2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ И ВЫРОЖДЕННЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Для комплесков, кривизна которых равна нулю для любой прямой, $K_\alpha K_\beta^1 = 0$ при всех $\beta \neq \alpha$, $\alpha = 2, 3$. Комплекс (2) в этом случае принимает один из видов:

$$K_\alpha \omega_0^\alpha = K_\beta \omega_0^\beta, \qquad K_\alpha^1 \omega_1^\alpha = K_\beta^1 \omega_1^\beta, \qquad K_\alpha \omega_0^\alpha = K_\beta^1 \omega_1^\alpha.$$

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 5. *Существуют три типа комплексов нулевой кривизны: специальный, тангенциально-вырожденный специальный, вырожденный специальный. Для комплексов первых двух типов существует канонический репер первого порядка. Канонический репер вырожденного специального комплекса не существует.*

Специальный комплекс состоит из прямых, касающихся некоторой поверхности V. Если поверхность V является тангенциально-вырожденной, то комплекс мы называем *тангенциально-вырожденным специальным*. Вырожденный специальный комплекс состоит из однопараметрического множества связок прямых, центры которых описывают некоторую кривую в абсолютной плоскости [5].

Библиографический список

1. *Киотина Г. В.* Группа движений обобщенно-галилеева пространства // Вестн. Рязан. ГПУ. 2004. С. 117—126.

2. *Розенфельд Б. А., Зацепина О. В., Стеганцева П. Г.* Гиперкомплексы прямых в евклидовом и неевклидовом пространствах // Изв. вузов. Математика. 1990. № 3. С. 57—66.

3. *Киотина Г. В.* Комплексы прямых в бифлаговом пространстве $\bar{F}_3^2$ // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2004. С. 338—344.

4. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов. Киев, 1963. 292 с.

5. *Киотина Г. В., Зацепина О. В., Ромакина Л. Н.* Специальные комплексы прямых в пространствах $\bar{F}_3^2$, ${}^1S_5$, $\bar{B}_3^h$ // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: тез. докл. международ. конф. Саратов, 2008. С. 85–86.

УДК 513.6

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВ ТОЛЕРАНТНЫХ ПЕТЕЛЬ

Е. В. Коробченко

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел.
E-mail: KorobchenkoEV@mail.ru

В статье доказывается теорема об изоморфизме между гомотопическими группами исходного толерантного пространства и гомотопическими группами на единицу меньшей размерности пространства толерантных петель исходного пространства.

Ключевые слова: толерантное пространство, пространство толерантных петель, гомотопические группы толерантного пространства.

Homotopy Groups of Space of Tolerant Loops.

E. V. Korobchenko

Saratov State University,
Chair of Computer Algebra and the Theory of Numbers
E-mail: KorobchenkoEV@mail.ru

In the article is proved the theorem about isomorphism between homotopy groups of initial tolerant space and homotopy groups with descremented by one dimension of space of tolerant loops.

Key words: tolerant space, space of tolerant loops, homotopy groups of tolerant space.

Толерантное пространство (Т-пространство), по определению Зимана [1], — это пара (X, τ), где X — множество, а $\tau \subset X \times X$ — рефлексивное и симметричное отношение, называемое *отношением толерантности*. Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ Т-пространств называется *толерантным* (Т-отображением), если из $x_1 \tau x_2$ следует $f(x_1) \theta f(x_2)$. К настоящему времени имеется достаточно развитая гомологическая и гомотопическая теория Т-пространств [2].

В гомотопической толерантной теории гомотопические параметры берутся из толерантных отрезков (I_m, ι_m) длины m $(m \in \mathbb{N})$, в которых

$$I_m = \left\{ \frac{k}{m} \Big| \; k = \overline{0, m} \right\}, \qquad \frac{k}{m} \iota_m \frac{l}{m} \quad \overset{df}{\iff} \quad |k - l| \leqslant 1.$$

Произведение Т-отрезков для краткости будем обозначать $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) = \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}, \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \iota_{m_i} \right)$ и называть *n-мерным толерантным кубом* размера $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \overset{n}{\times} \mathbb{N}$.

