$(x_0, t) \notin \tau$. Это влечет, что $(t, t') \in \rho$ при любом $t' \in X$. В частности, $(t, v) \in \rho$. Так как $(u, t) \in \sigma$ и $(t, v) \in \rho$, то $(u, v) \in \sigma\rho$.

Мы доказали, что $\sigma\rho = \sigma\rho'$, но $\tau\rho \neq \tau\rho'$. В силу теоремы 1 это означает, что $\tau \not\leqslant^*_l \sigma$. □

Следствие из теоремы 4 и двойственной к ней. *В полугруппе* $B(X)$ *бинарных отношений на множестве* X *справедливы равенства* $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}$ *и* $\mathscr{R}^* = \mathscr{R}$.

Авторы благодарят рецензента, сделавшего ряд ценных замечаний, позволивших существенно улучшить текст статьи.

Библиографический список

1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. 1. 285 с.
2. *Зарецкий К.А.* Полугруппа бинарных отношений // Мат. сб. 1963. Т. 61 (103), № 3. С. 291–305.
3. *Глускин Л.М.* Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. 1961. Т. 5 (101), № 16. С. 157–162.
4. *Айзенштат А.Я.* Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. 1968. Т. 387. С. 3–11.
5. *Molchanov V.A.* Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. P. 155–199.
6. *Laradji A., Umar A.* On certain finite semigroups of order-decreasing transformations // King Fahd Univ. Petroleum & Minerals. Tech. Rep. Ser. 2003. P. 1–19.
7. *Huisheng P., Dingyu Z.* Green's equivalences on semigroups of transformations preserving order and an equivalence relation // Semigroup Forum. 2005. V. 71. P. 241–251.
8. *Ляпин Е.С.* Полугруппы. М.: Физматгиз, 1960. 592 с.
9. *Шутов Э.Г.* Потенциальная делимость элементов в полугруппах // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. Герцена. 1958. Т. 166. С. 75–103.
10. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.

УДК 517.958

СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА КОМПАКТНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

О.В. Коровина, В.Л. Прядиев

Белгородский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: olesya_korovina@mail.ru, Pryadiev@bsu.edu.ru

Для волнового уравнения на компактном геометрическом графе при обобщённо-гладких условиях трансмиссии доказывается аналог формулы Даламбера.

Ключевые слова: компактный геометрический граф, волновое уравнение, обобщённо-гладкие условия трансмиссии, смешанная задача, аналог формулы Даламбера.

Structure of Mixed Problem Solution for Wave Equation on Compact Geometrical Graph in Nonzero Initial Velocity Case

O.V. Korovina, V.L. Pryadiev

Belgorod State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: olesya_korovina@mail.ru, Pryadiev@bsu.edu.ru

A D'Alambert formula analogue for wave equation on the compact geometrical graph with generalized smooth transmission conditions is being proved.

Key words: compact geometrical graph, wave equation, generalized smooth transmission conditions, mixed problem, D'Alambert formula analogue.

В настоящей работе рассматривается волновое уравнение на компактном геометрическом графе при условиях трансмиссии, которые являются обобщением так называемых «гладких» или «стандартных» [1]. Основная цель работы — дать доказательство представления типа Даламбера для решения начально-краевой задачи при ненулевой начальной скорости из класса C^1. Использована техника, развитая в работе [2] (где начальная скорость предполагалась нулевой). Представление типа Даламбера здесь не только даёт информацию о структуре общего решения (дополняя представление решения в виде ряда Фурье), но и может быть положено в основу при создании вычислительной схемы решения начально-краевой задачи [3].

1. ОПИСАНИЕ ОСНОВНОГО ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть Γ — компактный геометрический граф из $\mathbb{R}^n$, который понимается нами так же, как в [4]. Пусть $\mathcal{J}$ — множество всех внутренних вершин Γ, $\partial\Gamma$ — множество граничных вершин. В соответствии с работой [4] $\mathcal{J}$ содержится в Γ и $\partial\Gamma \cap \Gamma = \varnothing$. Будем предполагать, что компоненты связности множества $\Gamma \setminus \mathcal{J}$ (называемые рёбрами графа) являются прямолинейными интервалами. Все рёбра будем считать ориентированными, т. е. что каждому интервалу $\gamma = (a, b)$, являющемуся ребром Γ, поставлен в соответствие один из двух векторов единичной длины, коллинеарных вектору $b - a$. Этот вектор обозначим через h_γ.

