.1 следует из первого неравенства в (14). Поэтому утверждение теоремы 2.1 сразу получается из (11) и лемм 2.1 и 2.2:

$$|\rho_n(x)| \le \frac{c}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{|Q_n(x)|} \le \frac{c}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{|Q_n(-1)|} < \frac{c}{2^{2n-1}n!}\cdot\frac{1-c}{1-2c}. \quad \square$$

Теорема 2.2. *Пусть $0<c<1/2$. Тогда все полюсы интерполяционной н.д. $R_n(x)$, $n\ge 2$, лежат вне круга $|z|<1$.*

Доказательство. Воспользуемся следующей оценкой корней многочлена.

Теорема (Энестрём – Какейя, [15]). *Если коэффициенты многочлена $Q_n(x)=x^n+q_{n-1}x^{n-1}+ +\ldots+q_0$ строго положительны, то все его корни лежат в кольце*

$$\min_{k=0,\dots,n-1}\frac{q_k}{q_{k+1}} \le |z| \le \max_{k=0,\dots,n-1}\frac{q_k}{q_{k+1}}, \quad q_n=1.$$

Нам понадобится только первая оценка. Достаточно показать, что все коэффициенты q_j многочлена Q_n из (11) положительны и $\delta_j := q_{n-j}/q_{n-j+1} > 1$, $j=1,\dots,n$, $q_n=1$. Воспользуемся формулой (6). Для этого заметим, что поскольку многочлены $T_n(x)$ являются либо четными, либо нечетными функциями, то

$$T(x) = 2^{1-n}T_n(x) = x^n + \sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}\sigma_{2j}x^{n-2j},$$

где $[\cdot]$ — целая часть. Поэтому симметрические многочлены σ_k (7) от корней x_k многочлена T с нечетными номерами равны нулю. С учетом этого формула (6) принимает вид

$$q_{n-j} = c^{-j}\frac{n!}{(n-j)!} + \sum_{k=1}^{[\frac{j}{2}]}c^{2k-j}\frac{(n-2k)!}{(n-j)!}\sigma_{2k}, \qquad j=1,\dots,n.$$

Учтем, что все $|x_k|<1$, тогда из (7) получаются неравенства $|\sigma_k|<C_n^k$ (биномиальные коэффициенты). Поэтому при $0<c<1$ и при всех $j=1,\dots,n$ имеем

$$q_{n-j} > c^{-j}\frac{n!}{(n-j)!}\left(2-\sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]}\frac{c^{2k}}{(2k)!}\right) > c^{-j}\frac{n!}{(n-j)!}\,(2-\operatorname{ch}c) > 0. \tag{17}$$

Теперь докажем, что $\delta_j > 1$, $j = 0, \dots, n$. Воспользуемся рекуррентными соотношениями (9). При нечетных $j = 2m + 1$ имеем $\sigma_j = 0$ и, следовательно, при $0 < c < 1/2$ из (9) получаем: $\delta_j = (n - j + 1)c^{-1} > 2$. Пусть теперь $j = 2m$. Тогда из (17) и из неравенств $|\sigma_j| < C_n^j$ получаем

$$\delta_j = \frac{n-j+1}{c} + \frac{\sigma_j}{q_{n-j+1}} > \frac{n-j+1}{c} - \frac{C_n^j\,(n-j+1)!\,c^{j-1}}{n!\,(2-\operatorname{ch} c)} =$$

$$= (n-j+1)\left(\frac{1}{c} - \frac{c^{j-1}}{j!\,(2-\operatorname{ch} c)}\right) = (n-j+1)F_j(c).$$

При $j = 2$ имеем $F_2(c) \ge F_2(1/2) > 1$, отсюда $\delta_2 = (n-1)F_2(c) > (n-1) \ge 1$. Из того, что функция $F_j(c)$ возрастает с ростом $j \ge 2$, находим $\delta_j > 1 \cdot F_j(c) \ge F_2(c) > 1$. □

3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ Н.Д.