Т-отображения $f_0, f_1 : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ называются *толерантно гомотопными относительно подмножества* $A \subset X$, что записывается в виде $f_0 \sim f_1 (\operatorname{rel} A)$, если существуют $n \in \mathbb{N}$ и Т-отображение $F : (X \times I_n, \tau \times \iota_n) \to (Y, \theta)$ такие, что

$$1) \ (\forall \ x \in X) \ F(x, 0) = f_0(x), \ F(x, 1) = f_1(x), \qquad 2) \ (\forall \ x \in A)(\forall \ k = \overline{0, n}) \ \ F\left(x, \frac{k}{n}\right) = f_0(x).$$

Если $n = 1$, то Т-отображения f_0, f_1 называются просто *толерантно гомотопными* и записываются в виде $f_0 \approx f_1 (\operatorname{rel} A)$, или $f_0 \approx f_1$ при $A = \emptyset$.

Всякое толерантное отображение $\omega_m : (I_m, \iota_m) \to (X, \tau)$, $m \in \mathbb{N}$, называется *толерантным путем* (*Т-путем*) в пространстве (X, τ) длины m, соединяющим начало пути $x_0 = \omega_m(0) \in X$ с концом пути $x_m = \omega_m(1) \in X$. Точки $x_k = \omega_m(k/m)$, $k = \overline{0, m}$, называется *траекторией* толерантного пути ω_m.

Обозначим через $P(X, x_0)$ множество Т-путей в (X, τ) с началом в точке $x_0 \in X$. Если $\omega_m(0) = \omega_m(1) = x_0$, то ω_m называется *толерантной петлей* (*Т-петлей*) в точке x_0.

Обозначим через $\Omega(X, x_0) = \{\omega_m \in P(X, x_0) | \omega_m(0) = \omega_m(1) = x_0\}$ подмножество Т-петель множества Т-путей в (X, τ). На множестве $P(X)$ имеется обычная частичная операция $*$, сопоставляющая Т-путям $\omega_{m_1} : (I_{m_1}, \iota_{m_1}) \to (X, \tau)$, $\omega'_{m_2} : (I_{m_2}, \iota_{m_2}) \to (X, \tau)$, удовлетворяющим условию $\omega_{m_1}(1) = \omega'_{m_2}(0)$, новый путь

$$\omega_{m_1} * \omega'_{m_2} : (I_{m_1 + m_2}, \iota_{m_1 + m_2}) \to (X, \tau),$$

задаваемый формулой

$$\omega_{m_1} * \omega'_{m_2} \left(\frac{k}{m_1 + m_2} \right) = \begin{cases} \omega_{m_1}(k/m_1), & k = \overline{0, m_1}, \\ \omega_{m_2}((k - m_1)/m_2), & k = \overline{m_1, m_1 + m_2}. \end{cases}$$

Определение 1. Пусть $\omega_{m_1}, \omega'_{m_2} \in P(X, x_0)$ — произвольные Т-пути пространства (X, τ) с началом в точке $x_0 \in X$ и пусть для определенности $m_2 \geqslant m_1$. Тогда Т-пути ω_{m_1} и ω'_{m_2} назовем *$\varkappa$-толерантными*, если выполняются следующие свойства:

1) $\omega'_{m_2} = \varepsilon_{m_2 - m_1} * \gamma'_{m_1}$, где $\varepsilon_{m_2 - m_1}$ — постоянный путь длины $m_2 - m_1$: $(\forall \ k = \overline{0, m_2 - m_1})$ $\varepsilon_{m_2 - m_1}(k/(m_2 - m_1)) \equiv x_0$, а γ'_{m_1} представляет собой отрезок пути ω'_{m_2}: $(\forall k = \overline{0, m_1})$ $\gamma'_{m_1}(k/m_1) = \omega'_{m_2}((k + m_2 - m_1)/m_2)$;

2) $\omega_{m_1} \approx \gamma'_{m_1}$.

При $m_1 = m_2 = m$ постоянный путь $\varepsilon_{m_2 - m_1} = \varepsilon_0$ длины 0 является формальным объектом. Его траектория состоит из одной единственной точки x_0, и относительно операции $*$ он ведет себя как нейтральный элемент, т. е. $\varepsilon_0 * \gamma'_m = \gamma'_m = \omega'_m$. Это означает, что согласно определению 1 имеет место правило:

$$\omega_m \varkappa \omega'_m \quad \iff \quad \omega_m \approx \omega'_m \quad \iff \quad [(\forall \ k, l = \overline{0, m}) \ \ |k - l| \leqslant 1 \ \Rightarrow \ \omega_m(k/m) \tau \omega'_m(l/m)].$$

Из определения 1 следует, что все постоянные пути с началом в точке x_0 являются $\varkappa$-толерантными друг другу.

