УДК 513.6

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЛЕРЕ – СЕРРА ТОЛЕРАНТНОГО КВАЗИРАССЛОЕНИЯ ТОЛЕРАНТНЫХ ПУТЕЙ

Е.В. Коробченко, С.И. Небалуев

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел.
E-mail: KorobchenkoEV@mail.ru, NebaluevSI@yandex.ru

В статье построена гомологическая спектральная последовательность Лере – Серра толерантного квазирасслоения толерантных путей и вычислены первые два члена этой последовательности.

Ключевые слова: толерантное пространство, толерантное квазирасслоение, спектральная последовательность.

Leray – Serra Spectral Sequence for Tolerant Quasifibering of Tolerant Ways

E.V. Korobchenko, S.I. Nebaluev

Saratov State University,
Chair of Computer Algebra and the Theory of Numbers
E-mail: KorobchenkoEV@mail.ru, NebaluevSI@yandex.ru

The article constructs Leray – Serra homological spectral sequence for tolerant quasifibering of tolerant ways and computes the two first members of this sequence.

Key words: tolerant spaces, tolerant quasifibering, spectral sequence.

Толерантное пространство (*Т-пространство*) по определению Зимана [1] — это пара (X,τ), где X — множество, а $\tau \subset X \times X$ — рефлексивное и симметричное отношение, называемое *отношением толерантности*. Отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\theta)$ Т-пространств называется *толерантным* (*Т-отображением*), если из $x_1\tau x_2$ следует $f(x_1)\theta f(x_2)$. К настоящему времени имеется достаточно развитая гомологическая и гомотопическая теория Т-пространств (см. [2]).

В гомотопической толерантной теории гомотопические параметры берутся из толерантных отрезков (I_m,ι_m) длины m $(m\in\mathbb{N})$, в которых $I_m=\left\{\frac{k}{m}\,\middle|\, k=\overline{0,m}\right\}$, $\frac{k}{m}\iota_m\frac{l}{m}\Longleftrightarrow|k-l|\leqslant 1$.

Т-отображения $f_0,f_1:(X,\tau)\to(Y,\theta)$ называются *толерантно гомотопными относительно подмножества* $A\subset X$, что записывается как $f_0\sim f_1(relA)$, если существуют $n\in\mathbb{N}$ и Т-отображение $F:(X\times I_n,\tau\times\iota_n)\to(Y,\theta)$ такие, что: 1) $(\forall\ x\in X)\ F(x,0)=f_0(x)$, $F(x,1)=f_1(x)$, 2) $(\forall\ x\in A)(\forall\ k=\overline{0,n})\ F\left(x,\frac{k}{n}\right)=f_0(x)$.

Если $n=1$, то Т-отображения f_0,f_1 называются просто *толерантно гомотопными* и записываются $f_0\approx f_1(relA)$, или $f_0\approx f_1$ при $A=\emptyset$.

Всякое Т-отображение $\omega_m:(I_m,\iota_m)\to(X,\tau)$ называется *толерантным путем* (*Т-путем*) в пространстве (X,τ) длины m с началом в точке $\omega_m(0)$ и с концом в точке $\omega_m(1)$. Если $\omega_m(0)=\omega_m(1)=x_0$, то Т-путь ω_m называется *Т-петлей* с вершиной в отмеченной точке $x_0\in X$. Символом $(\varepsilon_x)_m$ обозначим постоянный Т-путь длины m такой, что для всех $k=\overline{0,m}$ выполняется $(\varepsilon_x)_m\left(\frac{k}{m}\right)=x$. Если $x=x_0$ — отмеченная точка (X,τ), то сократим запись $(\varepsilon_{x_0})_m=\varepsilon_m$.

Обозначим $P(X,x_0)$ — множество Т-путей пространства (X,τ) с началом в точке $x_0\in X$, $\Omega(X,x_0)$ — множество Т-петель пространства (X,τ) с вершиной в x_0, $CP(X,x_0)=C\Omega(X,x_0)$ — множество постоянных Т-путей.

Если ω_m и ω'_n — Т-пути в (X,τ) такие, что $\omega_m(1)=\omega'_n(0)$, то обозначим через $\omega_m*\omega'_n$ Т-путь длины $m+n$ такой, что

$$\omega_m*\omega'_n\left(\frac{k}{m+n}\right)=\begin{cases}\omega_m(k/m), & k=\overline{0,m},\\ \omega'_n((k-m)/n), & k=\overline{m,m+n}.\end{cases}$$

Определим толерантность $\varkappa$ на множестве Т-путей $P(X,x_0)$:

$$\omega_m\varkappa\,\omega'_n \quad \text{при} \quad n\geqslant m \iff (\exists\ \gamma'_m\in P(X,x_0))\quad \omega'_n=\varepsilon_{n-m}*\gamma'_m,\quad \omega_m\approx\gamma'_m.$$

Если Т-пространство (X,τ) линейно связное, тогда $(P(X,x_0),\varkappa)$ является толерантно стягиваемым, и потому линейно связным. Если (X,τ) — линейно связное и односвязное Т-пространство, т. е. фундаментальная группа $\pi(X,x_0)$ тривиальна, то $(\Omega(X,x_0),\varkappa)$ — линейно связное Т-пространство.