Для функции u, определённой в точках множества $(\Gamma \setminus \mathcal{J}) \times (0; +\infty)$, будем использовать следующие обозначения: если $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$, а γ — ребро Γ, содержащее x, то $u_x(x,t) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}[u(x + \varepsilon h_\gamma, t) - - u(x,t)]$, и если $t > 0$, то $u_t(x,t) := \lim\limits_{\tau\to 0} \tau^{-1}[u(x, t+\tau) - u(x,t)]$.

Основной объект исследования в данной работе — это волновое уравнение

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \Gamma \setminus \mathcal{J},\ t > 0) \tag{1}$$

при условиях трансмиссии

$$\sum_{h \in T(x)} \alpha(x,h) u_h^+(x,t) = 0 \quad (x \in \mathcal{J},\ t \geqslant 0), \tag{2}$$

здесь $T(x) := \big\{h \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|h\| = 1 \text{ и } (x + \varepsilon h) \in \Gamma \text{ для достаточно малых } \varepsilon > 0\big\}$, $\alpha(x,h)$ — некоторые вещественные числа, такие что

$$\sum_{h \in T(x)} \alpha(x,h) = 1 \quad (x \in \mathcal{J}), \tag{3}$$

$u_h^+(x,t)$ — правая производная по вектору h функции $u(\,\cdot\,, t)$ в точке x. Отметим попутно, что существование правых производных $u_h^+(x,t)$ для всех $h \in T(x)$ автоматически влечёт непрерывность функции $u(\,\cdot\,, t)$ в точке x при любом $t \geqslant 0$. Предполагая, что функция u, удовлетворяющая соотношениям (1) и (2), определена на $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty)$, будем рассматривать для системы (1)–(2) следующую начально-краевую задачу:

$$u(x,t) = 0 \quad (x \in D,\ t \geqslant 0), \tag{4}$$

$$u_h^+(x,t) = 0 \quad (x \in N,\ h \in T(x),\ t \geqslant 0), \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in \Gamma \cup \partial\Gamma), \tag{6}$$

$$\lim_{t \to 0+} u_t(x,t) = \psi(x) \quad (x \in \Gamma \cup \partial\Gamma), \tag{7}$$

здесь $D \cup N = \partial\Gamma$ и $D \cap N = \varnothing$, причём $x \in N \Rightarrow | T(x) | = 1$.

Под решением задачи (1)–(2), (4)–(7) будем понимать функцию $u : (\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, которая 1) непрерывна по первому аргументу в точках $\partial\Gamma \times [0; +\infty)$, 2) непрерывна по второму аргументу в точках $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times \{0\}$, 3) удовлетворяет соотношениям (1)–(2), (4)–(7)[1].

Заметим, что можно считать $N = \varnothing$, т. е. $D = \partial\Gamma$ (и далее мы всегда это будем предполагать). Действительно, достаточно объявить точки из N внутренними вершинами Γ, и тогда (5) примет вид равенства (2) с единственным числом $\alpha(x,h)$, равным 1.

2. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)–(2), (4)–(7) В ФОРМЕ ДАЛАМБЕРА

Для формулировки основного результата нам потребуется ввести в рассмотрение некоторое множество ориентированных ломаных, которое мы обозначим буквой P. Ориентированную ломаную p с вершинами $a_i \in \Gamma \cup \partial\Gamma$, $i = \overline{0, k}$, перенумерованными согласно ориентации p, отнесём ко множеству P, если и только если:

1) $(\forall\ i = \overline{1, k-1})\big[a_i \in \mathcal{J} \cup \partial\Gamma\big]$,

[1] Имеется в виду, что речь будет идти *только* о классических решениях задачи (1)–(2), (4)–(7). Понятно, что класс функций, которому гарантированно принадлежит решение задачи (1)–(2), (4)–(7), зависит от того, каким классам принадлежат φ и ψ. В разд. 3 мы проанализируем этот вопрос подробнее.

2) $(\forall\ i=\overline{0,k-1})\big[a_i \neq a_{i+1}$ и $(a_i;a_{i+1}) \subseteq \Gamma \setminus \mathcal{J}\big]$,
3) $(\forall\ i=\overline{1,k-1})[a_i \in \partial\Gamma \Rightarrow [a_{i-1};a_i] \cap [a_i;a_{i+1}] \neq \{a_i\}]$.
При этом мы допускаем, что некоторые звенья $[a_i;a_{i+1}]$, в том числе соседние, могут совпадать или быть вложенными одно в другое. Точку a_0 будем называть началом ломаной p, а точку a_k — её концом. Длиной ломаной p назовём сумму длин её звеньев $[a_i;a_{i+1}]$, т. е. $\sum\limits_{i=0}^{k-1}|a_{i+1}-a_i|$.