Назовем *n-мерным толерантным сфероидом* (*Т-сфероидом*) размера $\overline{m}$ пространства (X, τ) в точке $x_0 \in X$ любое толерантное отображение $\alpha_{\overline{m}} : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X, \tau)$ такое, что $\alpha_{\overline{m}}(\partial I_{\overline{m}}) = x_0$, где $\partial I_{\overline{m}} = \left\{ (k_i/m_i)_{i = \overline{1, n}} \in I_{\overline{m}} | \ (\exists \ i = \overline{1, n}) \ k_i \in \{0, m_i\} \right\}$.

Договоримся в дальнейшем записывать $\overline{M}=(M_1,\ldots,M_n)\geqslant\overline{m}$, если $M_i\geqslant m_i$ для всех $i=\overline{1,n}$. Для $\overline{M}\geqslant\overline{m}$ определим продление $\alpha_{\overline{M},\overline{m}}$ сфероида $\alpha_{\overline{m}}$:

$$\alpha_{\overline{M},\overline{m}}:(I_{\overline{M}},\iota_{\overline{M}})\to(X,\tau),\qquad \alpha_{\overline{M},\overline{m}}=\begin{cases}\alpha_{\overline{m}}\left((k_i/m_i)_{i=1,n}\right), & (\forall\ i=\overline{1,n})\ k_i\leqslant m_i,\\ x_0, & (\exists\ i=\overline{1,n})\ k_i\geqslant m_i.\end{cases}$$

Определение 2. n-мерные Т-сфероиды произвольного размера $\alpha_{\overline{m}^{(1)}}$, $\alpha'_{\overline{m}^{(2)}}$ пространства (X,τ) в точке x_0 назовем *толерантно гомотопными* и обозначим $\alpha_{\overline{m}^{(1)}}\simeq\alpha'_{\overline{m}^{(2)}}$, если существует $\overline{M}\in\overset{n}{\times}\mathbb{N}$ такое, что $\overline{M}\geq\overline{m}^{(j)}$, $j=1,2$, и имеет место толерантная гомотопия:

$$F:\alpha_{\overline{M},\overline{m}^{(1)}}\sim\alpha'_{\overline{M},\overline{m}^{(2)}}(\operatorname{rel}\partial I_{\overline{M}}).\tag{1}$$

Классы эквивалентности толерантно гомотопных Т-сфероидов будем обозначать $[\alpha_{\overline{m}}]$, а множество классов — $\pi_n(X,x_0)$.

На множество n-мерных Т-сфероидов произвольного размера определим операцию $*$, сопоставив Т-сфероидам $\alpha_{\overline{m}^{(1)}}:(I_{\overline{m}^{(1)}},\iota_{\overline{m}^{(1)}})\to(X,\tau)$, $\beta_{\overline{m}^{(2)}}:(I_{\overline{m}^{(2)}},\iota_{\overline{m}^{(2)}})\to(X,\tau)$ Т-сфероид $\alpha_{\overline{m}^{(1)}}*\beta_{\overline{m}^{(2)}}:(I_{\overline{m}^{(1)}+\overline{m}^{(2)}},\iota_{\overline{m}^{(1)}+\overline{m}^{(2)}})\to(X,\tau)$ такой, что для любого $i=\overline{1,n}$ и всех $k_i=\overline{0,m_i^{(1)}+m_i^{(2)}}$ имеет место представление

$$(\alpha_{\overline{m}^{(1)}}*\beta_{\overline{m}^{(2)}})\left(\left(\frac{k_i}{m_i^{(1)}+m_i^{(2)}}\right)_{i=\overline{1,n}}\right)=\begin{cases}\alpha_{\overline{m}^{(1)}}((k_i/m_i^{(1)})_{i=\overline{1,n}}), & (\forall i=\overline{1,n})\ k_i\leqslant m_i^{(1)},\\ \beta_{\overline{m}^{(2)}}(((k_i-m_i^{(1)})/m_i^{(2)})_{i=\overline{1,n}}), & (\forall i=\overline{1,n})\ k_i\geqslant m_i^{(1)}\\ x_0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для Т-сфероидов $\alpha_{\overline{m}}$ определяется двойное замедление $\widetilde{\alpha}_{\overline{m}}:(I_{2\overline{m}},\iota_{2\overline{m}})\to(X,\tau)$ формулой

$$\widetilde{\alpha}_{\overline{m}}\left(\left(\frac{k_i}{2m_i}\right)_{i=\overline{1,n}}\right)=\alpha_{\overline{m}}\left(\left(\frac{1}{m_i}\left[\frac{k_i}{2}\right]\right)_{i=\overline{1,n}}\right).$$