Т-отображение $p : (P(X, x_0), \varkappa) \to (X, \tau)$ такое, что $p(\omega_m){=}\omega_m(1)$, назовем *толерантным квазирасслоением Т-путей*. Так как отображение p обладает следующим свойством (см. [3]): для любого Т-пространства (Y, θ) и любых Т-отображений $F : (Y \times I_M, \theta \times \iota_M)$, $\overline{f} : (Y, \theta) \to (P(X, x_0), \varkappa)$ таких, что $(\forall\ y \in Y)\ F(y, 0) = p \circ \overline{f}(y)$, существует Т-отображение $\overline{F} : Y \times I_M, \theta \times \iota_M) \to (P(X, x_0), \varkappa))$ такое, что $p \circ \overline{F} = F$, $(\forall\ y \in Y)\ \overline{F}(y, 0) = \overline{f}(y) * (\varepsilon_{p\circ\overline{f}(y)})_M = \overline{f}(y) * (\varepsilon_{F(y,0)})_M$.

Слоем квазирасслоения p над точкой $x_0 \in X$ является Т-пространство Т-петель $(\Omega(X, x_0), \varkappa)$. Как было указано выше, если пространство (X, τ) линейно связное, то Т квазирасслоение p имеет линейно связные базу, слой и пространство квазирасслоения.

Т-пространства $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}})$, где $I_{\overline{m}} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i}$, $\iota_{\overline{m}} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \iota_{m_i}$, называются *Т-кубами* размерности n и размера $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n)$. Любое Т-отображение $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X, \tau)$ называется *толерантным сингулярным кубом* (*ТС-кубом*) в пространстве (X, τ). ТС-куб u называется *пунктированным*, если $u|(\overset{n}{\times}\{0,1\}) = x_0$. ТС-куб $w : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (P(X, x_0), \varkappa)$ называется *Ω-пунктированным*, если $w|(\overset{n}{\times}\{0,1\}) \subset \Omega(X, x_0)$. С помощью ТС-кубов строятся толерантные кубические сингулярные гомологии (ТКС-гомологии) Т-пространств естественно изоморфные гомологиям Зимана. При этом доказывается (см. [4]), что для линейно связных Т-пространств ТКС-гомологии не зависят от пунктированности ТС-кубов.

Определение 1. n-мерный ТС-куб $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X, \tau)$ *имеет вырожденность* t, $0 \leqslant t \leqslant n$, если u вырожден по последним t аргументам, т. е. $(\forall\ k_i = \overline{0, m_i},\ i = \overline{1, n})\ u\big(\frac{k_1}{m_1}, \dots, \frac{k_n}{m_n}\big) = u\big(\frac{k_1}{m_1}, \dots, \frac{k_{n-t}}{m_{n-t}}, 0 \dots, 0\big)$, $(n-t)$-мерный куб $u|_{k_{n-t+1}=\dots=k_n=0}$ невырожден по последнему аргументу.

Определение 2. n-мерный ТС-куб $w : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (P(X, x_0), \varkappa)$ *имеет вес* $\nu(w) = s$, если ТС-куб $p \circ w$ в пространстве (X, τ) имеет вырожденность $t = n - s$.

Имеют место свойства

$$0 \leqslant \nu(w) \leqslant n = \dim\, w, \tag{1}$$

$$(\forall\ j = \overline{1, \nu(w)})(\forall\ \varepsilon = \overline{0, 1}) \quad \nu(d_j^\varepsilon(w)) < \nu(w), \tag{2}$$

$$(\forall\ j = \overline{\nu(w) + 1, n})(\forall\ \varepsilon = \overline{0, 1}) \quad \nu(d_j^\varepsilon(w)) = \nu(w), \tag{3}$$

где $d_j^\varepsilon(w) = w|_{k_j = \varepsilon m_j}$.

Пусть $w : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (P(X, x_0), \varkappa)$ — n-мерный Ω-пунктированный ТС-куб такой, что $\nu(w) \leqslant s \leqslant$ $\leqslant n$, $t = n - s$. Определим два новых ТС-куба: $\mathcal{B}_s(w) : (I_{(m_1,\dots,m_s)}, \iota_{(m_1,\dots,m_s)}) \to (X, \tau)$ — пунктированный ТС-куб, $\mathcal{F}_s(w) : (I_{(m_{s+1},\dots,m_n)}, \iota_{(m_{s+1},\dots,m_n)}) \to (\Omega(X, x_0), \varkappa)$, $\mathcal{B}_s(w){=}(p \circ w)|_{k_{s+1}=\dots=k_{s+t}=0}$, $\mathcal{F}_s(w){=}w|_{k_1=\dots=k_s=0}$. Если $w : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (P(X, x_0), \varkappa)$ — ТС-куб такой, что все Т-пути $w\Big(\big(\frac{k_i}{m_i}\big)_{i=\overline{1,n}}\Big)$ имеют общий конец, совпадающий с началом Т-пути α в простарнстве (X, τ), тогда через $w * \alpha$ обозначим ТС-куб такой, что $w * \alpha\Big(\big(\frac{k_i}{m_i}\big)_{i=\overline{1,n}}\Big) = w\Big(\big(\frac{k_i}{m_i}\big)_{i=\overline{1,n}}\Big) * \alpha$.