Каждой паре (p,i), в которой p — ломаная из P, а i — номер её вершины, отличной от конца (т. е. $i=\overline{0,k-1}$), поставим в соответствие число

$$\beta_i(p) := \begin{cases} -1, & \text{если } a_i \in D(=\partial\Gamma) \text{ и } i \neq 0,\\ 2\alpha(a_i,h_i(p)), & \text{если } \big(i=0\big)\vee\big((a_i \notin \partial\Gamma) \wedge ([a_{i-1};a_i] \cap [a_i;a_{i+1}] = \{a_i\})\big),\\ 2\alpha(a_i,h_i(p))-1, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $h_i(p) := |a_{i+1}-a_i|^{-1}(a_{i+1}-a_i)$, и если $a_0 \in \Gamma\setminus\mathcal{J}$, то $\alpha(a_0,h) := 1/2$ для любого $h \in T(a_0)$, а если $a_0 \in \partial\Gamma$, то $\alpha(a_0,h) := 1$ для любого $h \in T(a_0)$. Положим

$$\beta(p) := \frac{1}{2}\prod_{i=0}^{k-1}\beta_i(p).$$

Введём, наконец, в рассмотрение оператор $\mathcal{C}(t)$, действующий в пространстве определённых на $\Gamma\cup\partial\Gamma$ функций по правилу:

$$[\mathcal{C}(t)\zeta](x) := \begin{cases} \sum\limits_{p\in P(x,t)} \beta(p)\zeta(e_p), & \text{если } x \in \Gamma \text{ и } t>0,\\ 0, & \text{если } x \in \partial\Gamma \text{ и } t>0,\\ \zeta(x), & \text{если } x \in \Gamma\cup\partial\Gamma \text{ и } t=0,\end{cases} \tag{8}$$

где $P(x,t)$ есть множество всех ломаных из P с началом в точке x и длины t, а e_p здесь и далее обозначает конец p.

Теорема 1. *Пусть φ и ψ непрерывны на $\Gamma\cup\partial\Gamma$, причём для любого ребра γ сужения $\varphi''|_\gamma$ и $\psi'|_\gamma$ функций φ'' и ψ' на это ребро равномерно непрерывны на нём. Пусть для любой $x \in \mathcal{J}$ вторая производная $(\varphi_h^+)_h^+(x)$ по вектору $h \in T(x)$ не зависит от h, т. е.*

$$(\varphi_h^+)_h^+(x) = (\varphi_\eta^+)_\eta^+(x) \quad (x \in \mathcal{J},\ h,\eta \in T(x)). \tag{9}$$

Пусть также

$$\sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)\varphi_h^+(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{J}), \tag{10}$$

$$\sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)\psi_h^+(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{J}), \tag{11}$$

$$\varphi(x) = \psi(x) = (\varphi_h^+)_h^+(x) = 0 \quad (x \in \partial\Gamma,\ h \in T(x)). \tag{12}$$

Тогда решение задачи (1)–(2), (4)–(7) *существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,t) = [\mathcal{C}(t)\varphi](x) + \int_0^t [\mathcal{C}(\tau)\psi](x)d\tau. \tag{13}$$

Доказательство. Для доказательства единственности решения задачи (1)–(2), (4)–(7) достаточно доказать тривиальность решения u^0 однородной задачи (1)–(2), (4)–(7) (при φ и ψ тождественно равных нулю) на $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times[0;\delta]$, где δ — наименьшая из длин рёбер. Выражая для каждого ребра $\gamma=(a;b)$ сужение $u^0|_{\gamma\times[0;+\infty)}$ через $u^0(a,t)$ и $u^0(b,t)$, получим, в силу формулы решения задачи о распространении граничного режима [5, гл. II, § 2, п. 7], что для $t \in [0;\delta]$ выполнено

$$(u^0)_h^+(x,t) = -(u^0)_t(x,t) \quad (x \in \mathcal{J}).$$

Отсюда, ввиду выполнения (2) для u^0, следует, что $(u^0)_t(x,t)=0$ для всех $x\in\mathcal{J}$ и $t\in[0;\delta]$, т. е. так как $u^0(x,0)=0$, что $u^0(x,t)=0$ для тех же x и t. Но тогда $u\equiv 0$ на $\gamma\times[0;\delta]$ для любого ребра γ. Единственность доказана.