Такое двойное замедление имеет свойства (см. [3]), позволяющие доказать, что на множестве классов толерантно гомотопных n-мерных Т-сфероидов произвольного размера корректно определена операция

$$[\alpha_{\overline{m}^{(1)}}]*[\beta_{\overline{m}^{(2)}}]=[\alpha_{\overline{m}^{(1)}}*\beta_{\overline{m}^{(2)}}],\tag{2}$$

превращающая множество $\pi_n(X,x_0)$ в группу, которая называется n-й гомотопической группой Т-пространства. Нейтральным элементом группы $\pi_n(X,x_0)$ будет класс $[\varepsilon^n_{\overline{m}}]$, где $\varepsilon^n_{\overline{m}}\equiv x_0$. Операцию, определенную формулой (2) при условии $m_l^{(1)}=m_l^{(2)}$, можно задать другой формулой

$$[\alpha_{\overline{m}^{(1)}}]*[\beta_{\overline{m}^{(2)}}]=[\gamma^{(l)}_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)},\ldots,m_l^{(1)},\ldots,m_n^{(1)}+m_n^{(2)})}],\tag{3}$$

где

$$\gamma^{(l)}_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)},\ldots,m_l^{(1)},\ldots,m_n^{(1)}+m_n^{(2)})}\left(\frac{k_1}{m_1^{(1)}+m_1^{(2)}},\ldots,\frac{k_l}{m_l^{(1)}},\ldots,\frac{k_n}{m_n^{(1)}+m_n^{(2)}}\right)=\alpha^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(1)}}*\beta^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(2)}},$$

$$\alpha^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(1)}}:I_{m_1^{(1)}}\times\ldots\times I_{m_{l-1}^{(1)}}\times I_{m_{l+1}^{(1)}}\times\ldots\times I_{m_n^{(1)}}\to X,$$

$$\alpha^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(1)}}\left(\frac{k_1}{m_1^{(1)}},\ldots,\frac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(1)}},\frac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(1)}},\ldots,\frac{k_n}{m_n^{(1)}}\right)=\alpha_{\overline{m}^{(1)}}\left(\frac{k_1}{m_1^{(1)}},\ldots,\frac{k_l}{m_l^{(1)}},\ldots,\frac{k_n}{m_n^{(1)}}\right),$$

$$\beta^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(2)}}:I_{m_1^{(1)}}\times\ldots\times I_{m_{l-1}^{(1)}}\times I_{m_{l+1}^{(1)}}\times\ldots\times I_{m_n^{(1)}}\to X,$$

$$\beta^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(2)}}\left(\frac{k_1}{m_1^{(2)}},\ldots,\frac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(2)}},\frac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(2)}},\ldots,\frac{k_n}{m_n^{(2)}}\right)=\beta_{\overline{m}^{(2)}}\left(\frac{k_1}{m_1^{(2)}},\ldots,\frac{k_l}{m_l^{(2)}},\ldots,\frac{k_n}{m_n^{(2)}}\right).$$

Теорема 1. *Пусть (X,τ) — произвольное толерантное пространство с отмеченной точкой $x_0 \in X$, пусть $(\Omega(X,x_0),\varkappa)$ — пространство толерантных петель пространства (X,τ) с отмеченной петлей $\varepsilon_1 \in \Omega(X,x_0)$. Тогда для каждого натурального $n \geqslant 2$ имеется изоморфизм*

$$\psi_n : \pi_n(X,x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega(X,x_0),\varepsilon_1).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный сфероид $\alpha_{\overline{m}'} : (I_{\overline{m}'}, \iota_{\overline{m}'}) \to (\Omega(X,x_0),\varkappa)$, $\alpha_{\overline{m}'}(\partial I_{\overline{m}'}) = \varepsilon_1$, $\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')} = \alpha_{\overline{m}'}\left(\dfrac{k_1}{m_1},\ldots,\dfrac{k_{n-1}}{m_{n-1}}\right)$, где $\overline{k}' = (k_1,\ldots,k_{n-1})$, $\overline{m}' = (m_1,\ldots,m_{n-1})$. Обозначим через $d^{(\overline{k}')}$ длину петли $\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')}$. Возьмем максимальную длину всех петель $m_n = \max\limits_{\overline{k}'} d^{(\overline{k}')}$.