Теорема 1. *Пусть (X, τ) —линейно связное и односвязное Т-пространство и пусть*

$u : \Big(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} I_{m_i(u)}, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} \iota_{m_i(u)}\Big) \to (X, \tau)$ *— произвольный пунктированный ТС-куб,*

$v : \Big(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{m^{(j)}(v)}, \mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} \iota_{m^{(j)}(v)}\Big) \to (\Omega(X, x_0), \varkappa)$ *— произвольный ТС-куб.*

Тогда существует Ω-пунктированный ТС-куб

$$w = W(u, v) : \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} I_{m_i(u)} \times \mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{m^{(j)}(v)}, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} \iota_{m_i(u)} \times \mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} \iota_{m^{(j)}(v)}\right) \to (P(X, x_0), \varkappa)$$

такой, что

1) $\nu(w) \leqslant s$,

2) $\mathcal{B}_s(w) = u$,

3) $\mathcal{F}_s(w) = v * \varepsilon_M(u)$, *где $\varepsilon_{M(u)}$ — постоянный Т-путь в точке $x_0 \in X$ длины $M(u) = \sum\limits_{i=1}^{s} m_i(u)$,*

4) $(\forall\ j = \overline{1, t})(\forall \varepsilon = \overline{0, 1}) \quad d_{s+j}^\varepsilon(w) = W(u, d_j^\varepsilon(v))$,

5) *если v — вырожденный ТС-куб, то w — вырожденный ТС-куб.*

Доказательство. Обозначим для краткости $\overline{k}{=}(k_1, \dots, k_s)$, $k_i = \overline{0, m_i}$, $i = \overline{1, s}$; $x^{\overline{k}}{=}$ $= u\big(\frac{k_1}{m_1(u)}, \dots, \frac{k_s}{m_s(u)}\big)$. Если же $\overline{k} = (k_1, \dots, k_r, 0, \dots, 0)$, $r \leqslant s$, то примем еще более короткую запись

$x^{(k_1,\ldots,k_r)}{=}x^{(k_1,\ldots,k_r,0,\ldots,0)}$. Для каждого $\overline{k}=(k_1,\ldots,k_s)$ построим Т-путь $\alpha^{\overline{k}}=\alpha^{(k_1,\ldots,k_s)}$ в пространстве (X,τ) длины $M(u)=\sum\limits_{i=1}^{s} m_i(u)$, соединяющий точку $u(0,\ldots,0)=x_0=x^{(0)}$ с точкой $x^{\overline{k}}$. Т-путь α зададим последовательностью всех точек его траектории:

$$x_0=x^{(0)},x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k_1)},\underbrace{x^{(k_1)},\ldots,x^{(k_1)}}_{m_1(u)-k_1},x^{(k_1,1)},x^{(k_1,2)},\ldots,x^{(k_1,k_2)},\underbrace{x^{(k_1,k_2)},\ldots,x^{(k_1,k_2)}}_{m_2(u)-k_2},\ldots$$
$$\ldots,x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},1)},x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},2)},\ldots,x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},k_s)},\underbrace{x^{\overline{k}},\ldots,x^{\overline{k}}}_{m_s(u)-k_s}.$$

Искомый ТС-куб $w=W(u,v)$ определим формулой

$$w\Big(\tfrac{k_1}{m_1(u)},\ldots,\tfrac{k_s}{m_s(u)},\tfrac{k_1}{m^{(1)}}(v),\ldots,\tfrac{k^{(t)}}{m_t(v)}\Big){=}v\Big(\tfrac{k_1}{m_1(v)},\ldots,\tfrac{k_t}{m_t(v)}\Big)*\alpha^{(k_1,\ldots,k_s)}. \quad \square$$

Рассмотрим произвольный Ω-пунктированный ТС-куб

$$w:\left(\mathop{\times}_{i=1}^{s+t} I_{m_i(w)},\mathop{\times}_{i=1}^{s+t}\iota_{m_i(w)}\right)\to(P(X,x_0),\varkappa)$$

такой, что $\nu(w)\leqslant s$.

Примем следующие обозначения: $u=\mathcal{B}_s(w):\left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} I_{m_i},\mathop{\times}\limits_{i=1}^{s}\iota_{m_i}\right)\to(X,\tau)$, $m_i=m_i(w)$, $i=\overline{1,s}$, $v=\mathcal{F}_s(w):\left(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{m^{(j)}},\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t}\iota_{m^{(j)}}\right)\to(\Omega(X,x_0),\tau)$, $m^{(j)}=m_{j+s}(w)$, $j=\overline{1,t}$, $\overline{\overline{k}}=(k_1,\ldots,k_s,k^{(1)},\ldots,k^{(t)})$, $\overline{k}=(k_1,\ldots,k_s)$, $\overset{*}{k}=(k^{(1)},\ldots,k^{(t)})$, $k_i=\overline{0,m_i}$, $i=\overline{1,s}$, $k^{(j)}=\overline{0,m^{(j)}}$, $j=\overline{1,t}$, $w^{\overline{\overline{k}}}=w\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_s}{m_s},\frac{k_1}{m^{(1)}},\ldots,\frac{k^{(t)}}{m_t}\right)$, $N(\overline{\overline{k}})$ — длина Т-пути $w^{\overline{\overline{k}}}$, $N(w)=\max\limits_{\overline{\overline{k}}}\{N(\overline{\overline{k}})\}$.