Справедливость представления (13) достаточно доказать отдельно для случаев $\psi\equiv 0$ и $\varphi\equiv 0$. Допустим пока, что $\psi\equiv 0$ в (13). Найдём сначала $u_t(x,t)$ для $x\in\Gamma$ и $t>0$. Если $\Delta t<0$ достаточно мало, то

$$u(x,t+\Delta t)=\sum_{\pi\in P(x,t+\Delta t)}\beta(\pi)\varphi(e_\pi)=\sum_{p\in P(x,t)}\beta(p)\varphi(e_p-\Delta t\cdot h(p)),$$

где $h(p)$ — вектор из $T(e_p)$, однозначно определяемый требованием о том, что точка $e_p+\varepsilon h(p)$ принадлежит последнему звену ломаной p для достаточно малых $\varepsilon>0$. Значит, левая производная $u_t^-(x,t)$ имеет вид

$$u_t^-(x,t)=-\sum_{p\in P(x,t)}\beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p). \tag{14}$$

Если же $\Delta t>0$ достаточно мало, то, представляя $P(x,t)$ в виде $P(x,t):=P_1(x,t)\cup P_2(x,t)\cup P_3(x,t)$, где $P_1(x,t):=\{p\in P(x,t)\mid e_p\in\Gamma\setminus\mathcal{J}\}$, $P_2(x,t):=\{p\in P(x,t)\mid e_p\in\partial\Gamma\}$, $P_3(x,t):=\{p\in P(x,t)\mid e_p\in\mathcal{J}\}$, получим

$$u(x,t+\Delta t)=\sum_{\pi\in P(x,t+\Delta t)}\beta(\pi)\varphi(e_\pi)=\sum_{p\in P_1(x,t)}\beta(p)\varphi(e_p-\Delta t\cdot h(p))-\sum_{p\in P_2(x,t)}\beta(p)\varphi(e_p+\Delta t\cdot h(p))+$$
$$+\sum_{p\in P_3(x,t)}\beta(p)\Big[-\varphi(e_p+\Delta t\cdot h(p))+\sum_{h\in T(e_p)}2\alpha(e_p,h)\varphi(e_p+\Delta t\cdot h)\Big].$$

Следовательно, правая производная $u_t^+(x,t)$ имеет вид

$$u_t^+(x,t)=l_1+l_2+l_3, \tag{15}$$

где

$$l_1=-\sum_{p\in P_1(x,t)}\beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p),\qquad l_2=-\sum_{p\in P_2(x,t)}\beta(p)\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{\varphi(e_p+\Delta t\cdot h(p))+\varphi(e_p)}{\Delta t},$$
$$l_3=\sum_{p\in P_3(x,t)}\beta(p)\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t}\Big[-\varphi(e_p+\Delta t\cdot h(p))+\sum_{h\in T(e_p)}2\alpha(e_p,h)\varphi(e_p+\Delta t\cdot h)-\varphi(e_p)\Big].$$

Заметим, что если $p\in P_2(x,t)$, то $e_p\in\partial\Gamma$, и значит, $\varphi(e_p)=0$. Следовательно, $\varphi(e_p+\Delta t\cdot h(p))+$ $+\varphi(e_p)=\varphi(e_p+\Delta t\cdot h(p))-\varphi(e_p)$, и поэтому

$$l_2=-\sum_{p\in P_2(x,t)}\beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p).$$

Далее,

$$l_3=\sum_{p\in P_3(x,t)}\beta(p)\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t}\Big\{-\big[\varphi(e_p+\Delta t\cdot h(p))-\varphi(e_p)\big]+2\sum_{h\in T(e_p)}\alpha(e_p,h)\big[\varphi(e_p+\Delta t\cdot h)-\varphi(e_p)\big]\Big\}=$$
$$=\sum_{p\in P_3(x,t)}\beta(p)\Big[-\varphi^+_{h(p)}(e_p)+2\sum_{h\in T(e_p)}\alpha(e_p,h)\varphi^+_h(e_p)\Big]=-\sum_{p\in P_3(x,t)}\beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p),$$

так как если $p\in P_3(x,t)$, то $e_p\in\mathcal{J}$, и значит, в силу (10)

$$\sum_{h\in T(e_p)}\alpha(e_p,h)\varphi^+_h(e_p)=0.$$

Таким образом, (15) приобретает вид $u_t^+(x,t)=-\sum\limits_{p\in P(x,t)}\beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p)$, что вместе с (14) влечёт

$$u_t(x,t)=-\sum_{p\in P(x,t)}\beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p). \tag{16}$$