Определим новое отображение $\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}) : I_{\overline{m}} \to X$ следующим образом:

$$\overline{m} = (\overline{m}', m_n), \quad \overline{k} = (\overline{k}', k_n), \quad k_n = \overline{0,m_n},$$

$$\varphi_n^{(\overline{k})}(\alpha_{\overline{m}'}) = \varphi_n(\alpha_{\overline{m}'})\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_{n-1}}{m_{n-1}},\frac{k_n}{m_n}\right) = \begin{cases} \left(\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')}\right)^{-1}(k_n/m_n), & 0 \leqslant k_n \leqslant d^{(\overline{k}')}, \\ x_0, & k_n \geqslant d^{(\overline{k}')}. \end{cases} \tag{4}$$

Покажем, что (4) определяет n-мерный сфероид в пространстве (X,τ).

Возьмем $\overline{k} = (\underbrace{k_1,\ldots,k_{n-1}}_{\overline{k}'},k_n)$, $\overline{l} = (\underbrace{l_1,\ldots,l_{n-1}}_{\overline{l}'},l_n)$ такие, чтобы для всех $i = \overline{1,n}$ имело место неравенство $|k_i - l_i| \leqslant 1$. Необходимо показать, что

$$\varphi_n^{\overline{k}}(\alpha_{\overline{m}'})\tau\varphi_n^{\overline{l}}(\alpha_{\overline{m}'}), \tag{5}$$

$$\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'})(\partial I_{\overline{m}}) = x_0. \tag{6}$$

Так как $\alpha_{\overline{m}'}$ — сфероид в пространстве $(\Omega(X,x_0),\varkappa)$, для $\overline{k}'$ и $\overline{l}'$ имеем $\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')}\varkappa\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{l}')}$. По определению 1 это означает, в предположении $d^{(\overline{k}')} \geqslant d^{(\overline{l}')}$, что

$$\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')} = \varepsilon_{d^{(\overline{k}')}-d^{(\overline{l}')}} * \gamma_{d^{(\overline{l}')}}, \quad \alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{l}')} \approx \gamma_{d^{(\overline{l}')}}.$$

$\varepsilon_{m_n - d^{(\overline{k}')}} * \alpha_{\overline{m}}^{(\overline{k}')} = [\varphi_n^{\overline{k}}(\alpha_{\overline{m}'})]^{-1}$ и $\varepsilon_{m_n - d^{(\overline{l}')}} * \alpha_{\overline{m}}^{(\overline{l}')} = [\varphi_n^{\overline{l}}(\alpha_{\overline{m}'})]^{-1}$ — два просто толерантно гомотопных Т-пути. Тогда $\varphi_n^{(k_1,\ldots,k_{n-1},k_n)}(\alpha_{\overline{m}'})$ и $\varphi_n^{(l_1,\ldots,l_{n-1},l_n)}(\alpha_{\overline{m}'})$ представляют собой τ-толерантные точки этих путей с толерантными аргументами $\dfrac{k_n}{m_n}\iota_{m_n}\dfrac{l_n}{m_n}$ при условии $\overline{k}'\iota_{\overline{m}'}\overline{l}'$. Это доказывает (5). Свойство (6) следует из (4) и того факта, что для сфероида $\alpha_{\overline{m}'}(\partial I_{\overline{m}'}) = \varepsilon_1$.

Покажем, что отображение $\psi_n : \pi_{n-1}(\Omega(X,x_0)) \to \pi_n(X,x_0)$, задаваемое формулой

$$\psi_n([\alpha_{\overline{m}'}]) = [\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'})], \tag{7}$$

где $\alpha_{\overline{m}'}$ — произвольный сфероид в $\Omega(X,x_0)$, определенно корректно и является изоморфизмом групп $\psi_n : \pi_{n-1}(\Omega(X,x_0)) \cong \pi_n(X,x_0)$.