Теорема 2. *Для произвольного $(s+t)$-мерного Ω-пунктированного ТС-куба w такого, что $\nu(w)\leqslant s$ и для любого натурального числа $N\geqslant N(w)$ найдется Ω-пунктированный ТС-куб.*

$$\mathcal{D}_s(w,N):\left(\mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{m_i}\times I_{M(N,u)}\times\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{m^{(j)}},\mathop{\times}_{i=1}^{s}\iota_{m_i}\times\iota_{M(N,u)}\times\mathop{\times}_{j=1}^{t}\iota_{m^{(j)}}\right)\to(P(X,x_0),\varkappa)$$

такой, что

1) $\nu(\mathcal{D}_s(w,N))\leqslant s$,
2) $\mathcal{B}_s(\mathcal{D}_s(w,N))=\mathcal{B}_s(w)=u$,
3) $(\forall\ l=\overline{0,M(N,u)})$ *все Т-петли* $\mathcal{D}_s(w,N))|_{\overline{k}=0}(l,\overset{*}{k})$ *имеют вид*

$$\varepsilon_{d_1(l)}*v^{\overset{*}{k}}*\varepsilon_{d_2(l)},\qquad d_1(l),d_2(l)\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

4) $d^0_{s+1}(\mathcal{D}_s(w,N))=w$, $d^1_{s+1}(\mathcal{D}_s(w,N))=W(u,v)$,
5) $(\forall\ j\geqslant s)(\forall\ \varepsilon=\overline{0,1})$ $N(d^\varepsilon_j(w))\leqslant N(w)$, $d^\varepsilon_{j+1}(\mathcal{D}_s(w,N))=\mathcal{D}(d^\varepsilon_j(w),N)$,
6) $t>0$, *w — вырожденный ТС-куб $\Longrightarrow\mathcal{D}_s(w,N)$ — вырожденный ТС-куб.*

Доказательство. Построение искомого $(s+t+1)$-мерного ТС-куба $\mathcal{D}_s(w,N)$ заключается в построении последовательности $M(N,u)$ штук $(s+t)$-мерных ТС-кубов таких, что каждый последующий ТС-куб просто толерантно гомотопен предыдущему. Начнем с ТС-куба w и определим следующий ТС-куб ${}^+w$ формулой

$$({}^+w)^{\overline{\overline{k}}}{=}\varepsilon_{M(u)+N-N(\overline{\overline{k}})}*w^{\overline{\overline{k}}},\qquad M(u)=\sum_{i=1}^{s}m_i.$$

Имеет место простая Т-гомотопность ТС-кубов: $w\approx^+ w$.

Каждое значение параметра $l=\overline{0,N\cdot M(u)}$ представим в виде

$$l=q\cdot N+r,\qquad q=\overline{0,M(u)},\qquad r=\overline{0,N-1},$$

и определим последовательность ТС-кубов ${}^{(l)}w,l=\overline{0,N\cdot M(u)}$,

$$({}^{(l)}w)^{\overline{\overline{k}}}:=\varepsilon_{M(u)-(q+1)+N-N(\overline{\overline{k}})}*\mu_r(w^{\overline{\overline{k}}})*(\varepsilon_{x^{\overline{k}}})_q,\tag{4}$$

где $x^{\overline{k}} = u\left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_s}{m_s}\right)$, $\mu_r(\gamma_m)$ для произвольного Т-пути γ_m длины $m \geqslant r$ представляет собой Т-путь длины $m+1$ такой, что

$$\mu_r\left(\frac{k}{m+1}\right) = \begin{cases} \gamma_m\left(\frac{k}{m}\right), & k = \overline{0, r}, \\ \gamma_m\left(\frac{k-1}{m}\right), & k = \overline{r+1, m+1}. \end{cases}$$

Из (4) получаем, что

$${}^{(0)}w =^{+} w, \qquad {}^{(N\cdot M(u))}w{=}w^{+}, \qquad (w^{+})^{\overline{\overline{k}}}{=}^{+}w^{\overline{\overline{k}}} * (\varepsilon_{x^{\overline{k}}})_{M(u)}, \qquad {}^{(l)}w \approx^{(l+1)} w.$$

Для следующей серии параметров $l_s^1 = \overline{0, m_s}$ определим ${}^{(0)}w^{+}{=}w^{+}$, а для $l_s^1 > 0$ полагаем при $\overline{\overline{k}} = (k_1, \ldots, k_{s-1}, k_s \neq m_s - l_s^1 + 1, \overset{*}{k})$

$$({}^{(l_s^1)}w^{+})^{\overline{\overline{k}}}{=}({}^{(l_s^1-1)}w^{+})^{\overline{\overline{k}}},$$

при $\overline{\overline{k}} = (k_1, \ldots, k_{s-1}, m_s - l_s^1 + 1, \overset{*}{k})$

$$({}^{(l_s^1)}w^{+})^{\overline{\overline{k}}}{=}({}^{+}w)^{(k_1,\ldots,k_{s-1},m_s-l_s^1,\overset{*}{k})} * (x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},m_s-l_s^1)}, \ldots, x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},m_s-l_s^1)}, \underbrace{x^{\overline{k}}, \ldots, x^{\overline{k}}}_{l_s^1}).$$

В последней формуле Т-путь длины $M(u)$ задается последовательностью всех точек его траектории. Как и ранее, имеем простую Т-гомотопность ${}^{(l_s^1)}w^{+} \approx^{(l_s^1+1)} w^{+}$. Продолжая эту последовательность, определим для $l_s^2 = \overline{1, m_s - 1}$ при $k_s \neq m_s - l_s^2 + 1$

$$({}^{(m_s+l_s^2)}w^{+})^{\overline{\overline{k}}}{=}({}^{(m_s+l_s^2-1)}w^{+})^{\overline{\overline{k}}},$$