Рассмотрим сначала пример интерполяции с таблицей (x_1, y_1), (x_2, y_2). В силу теоремы 1.1 соответствующая интерполяционная н.д. $R_2(x)$ существует и единственна тогда и только тогда, когда определитель $d(x_1, y_1, x_2, y_2) = \det A_2$ отличен от нуля, где

$$A_2 = A_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 & y_1x_1 - 1 \\ y_2 & y_2x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $d(x_1, y_1, x, y) = 0$ определяет н.д. $y = (x + 1/y_1 - x_1)^{-1}$. Значит, если выбрать вторую точку (x_2, y_2), не лежащей на графике этой н.д., то существует единственная интерполяционная н.д. $R_2(x)$. В противном случае, возможны две ситуации: либо интерполяционных н.д. бесконечно много, либо не существует ни одной. Эти случаи возникают, когда система уравнений $A_2q = B_2$ (3) имеет бесконечно много решений или не имеет их вообще.

Пример. Для таблицы $(0, -2)$, $(1, 2)$ существует бесконечно много различных интерполяционных н.д. второго порядка. Они имеют вид

$$R_2(b; x) = 2\frac{x - b}{x^2 - 2bx + b},$$

где b — произвольный отличный от нуля параметр. Здесь не выполнено условие теоремы 1.1 поскольку $d(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$, то есть вторая точка таблицы лежит на графике $y = (x - 1/2)^{-1}$, проходящем через первую точку. Кроме того, система уравнений $A_2q = B_2$ имеет бесконечно много решений. Если же взять на этом графике вместо $(1, 2)$ любую другую точку (x_2, y_2), то интерполяционных н.д. вообще не существует, так как указанная система не имеет решений.

Перейдем к случаю произвольного n.

Определение. Таблица интерполяции (x_k, y_k), $k = 1, \dots, n$, с попарно различными узлами x_k называется *допустимой*, если через точки $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ проходит график единственной интерполяционной н.д. $y = R_n(x)$. Другими словами, допустимая таблица удовлетворяет условию существования и единственности теоремы 1.1.

Пусть задана допустимая таблица интерполяции (x_k, y_k), $k = 1, \dots, n$. Тогда по теореме 1.2 детерминантное уравнение $D_n(x, y) = 0$ определяет единственную интерполяционную н.д. $y = R_n(x)$. Выберем какую-либо новую точку (x_{n+1}, y_{n+1}), не лежащую на графике этой н.д. Тогда $D_n(x_{n+1}, y_{n+1}) \ne 0$, или, что то же самое, $\det A_{n+1} \ne 0$, где $A_{n+1} = A_{n+1}(x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1})$ (см. обозначение после системы (3). По теореме 1.1 новая таблица (x_k, y_k), $k = 1, \dots, n+1$, также является допустимой.

Пусть теперь точка (x_{n+1}, y_{n+1}) лежит на графике $y = R_n(x)$, т.е. $\det A_{n+1} = 0$. Тогда система уравнений (3) (где следует заменить n на $n+1$) по критерию Кронекера – Капелли [16] либо имеет бесконечно много решений, если ранги расширенной матрицы и матрицы A_{n+1} равны, либо, в противном случае, не имеет их вовсе.

Сравним ранги. Поскольку таблица (x_k, y_k), $k = 1, \dots, n$, является допустимой, то ранг матрицы A_{n+1} равен n. Поэтому ранг расширенной матрицы системы (3) (где следует заменить n на $n+1$) равен n, если и только если равен нулю определитель матрицы

$$D^*_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})=\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_1x_1^{n-1}-(n-1)x_1^{n-2} & (n+1)x_1^n-y_1x_1^{n+1}\\ y_2 & \dots & y_2x_2^{n-1}-(n-1)x_2^{n-2} & (n+1)x_2^n-y_2x_2^{n+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & \dots & y_nx_n^{n-1}-(n-1)x_n^{n-2} & (n+1)x_n^n-y_nx_n^{n+1}\\ y_{n+1} & \dots & y_{n+1}x_{n+1}^{n-1}-(n-1)x_{n+1}^{n-2} & (n+1)x_{n+1}^n-y_{n+1}x_{n+1}^{n+1}\end{pmatrix}.$$