Корректность (7) означает, что для толерантных сфероидов $\alpha_{\overline{m}'^{(1)}} \simeq \overline{\alpha}_{\overline{m}'^{(2)}}$ имеет место

$$\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'^{(1)}}) \simeq \varphi_n(\overline{\alpha}_{\overline{m}'^{(2)}}). \tag{8}$$

Согласно определению 2 для сфероидов $\alpha_{\overline{m}'^{(1)}}$ и $\overline{\alpha}_{\overline{m}'^{(2)}}$ существуют $\overline{M}' \geq \overline{m}'^{(j)}$, $j = 1,2$, такие, что $\alpha_{\overline{M}',\overline{m}'^{(1)}} \sim \overline{\alpha}_{\overline{M}',\overline{m}'^{(2)}}(\operatorname{rel}\partial I_{\overline{M}'})$. Достаточно ограничиться рассмотрением простой толерантной гомотопии

$$\alpha_{\overline{M}',\overline{m}'^{(1)}} \approx \overline{\alpha}_{\overline{M}',\overline{m}'^{(2)}}(\operatorname{rel}\partial I_{\overline{M}'}). \tag{9}$$

Из формулы (4) следует

$$\varphi_n(\alpha_{\overline{M}',\overline{m}'^{(1)}}) = (\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'^{(1)}}))_{\overline{M}',\overline{m}'^{(1)}}. \tag{10}$$

Поэтому для доказательства (8) достаточно показать, что

$$\varphi_n(\alpha_{\overline{M}',\overline{m}'^{(1)}}) \approx \varphi_n(\overline{\alpha}_{\overline{M}',\overline{m}'^{(2)}})(\operatorname{rel}\partial I_{\overline{M}}), \qquad \overline{M} = (\overline{M}', m_n). \tag{11}$$

Формула (9) означает, что для всех $\overline{k}'\iota_{\overline{M}'}\overline{l}'$ справедливо $\alpha^{(\overline{k}')}_{\overline{M}',\overline{m}'^{(1)}} \approx \overline{\alpha}^{(\overline{l}')}_{\overline{M}',\overline{m}'^{(2)}}$. Тогда, используя рассуждения, приведенные выше (см. доказательство свойства (6)), получаем, что для всех $\overline{k}' = (k_1, \dots, k_{n-1}, k_n)$ и всех $\overline{l}' = (l_1, \dots, l_{n-1}, l_n)$, где $|k_i - l_i| \leqslant 1$ при любом $i = \overline{1,n}$, справедливо $\varphi_n^{(\overline{k})}(\alpha_{\overline{M}',\overline{m}'^{(1)}})\tau\varphi_n^{(\overline{l})}(\overline{\alpha}_{\overline{M}',\overline{m}'^{(2)}})$, что и доказывает (11).

Докажем гомоморфность ψ_n. Обозначим $M_n = \max\{m_n^{(1)}, m_n^{(2)}\}$. Предположим, что $M_n = m_n^{(2)}$. Тогда, используя (4), (7), (10) и (2), (3), получаем:

$$\psi_n([\alpha_{\overline{m}'^{(1)}}] * [\overline{\alpha}_{\overline{m}'^{(2)}}]) = [\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'^{(1)}} * \overline{\alpha}_{\overline{m}'^{(2)}})] = [\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'^{(1)}})_{(\overline{m}'^{(1)},M_n),\overline{m}} * \varphi_n(\overline{\alpha}_{\overline{m}'^{(2)}})] =$$

$$= [\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'^{(1)}})_{(\overline{m}'^{(1)},M_n),\overline{m}}] * [\varphi_n(\overline{\alpha}_{\overline{m}'^{(2)}})] = [\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'^{(1)}})] * [\varphi_n(\overline{\alpha}_{\overline{m}'^{(2)}})] = \psi_n([\alpha_{\overline{m}'^{(1)}}]) * \psi_n([\overline{\alpha}_{\overline{m}'^{(2)}}]).$$

Для доказательства сюрьективности ψ_n возьмем произвольный элемент $[\beta_{\overline{m}}] \in \pi_n(X, x_0)$. Для построения прообраза этого элемента при отображении ψ_n определим сначала отображение $\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}) : I_{\overline{m}'} \to \Omega(X, x_0)$ следующей формулой:

$$(\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))^{(\overline{k}')}\left(\frac{k_n}{m_n}\right) = (\beta_{\overline{m}})^{-1}\left(\overline{k}', \frac{k_n}{m_n}\right), \tag{12}$$

$$\overline{m}' = (m_1, \dots, m_{n-1}), \qquad \overline{k}' = (k_1, \dots, k_{n-1}), \qquad k_n = \overline{0, m_n}.$$