а при $k_s = m_s - l_s^2 + 1$ —

$$({}^{(m_s+l_s^2)}w^{+})^{\overline{\overline{k}}}{=}({}^{+}w)^{(k_1,\ldots,k_{s-1},m_s-l_s^2-1,\overset{*}{k})} * (x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},m_s-l_s^2-1)}, \ldots, x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},m_s-l_s^2-1)},$$
$$x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},m_s-l_s^2)}, \underbrace{x^{\overline{k}}, \ldots, x^{\overline{k}}}_{l_s^2}).$$

Во вновь построенной серии ТС-кубов каждый предыдущий просто Т-гомотопен последующему. Продолжим аналогичные построения до получения ТС-куба ${}^{(m_s+(m_s-1)+\ldots+1)}w^{+}$:

$$({}^{m_s(m_s+l)/2}w^{+})^{\overline{\overline{k}}}{=}({}^{+}w)^{(k_1,\ldots,k_{s-1},0,\overset{*}{k})}*$$
$$*(\underbrace{x^{(k_1,\ldots,k_{s-1})}, \ldots, x^{(k_1,\ldots,k_{s-1})}}_{M(u)-m_s}, \underbrace{x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},1)}, \ldots, x^{(k_1,\ldots,k_{s-1},1)}}_{k_s-1}, \underbrace{x^{\overline{k}}, \ldots, x^{\overline{k}}}_{m_s-k_s+1}).$$

В получившемся ТС-кубе выполним все предыдущие построения применительно к $(s-1)$-му аргументу k_{s-1}, а затем и к оставшимся аргументам. Эти построения завершаются ТС-кубом ${}^{(\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i+1)/2)}w^{+}$ таким, что (см. [4]) $({}^{(\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i+1)/2)}w^{+})^{\overline{\overline{k}}} =^{+} w^{(0,\ldots,0,\overset{*}{k})} * \alpha^{\overline{k}}$. Отсюда следует (см. [5]), что ${}^{\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i+1)/2)}w^{+} \approx W(u,v)$. Построенная последовательность просто Т-гомотопных ТС-кубов определяет искомый ТС-куб $\mathcal{D}_s(w,N)$ с

$$M(N,u) = 1 + N \cdot M(u) + \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i+1)}{2} + 1 = 2 + \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i+2N+1)}{2}. \ \square$$

Обозначим $C^{\Omega} = C^{\Omega}(P(X,x_0))$ группу нормализованных Ω-пунктированных ТКС-цепей (см. [4]) пространства $(P(X,x_0),\varkappa)$. Для каждого $s \in \mathbb{Z}$ определим подгруппу $C^s \subset C^{\Omega}$, порожденную классами $\overline{w} = w + D^{\Omega}(P(X,x_0))$ такими, что w —невырожденный Ω-пунктированный ТС-куб веса $\nu(w) \leqslant s$, $D^{\Omega}(P(X,x_0))$ — группа, свободно порожденная вырожденными Ω-пунктированными ТС-кубами. Из определения 2 и свойств (1)–(3) следует, что

$$s < 0 \Longrightarrow C^s = 0, \bigcup_{s\in\mathbb{Z}} C^s = C^{\Omega}, C^s \subset C^{s+1}, \partial(C^s) \subset C^s. \tag{5}$$

Определим вес ненулевой однородной цепи $c = \sum \alpha_i \overline{w}_i \in C_n^{\Omega}$:

$$\nu(c){=}\min\{s \in \mathbb{Z} | c \in C^s\} = \max\{\nu(w_i) | \alpha_i \neq 0\}.$$

Свойства (5) вместе с очевидным свойством $0 \leqslant \nu(c) \leqslant \dim\, c = n$ означают, что $\{C^s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ — регулярная возрастающая фильтрация цепного комплекса C^{Ω} (см. [5]).

Короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to C^{s-1} \hookrightarrow C^s \to \widehat{C}^s \to 0, \qquad \widehat{C}^s{=}C^s/C^{s-1} = \underset{n\geqslant 0}{\oplus} \widehat{C}^s_n, \qquad \widehat{C}^s_n{=}C^s_n/C^{s-1}_n,$$

определяет точную гомологическую последовательность

$$\begin{tikzcd} H(C^{s-1}) \arrow[rr, "i"] & & H(C^s) \arrow[dl, "j"] \\ & H(\widehat{C}^s) \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd} \tag{6}$$

Выполняя прямое суммирование по $s \in \mathbb{Z}$, получим точную пару (см. [5])

$$\mathcal{G}(C^{\Omega}) = \langle \mathcal{D}, \mathcal{E}; i, j, k\rangle, \qquad \mathcal{D} = \underset{s}{\oplus} \mathcal{D}_s, \qquad \mathcal{D}_s{=}H(C^s), \qquad \mathcal{E} = \underset{s}{\oplus} \mathcal{E}_s, \qquad \mathcal{E}_s{=}H(\widehat{C}^s),$$