Аналогично найдём $u_{tt}(x,t)$. Так же как из (13) было получено (14), из (16) получаем

$$(u_t)_t^-(x,t) = \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p).$$

Далее,

$$(u_t)_t^+(x,t) = L_1 + L_2 + L_3, \tag{17}$$

где

$$L_1 = \sum_{p\in P_1(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p), \qquad L_2 = -\sum_{p\in P_2(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p),$$

$$L_3 = -\sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p) \lim_{\Delta t\to 0+} \frac{1}{\Delta t}\Big[-\varphi^+_{-h(p)}(e_p + \Delta t\cdot h(p)) + 2\sum_{h\in T(e_p)} \alpha(e_p,h)\varphi^+_{-h}(e_p+\Delta t\cdot h) - \varphi^+_{h(p)}(e_p)\Big].$$

Для преобразования L_3 воспользуемся, тем, что для достаточно малых $\Delta t > 0$ выполнено равенство $\varphi^+_{-h}(e_p + \Delta t\cdot h) = -\varphi^+_h(e_p+\Delta t\cdot h)$ — при всех $h\in T(e_p)$. Тогда с учётом (10) получим:

$$L_3 = -\sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p) \lim_{\Delta t\to 0+}\Bigg[\frac{\varphi^+_{h(p)}(e_p+\Delta t\cdot h(p)) - \varphi^+_{h(p)}(e_p)}{\Delta t} -$$

$$-2\sum_{h\in T(e_p)} \alpha(e_p,h)\frac{\varphi^+_h(e_p+\Delta t\cdot h) - \varphi^+_h(e_p)}{\Delta t}\Bigg] =$$

$$= -\sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p)\Big[(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p) - 2\sum_{h\in T(e_p)}\alpha(e_p,h)\varphi^{++}_{hh}(e_p)\Big].$$

Заметим, что в силу (9) $\varphi^{++}_{hh}(e_p) = (\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p)$ для любого $h\in T(e_p)$. Поэтому с учётом (3) окончательно получаем

$$L_3 = \sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p).$$

Таким образом, (17) примет вид

$$(u_t)_t^+(x,t) = \sum_{p\in P_1(x,t)\cup P_3(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p) - \sum_{p\in P_2(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p),$$

что совпадает с $(u_t)_t^-(x,t)$, так как если $p\in P_2(x,t)$, то $e_p\in\partial\Gamma$ и, стало быть, в силу (12) имеем $(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p) = 0$. Значит,

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p). \tag{18}$$

Найдём теперь выражения для $u^+_h(x,t)$ и для $u_{xx}(x,t)$, где в первом случае x — фиксированная точка из Γ, $h\in T(x)$, а во втором случае x принадлежит $\Gamma\setminus\mathcal{J}$, и в обоих случаях $t>0$. Пусть $P'(x,t,h) := \big\{p\in P(x,t)\,\big|\,(x+\varepsilon h)$ принадлежит первому звену ломаной p при достаточно малых $\varepsilon>0\big\}$ и $P''(x,t,h) := P(x,t)\setminus P'(x,t,h)$. Если $\varepsilon>0$ достаточно мало, то

$$u(x+\varepsilon h,t) = \sum_{p\in P''(x,t,h)} \beta(p)\varphi(e_p+\varepsilon h(p)) +$$

$$+\sum_{p\in P_1'(x,t,h)} \beta(p)\Big[\frac{1}{2\alpha(x,h)}\varphi(e_p-\varepsilon h(p)) + \frac{2\alpha(x,h)-1}{2\alpha(x,h)}\varphi(e_p+\varepsilon h(p))\Big] +$$

$$+\sum_{p\in P_2'(x,t,h)} \beta(p)\frac{\alpha(x,h)-1}{\alpha(x,h)}\varphi(e_p+\varepsilon h(p)) +$$

$$+\sum_{p\in P_3'(x,t,h)} \beta(p)\Big[\frac{1}{\alpha(x,h)}\sum_{\eta\in T(e_p)}\alpha(e_p,\eta)\varphi(e_p+\varepsilon\eta) + \frac{\alpha(x,h)-1}{\alpha(x,h)}\varphi(e_p+\varepsilon h(p))\Big], \tag{19}$$