Так как $\beta_{\overline{m}}$ толерантно по каждому аргументу, то из (12) следует, что для любого $\overline{k}'$ путь $(\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))^{(\overline{k}')}$ является толерантным в X. Ввиду того что $\beta_{\overline{m}}$ — T-сфероид и $(\overline{k}', 0)$, $(\overline{k}', 1) \in \partial I_{\overline{m}}$, получаем равенства $(\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))^{(\overline{k}')}(0) = (\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))^{(\overline{k}')}(1) = x_0$. Таким образом, в любой точке $\overline{k}'$ значение $(\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))^{(\overline{k}')}$ представляет собой толерантную петлю с вершиной в x_0.

Далее покажем, что $\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}})$ — толерантное отображение, т. е. для всех $\overline{k}'\iota_{\overline{m}'}\overline{l}'$ справедливо

$$(\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))^{(\overline{k}')}\varkappa(\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))^{(\overline{l}')}. \tag{13}$$

Сотношение (13) означает, что для толерантных $k_n\iota_n l_n$

$$(\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))^{(\overline{k}')}\left(\frac{k_n}{m_n}\right)\tau(\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))^{(\overline{l}')}\left(\frac{l_n}{m_n}\right). \tag{14}$$

Используя определение χ'_{n-1}, соотношение(14) можно переписать в виде

$$(\beta_{\overline{m}})^{-1}\left(\overline{k}', \frac{k_n}{m_n}\right)\tau(\beta_{\overline{m}})^{-1}\left(\overline{l}', \frac{l_n}{m_n}\right). \tag{15}$$

Справедливость формулы (15) следует из толерантности отображения $\beta_{\overline{m}}$. Таким образом, $\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}})$ — толерантное отображение, но $\chi'_{n-1}(\beta_{\overline{m}})$ не является сфероидом, так как отсутствует необходимое условие на границе. Для того чтобы выполнить это условие, строим сфероид $\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}}) : I_{(m'_1+2, m'_2+2, \dots, m'_{n-1}+2)} \to \Omega(X, x_0)$, определение которого, чтобы избежать громоздкости записи, представлено графически на рис. 1 ($n = 2$).

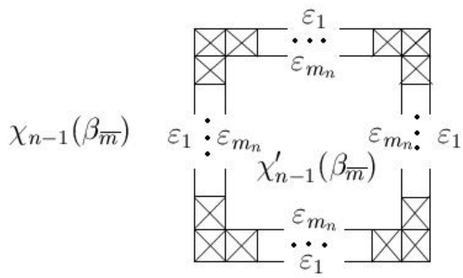

Рис. 1. Определение сфероида $\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}})$

В результате имеем толерантный сфероид $\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}})$ в $\Omega(X, x_0)$. На рис. 2 изображены очевидные толерантные гомотопии сфероидов (см. [3]).

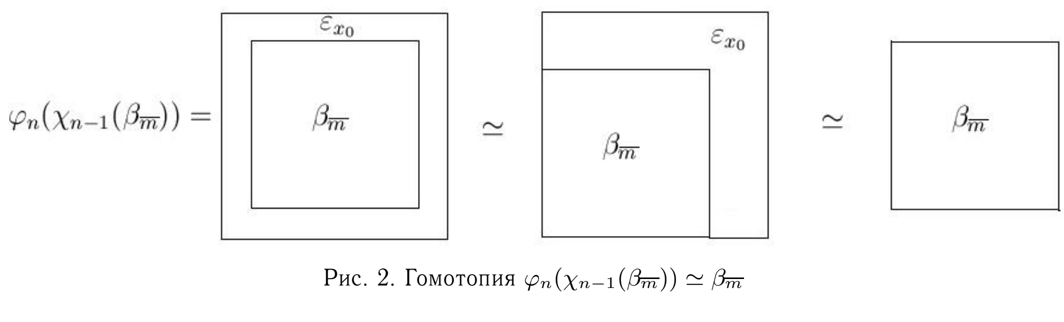

Рис. 2. Гомотопия $\varphi_n(\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}})) \simeq \beta_{\overline{m}}$

Эти гомотопии показывают, что $\psi_n([\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}})]) = [\varphi_n(\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))] = [\beta_{\overline{m}}]$. Таким образом, сюръективность отображения ψ_n доказана.