ассоциированную с нормальной фильтрацией $\{C^s\}$ комплекса C^{Ω}. Точная пара $\mathcal{G}(\mathrm{C}^{\Omega})$ допускает двойную градуировку $\mathcal{D} = \underset{s,t}{\oplus} \mathcal{D}_{s,t}$, $\mathcal{D}_{s,t}{=}H_{s+t}(C^s)$, $\mathcal{E} = \underset{s,t}{\oplus} \mathcal{E}_{s,t}$, $\mathcal{E}_{s,t}{=}H_{s+t}(\widehat{C}^s)$, относительно которой гомоморфизмы i, j, k имеют степени $(1, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$ соответственно. Из (5) легко следует, что

$$(\forall\ s < 0)(\forall\ t) \quad \mathcal{D}_{s,t} = 0, \qquad (\forall\ t < 0)(\forall\ s) \quad \mathcal{E}_{s,t} = 0.$$

Таким образом, точная пара $\mathcal{G}(\mathrm{C}^{\Omega})$ является регулярной ∂-парой (см. [5], гл. VIII). Производные точные пары $\mathcal{G}(C^{\Omega}) = \langle \mathcal{D}^m, \mathcal{E}^m; i^{(m)}, j^{(m)}, k^{(m)}\rangle$, $m \in \mathbb{N}$ дают последовательность дифференциальных групп:

$$\{(\mathcal{E}^m = \underset{s,t}{\oplus} \mathcal{E}^m_{s,t}, d^{(m)}) |\ d^{(m)} = j^{(m)} \circ k^{(m)},\ m = \overline{1, \infty}\},$$

которая называется спектральной последовательностью, ассоциированной с точной парой $\mathcal{G}(\mathrm{C}^{\Omega})$. Для регулярной ∂-пары спектральная последовательность $\{\mathcal{E}^m\}$ стабилизируется (см. [5], гл. VIII, п. 6): при $m > \max\{s, t+1\}$ $\mathcal{E}^m_{s,t} = \mathcal{E}^{m+1}_{s,t} = \ldots = \mathcal{E}^{\infty}_{s,t}$. Группа $\mathcal{E}^{\infty} = \underset{s,t}{\oplus} \mathcal{E}^{\infty}_{s,t}$ называется пределом сходящейся спектральной последовательности $\{\mathcal{E}^m\}$. Из общей теории регулярных ∂-пар (см. [5], гл. VIII) следует

Теорема 3. *Группа гомологий $H_n(P(X, x_0))$ имеет фильтрацию*

$$H_n(P(X, x_0)) = H_{n,0}(P(X, x_0)) \supset H_{n-1,1}(P(X, x_0)) \supset \ldots \supset H_{-1,n+1}(P(X, x_0)) = 0,$$

$$H_{s,t}(P(X, x_0))/H_{s-1,t+1}(P(X, x_0)) \cong \mathcal{E}^{\infty}_{s,t}.$$

Для вычисления первого члена $\mathcal{E}^1 = \mathcal{E} = \underset{s,t}{\oplus} \mathcal{E}_{s,t}$, где $\mathcal{E}_{s,t} = H_{s+t}(\widehat{C}^s)$, рассмотрим цепной комплекс $\widehat{C}^s = \underset{n\geqslant 0}{\oplus} \widehat{C}^s_n$, где $\widehat{C}^s_n = C^s_n/C^{s-1}_n$.

Для произвольной образующей $\overline{w} \in C^s_n$ обозначим $[\overline{w}]{=}\overline{w} + C^{s-1}_n \in \widehat{C}^s_n$ и определим

$$\partial_n([\overline{w}]) = \sum_{j=s+1}^{n} (-1)^j ([\overline{d^1_j(w)}] - [\overline{d^0_j(w)}]) \in \widehat{C}^s_{n-1}.$$

Рассмотрим цепной комплекс $K^s{=}C^{\bullet}_s(X) \otimes C(\Omega(X, x_0)) = \underset{n\geqslant 0}{\oplus} (C^{\bullet}_s(X) \otimes C_{n-1}(\Omega(X, x_0)))$, где $C^{\bullet}$ — пунктированные нормализованные ТКС-цепи, C — нормализованные ТКС-цепи. Граничный гомоморфизм ∂_{Ω} в K^s определим формулой $\partial_{\Omega}(a{\otimes}b){=}(-1)^s a{\otimes}\partial b$. Имеется цепной гомоморфизм $\widehat{\varphi} : \widehat{C}^s \to K^s$, который на образующих корректно задается формулой

$$\widehat{\varphi}([\overline{w}]){=}\overline{u} \otimes \overline{v}, \qquad u = \mathcal{B}_s(w), \qquad v = \mathcal{F}_s(w).$$

Для каждой пары $(s,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ цепной гомоморфизм $\widehat{\varphi}$ индуцирует гомоморфизм $\psi_{s,t} : H_{s+t}(\widehat{C}^s) \to$ $\to H_{s+t}(K^s)$. Так как $H_{s+t}(\widehat{C}^s) = \mathcal{E}_{s,t}$, $H_{s+t}(K^s) = C_s^\bullet(X) \otimes H_t(\Omega(X,x_0))$ и $C_s^\bullet(X)$ — свободная группа, имеем гомоморфизм $\psi_{s,t} : \mathcal{E}_{s,t} \to C_s^\bullet(X) \otimes H_t(\Omega(X,x_0))$.

Следующие леммы о гомологичности доказываются построением подходящих цепных гомотопий.