Значит, для существования бесконечного числа интерполяционных н.д. степени $n+1$ для таблицы (x_k,y_k), $k=1,\dots,n+1$, необходимо и достаточно, чтобы новая точка (x_{n+1},y_{n+1}) удовлетворяла уравнению $\det D^*_{n+1}(x,y)=0$. Как и в теореме 1.2 доказывается эквивалентность

$$\det D^*_{n+1}(x,y)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y=R^*_{n+1}(x), \tag{18}$$

где $R^*_{n+1}(x)$ есть некоторая н.д. степени $n+1$.

Из предыдущих рассуждений получается

Теорема 3.1. *Пусть (x_k,y_k), $k=1,\dots,n$, является допустимой таблицей интерполяции.*

Новая таблица (x_k,y_k), $k=1,\dots,n+1$, является допустимой тогда и только тогда, когда точка (x_{n+1},y_{n+1}) не лежит на графике интерполяционной н.д. $y=R_n(x)$, построенной по первоначальной таблице (x_k,y_k), $k=1,\dots,n$.

Для новой таблицы (x_k,y_k), $k=1,\dots,n+1$, существует бесконечно много интерполяционных н.д. R_{n+1} тогда и только тогда, когда точка (x_{n+1},y_{n+1}) лежит на пересечении двух графиков $y=R_n(x)$ и $y=R^*_{n+1}(x)$ (см. (18)).

Для новой таблицы (x_k,y_k), $k=1,\dots,n+1$, не существует ни одной интерполяционной н.д. R_{n+1} тогда и только тогда, когда точка (x_{n+1},y_{n+1}) лежит на графике $y=R_n(x)$, но не лежит на графике $y=R^*_{n+1}(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП РНПВШ (*рег. номер* 2.1.1/5568) *и гранта РФФИ* (*проект* 08-01-00648).

Библиографический список

1. *Chui C.K.* On approximation in the Bers spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. Т. 40. С. 438–442.

2. *Chui C.K., Shen X.C.* Order of approximation by electrostatic fields due to electrons // Constr. Approx. 1985. Т. 1. С. 121–135.

3. *Данченко В.И., Данченко Д.Я.* О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы школы-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д.Ф.Егорова. Казань, 1999. С. 74–77.

4. *Долженко Е.П.* Наипростейшие дроби // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы V Казанск. междунар. летней школы-конф. Казань, 2001. С. 90–94.

5. *Косухин О.Н.* Об аппроксимативных свойствах наипростейших дробей // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 4. С. 54–58.

6. *Бородин П.А.* Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 803–810.

7. *Бородин П.А., Косухин О.Н.* О приближении наипростейшими дробями на действительной оси // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 1. С. 3–8.

8. *Данченко В.И., Данченко Д.Я.* О приближении наипростейшими дробями // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 4. С. 553–559.

9. *Данченко В.И.* Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum\limits_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Мат. заметки. 2008. Т. 83, № 5. С. 643–649.

10. *Данченко В.И.* Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 4. С. 33–52.

11. *Фрянцев А.В.* О численной аппроксимации дифференциальных полиномов // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып 2. С. 39–43.

12. *Фрянцев А.В.* О полиномиальных решениях линейных дифференциальных уравнений // УМН. 2008. Т. 63, № 3(381). С. 149–150.

13. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1963. 660 с.

14. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2005. 512 с.

15. *Прасолов В.В.* Многочлены. М.:Физматлит, 2002. 453 с.

16. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2004. 432 с.