Для доказательства инъективности ψ_n предположим, что $\psi_n([\alpha_{\overline{m}'}]) = [\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'})] = [\varepsilon^n_{\overline{m}}]$. Следовательно, $\beta_{\overline{m}} = \varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}) \simeq \varepsilon^n_{\overline{m}}$. Последнее согласно определению 2 означает, что существует $\overline{M} \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}$ такое, что $(\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}))_{\overline{M},\overline{m}} \sim \varepsilon^n_{\overline{M}}(\mathrm{rel}\,\partial I_{\overline{M}})$, что, в свою очередь, означает наличие цепочки просто гомотопных толерантных сфероидов:

$$(\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}))_{\overline{M},\overline{m}} =^{(0)} \beta_{\overline{M},\overline{m}} \approx^{(1)} \beta_{\overline{M},\overline{m}} \approx \ldots \approx^{(t)} \beta_{\overline{M},\overline{m}} = \varepsilon^n_{\overline{M}}. \tag{16}$$

Эти сфероиды определяют цепочку сфероидов в $\Omega(X)$, $\chi_{n-1}({}^{(j)}\beta_{\overline{M},\overline{m}})$, $j = \overline{0,t}$. Из (16) и определения χ_{n-1} непосредственной проверкой получаем:

$$\alpha_{\overline{M}',\overline{m}'} = \chi_{n-1}({}^{(0)}\beta_{\overline{M},\overline{m}}) \approx \chi_{n-1}({}^{(1)}\beta_{\overline{M},\overline{m}}) \approx \ldots \approx \chi_{n-1}({}^{(t)}\beta_{\overline{M},\overline{m}}) = (\varepsilon_{\varepsilon_1})^n_{\overline{M}}.$$

Это означает, что $[\alpha_{\overline{m}'}] = [(\varepsilon_{\varepsilon_1})^n]$. Таким образом, инъективность ψ_n доказана.

Библиографический список

1. *Zeeman E. C.* The topology of the brain and visual perception // The topology of 3-manifolds and related topics. New Jersey, 1962. P. 240–256.
2. *Небалуев С. И.* Гомологическая теория толерантных пространств: учеб. пособие. Саратов, 2006. 111 с.
3. *Небалуев С. И.* Высшие гомотопические группы толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2003. Вып. 2. С. 15–30.

УДК 517.984

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА А. А. ДОРОДНИЦЫНА ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ НА СЛУЧАЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. М. Малеко

Магнитогорский государственный технический университет,
кафедра математики
E-mail: emaleko@rambler.ru

Пусть A — самосопряженный дискретный оператор с простым спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ и имеющий там ядерную резольвенту, B — самосопряженный и ограниченный в $\mathbb{H}$ оператор. Тогда можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, что собственные числа и собственные функции возмущенного оператора $A + \varepsilon B$ будут вычисляться по методу А. А. Дородницына.

Ключевые слова: гильбертово пространство, возмущенный оператор, спектр.

Generalization of Method A. A. Dorodnicyn Close Calculation of Eigenvalues and Eigenvectors of Symmetric Matrices on Case of Self-Conjugate Discrete Operators

E. M. Maleko

Magnitogorsk State Technical University,
Chair of Mathematics
E-mail: emaleko@rambler.ru

Let the discrete self-conjugate operator A operates in separable Hilbert space $\mathbb{H}$ and has the kernel resolvent with simple spectrum. Self-conjugate and limited operator B operates also in $\mathbb{H}$. Then it is possible to find such number $\varepsilon > 0$, that eigenvalues and eigenfunctions of the perturbation operator $A+\varepsilon B$ will be calculated on a method of Dorodnicyn.

Key words: Hilbert space, perturbation operator, spectrum.

Часто при решении краевых задач важно знать не только их собственные числа, но и собственные функции. А. А. Дородницын разработал [1, с. 180–181] метод вычисления собственных чисел и векторов матриц вида

$$C(\varepsilon) = A + \varepsilon B,$$

где A, B, $C(\varepsilon)$ — симметричные квадратные матрицы размера $n \times n$, $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Собственные числа $\lambda_i = \lambda_i(0)$ и вектора $x_i = x_i(0)$ матрицы A предполагаются известными.