Лемма 1. *Для любого цикла $z = \sum \alpha_i \overline{v}_i \in Z_t(C(\Omega(X,x_0)))$ и любого натурального M цикл $z * \varepsilon_M = \sum \alpha_i \overline{v}_i * \varepsilon_M$ гомологичен исходному $z - z * \varepsilon_M \in B_t(C(\Omega(X,x_0)))$.*

Лемма 2. *Для односвязного пространства (X,τ) и произвольной T-петли α в (X,τ) с вершиной в $x_0 \in X$ любой цикл $z \in Z_t(C(\Omega(X,x_0)))$ гомологичен циклу $z * \alpha$.*

Теорема 4. *Гомоморфизм $\psi_{s,t}$ является изоморфизмом: $\psi_{s,t} : \mathcal{E}_{s,t} \cong C_s^\bullet(X) \otimes H_t(\Omega(X,x_0))$.*

Доказательство. С помощью теоремы 1 построим цепной гомоморфизм $\lambda : K^s \to \widehat{C}^s$ по формуле $\lambda(\overline{u} \otimes v)=[\overline{W(u,v)}] = [w]$. Для каждой пары целых чисел (s,t) имеем индуцированный гомоморфизм групп гомологий:

$$\mu_{s,t} : C_s^\bullet(X) \otimes H_t(\Omega(X,x_0)) \to \mathcal{E}_{s,t}.$$

Композиция $\psi_{s,t} \circ \mu_{s,t}$ индуцируется цепным гомоморфизмом $\widehat{\varphi} \circ \lambda$ в размерности $s+t$. Из теоремы 1 следует, что $\widehat{\varphi} \circ \lambda(\overline{u} \otimes \overline{v}) = \overline{u} \otimes \overline{v * \varepsilon_{M(u)}}$. Возьмем произвольный цикл $z = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i \overline{u}_i \otimes \overline{v}_i \in Z_{s+t}(K^s)$ и обозначим: $\overline{u}_{i_1}, \ldots, \overline{u}_{i_N}$ — все различные элементы в $\{\overline{u}_i | i \in I\}$, I_k=$\{i \in I | \overline{u}_i = \overline{u}_{i_k}\}$, $k = \overline{1,N}$. Тогда $z = \sum\limits_{k=1}^{N} \overline{u}_{i_k} \otimes z_k$, z_k=$\sum\limits_{i \in I_k} \alpha_i \overline{v}_i$, и так как z — цикл, а группа $C^\bullet(X)$ свободна, то $\partial z_k = 0$. Отсюда по Лемме 1 для всех $k = \overline{1,N}$ имеем гомологичность $z_k * \varepsilon_{M(u_{i_k})} = z_k + \partial c_k$, из которой следует, что

$$(\psi_{s,t} \circ \mu_{s,t})(z + B_{s+t}(K^s)) = z + (-1)^s \partial_\Omega \left(\sum_{k=1}^{N} \overline{u}_{i_k} \otimes c_k \right) + B_{s+t}(K^s) = z + B_{s,t}(K^s).$$

Тем самым доказано, что $\psi_{s,t} \circ \mu_{s,t} = \mathbf{1}_{H_{s+t}(K^s)} = \mathbf{1}_{C_s^\bullet(X) \otimes H_t(\Omega(X,x_0))}$.

Гомоморфизм $\mu_{s,t} \circ \psi_{s,t} : \mathcal{E}_{s,t} \to \mathcal{E}_{s,t}$ индуцируется цепным гомоморфизмом $\lambda \circ \widehat{\varphi} : \widehat{C}^s \to \widehat{C}^s$ в размерности $s+t$, для которого имеем

$$\lambda \circ \widehat{\varphi}([\overline{w}]) = [\overline{W(u,v)}], \qquad u = \mathcal{B}_s(w), \qquad v = \mathcal{F}_s(w).$$

С помощью теоремы 2 корректно определяется гомоморфизм χ_N степени 1 на подходящем подкомплексе в $\widehat{C}^s$ такой, что $\chi_N([\overline{w}])=(-1)^s[\overline{\mathcal{D}_s(w,N)}]$ и доказывается, что

$$\partial_{s+t+1}(\chi_N([\overline{w}])) = [\overline{w}] - \lambda \circ \widehat{\varphi}([\overline{w}]) - \chi_N(\partial_{s+t}([\overline{w}])).$$

Отсюда для произвольного цикла $z = \sum\limits_i \alpha_i [\overline{w}_i] \in Z_{s+t}(\widehat{C}^s)$ и $N > \max\limits_i N(w_i)$ имеем гомологичность $\partial_{s+t+1}(\chi_N([\overline{w}])) = z - \lambda \circ \widehat{\varphi}(z)$, из которой следует, что $\mu_{s,t} \circ \psi_{s,t} = \mathbf{1}_{H_{s+t}(\widehat{C}^s)} = \mathbf{1}_{\mathcal{E}_{s,t}}$. $\square$

Для вычисления второго члена $\mathcal{E}^2 = \bigoplus\limits_{s,t} \mathcal{E}^2_{s,t}$ спектральной последовательности $\{\mathcal{E}^m\}$ рассмотрим на $\bigoplus\limits_{s,t}(C_s^\bullet(X) \otimes H_t(\Omega(X,x_0)))$ структуру цепного комплекса $C^\bullet(X)$ с простой системой коэффициентов $H(\Omega(X,x_0))$ и граничным гомоморфизмом $\partial_X(\overline{u} \otimes h)$=$\sum\limits_{j=1}^{s}(-1)^s(\overline{d_j^1(u)} \otimes h - \overline{d_j^0(u)} \otimes h)$.

Теорема 5. *Для односвязного пространства (X,τ) изоморфизм $\psi = \bigoplus\limits_{s,t} \psi_{s,t}$ является цепным, т.е. $\partial_X \circ \psi = \psi \circ d$.*

Доказательство. Возьмем произвольный образующий элемент:

$$\overline{u} \otimes h \in C_s^\bullet(X) \otimes H_t(\Omega(X,x_0)),$$

где $u : \left(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{s} I_{m_j}, \mathop{\times}\limits_{j=1}^{s} \iota_{m_j} \right) \to (X,\tau)$ — произвольный невырожденный пунктированный TC-куб, $h = z + B_t(\Omega(X,x_0))$ — произвольный элемент в $H_t(\Omega(X,x_0))$ с представляющим циклом $z = \sum\limits_i \alpha_i \overline{v}_i \in Z_t(\Omega(X,x_0))$. Из доказательства теоремы 4 следует:

$$\psi^{-1}(\overline{u} \otimes h) = \mu(\overline{u} \otimes h) = \lambda(\overline{u} \otimes z) + B^\Omega_{s+t}(\widehat{C}^s) = [c] + B^\Omega_{s+t}(\widehat{C}^s) \in \mathcal{E}_{s,t}, \tag{7}$$

где $c = \sum_i \alpha_i \overline{W(u, v_i)} \in C^s_{s+t}$. Из точной гомологической последовательности (6) и формулы (7) следует, что гомологический класс $f = d([c] + B^{\Omega}_{s+t}(\widehat{C}^s)) = [\partial c] + B^{\Omega}_{s-1+t}(\widehat{C}^{s-1}) \in \mathcal{E}_{s-1+t}$ может быть представлен в виде $f = (d \circ \psi^{-1})(\overline{u} \otimes h)$, и, следовательно,

$$(\psi \circ d \circ \psi^{-1})(\overline{u} \otimes h) = \psi(f) = \widehat{\varphi}([\partial c]) + B_{s-1+t}(K^{s-1}).$$

С помощью теоремы 1 получаем формулу

$$\partial c = \sum_i \sum_{j=1}^{s} \sum_{\varepsilon=0}^{1} (-1)^{j+\varepsilon+1} \alpha_i \overline{d_i^{\varepsilon}(W(u, v_i))},$$

которая позволяет цикл $g{=}\widehat{\varphi}([\partial c]) \in Z_{s-1+t}(K^{s-1})$ представить в виде

$$g = \sum_i \sum_{j=1}^{s} (-1)^j \alpha_i (\overline{\mathcal{B}_{s-1}(d_j^1(W(u, v_i)))} \otimes \overline{\mathcal{F}_{s-1}(d_j^1(W(u, v_i)))} -$$

$$-\overline{\mathcal{B}_{s-1}(d_j^0(W(u, v_i)))} \otimes \overline{\mathcal{F}_{s-1}(d_j^0(W(u, v_i)))}).$$

Используя свойства 2) и 3) теоремы 1, получим

$$\mathcal{B}_{s-1}(d_j^{\varepsilon}(W(u, v_i))) = d_j^{\varepsilon}(u), \qquad \mathcal{F}_{s-1}(d_j^0(W(u, v_i))) = v_i * \varepsilon_{M(u)},$$

$$g = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j \left(\overline{d_j^1(u)} \otimes y_i - \overline{d_j^0(u)} \otimes \left(\sum \alpha_i \overline{v}_i * \varepsilon_{M(u)} \right) \right),$$

$$g_i{=}\sum_i \alpha_i \overline{\mathcal{F}_{s-1}(d_j^0(W(u, v_i)))} = \sum_i \alpha_i \overline{v}_i * \alpha^{(0,\ldots,1,\ldots,0)}.$$

Отсюда с учетом лемм 1 и 2 следует, что $(\psi \circ d \circ \psi^{-1})(\overline{u} \otimes h) = \partial_X(\overline{u} \otimes h)$.

Из теоремы 5 непосредственно получается

Теорема 6. *Если (X, τ) — линейно связное и односвязное пространство, тогда для любой пары целых чисел (s, t) цепной изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм групп гомологий:*

$$\Psi_{s,t} : \mathcal{E}^2_{s,t} \cong H_s(X; H_t(\Omega(X, x_0))).$$

Согласно принятой терминалогии исследованную выше спектральную последовательность следует называть спектральной последовательностью Лере – Серра толерантного квазирасслоения p: $P(X, x_0), \varkappa) \to (X, \tau)$.

Библиографический список

1. *Zeeman, E.C.* The topology of brain fnd visual perception / E.C. Zeeman // The Topology of 3-Manifolds. N.Y., 1962.

2. *Небалуев, С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств / С.И. Небалуев. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

3. *Небалуев, С.И.* Толерантное расслоение путей и теорема Гуревича для толерантных пространств / С.И. Небалуев, М.Н. Сусин // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4, ч. 1. С. 41–44.

4. *Небалуев, С.И.* Пунктированные толерантные кубические сингулярные гомологии / С.И. Небалуев, Е.В. Коробченко, М.Н. Сусин // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 6.

5. *Ху Сы-цзян.* Теория гомотопий / Ху Сы-цзян. М.: Мир, 1964.