где $P_i'(x,t,h) := P'(x,t,h) \cap P_i(x,t)$. Из (19) вытекает, что

$$u_h^+(x,t) = \sum_{p \in P''(x,t,h)} \beta(p)\varphi_{h(p)}^+(e_p) + \frac{\alpha(x,h)-1}{\alpha(x,h)} \sum_{p \in P'(x,t,h)} \beta(p)\varphi_{h(p)}^+(e_p). \tag{20}$$

Теперь мы можем показать, что функция (13) (при $\psi \equiv 0$) удовлетворяет условию (2). В самом деле, в силу (20)

$$\sum_{h \in T(x)} \alpha(x,h) u_h^+(x,t) = \sum_{h \in T(x)} \left[\alpha(x,h) \sum_{p \in P''(x,t,h)} \beta(p)\varphi_{h(p)}^+(e_p) + (\alpha(x,h)-1) \sum_{p \in P'(x,t,h)} \beta(p)\varphi_{h(p)}^+(e_p)\right]. \tag{21}$$

Изменим в правой части (21) порядок суммирования так, чтобы внутреннее суммирование осуществлялось по $h \in T(x)$, а внешнее — по $p \in P(x,t)$. Заметим, что всякая ломаная $p \in P(x,t)$ принадлежит $P'(x,t,h)$ для единственного h из $T(x)$; обозначим это h через $\theta(p)$. Тогда замена порядка суммирования в правой части (21) может быть осуществлена по следующему правилу:

$$\sum_{h \in T(x)} \left[\sum_{p \in P'(x,t,h)} f_1(h,p) + \sum_{p \in P''(x,t,h)} f_2(h,p)\right] = \sum_{p \in P(x,t)} \left[f_1(\theta(p),p) + \sum_{h \in T(x) \setminus \{\theta(p)\}} f_2(h,p)\right]. \tag{22}$$

На основании (22) из (21) получаем

$$\sum_{h \in T(x)} \alpha(x,h) u_h^+(x,t) = \sum_{p \in P(x,t)} \beta(p)\varphi_{h(p)}^+(e_p)\left[\alpha(x,\theta(p)) - 1 + \sum_{h \in T(x) \setminus \{\theta(p)\}} \alpha(x,h)\right] = 0 \tag{23}$$

— в силу (3). Значит, если $\psi \equiv 0$, то функция (13) условию (2) удовлетворяет.

При $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$ равенство (23) принимает вид

$$u_{h_\gamma}^+(x,t) + u_{-h_\gamma}^+(x,t) = 0,$$

где γ — ребро, содержащее x. Но тогда существует и $u_x(x,t)$, и из равенства (20) следует:

$$u_x(x,t) = \sum_{p \in P''(x,t,h_\gamma)} \beta(p)\varphi_{h(p)}^+(e_p) - \sum_{p \in P'(x,t,h_\gamma)} \beta(p)\varphi_{h(p)}^+(e_p). \tag{24}$$

Равенство (24) используем для нахождения $u_{xx}(x,t)$, где $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$ и $t > 0$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место:

$$u_x(x+\varepsilon h_\gamma,t) = \sum_{\pi \in P''(x+\varepsilon h_\gamma,t,h_\gamma)} \beta(\pi)\varphi_{h(\pi)}^+(e_\pi) - \sum_{\pi \in P'(x+\varepsilon h_\gamma,t,h_\gamma)} \beta(\pi)\varphi_{h(\pi)}^+(e_\pi) =$$

$$= \sum_{p \in P''(x,t,h_\gamma)} \beta(p)\varphi_{h(p)}^+\big(e_p + \varepsilon h(p)\big) - \sum_{p \in P'(x,t,h_\gamma) \cap P_1(x,t)} \beta(p)\varphi_{h(p)}^+\big(e_p - \varepsilon \cdot h(p)\big) +$$

$$+ \sum_{p \in P'(x,t,h_\gamma) \cap P_2(x,t)} \beta(p)\varphi_{-h(p)}^+\big(e_p + \varepsilon \cdot h(p)\big) -$$

$$- \sum_{p \in P'(x,t,h_\gamma) \cap P_3(x,t)} \beta(p)\left[\sum_{\eta \in T(e_p)} 2\alpha(e_p,\eta)\varphi_{-\eta}^+\big(e_p + \varepsilon \cdot \eta\big) - \varphi_{-h(p)}^+\big(e_p + \varepsilon \cdot h(p)\big)\right].$$

Заметим, что $\varphi_{-\eta}^+\big(e_p + \varepsilon\eta\big) = -\varphi_\eta^+\big(e_p + \varepsilon\eta\big)$ (для любого $\eta \in T(e_p)$) при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Учитывая это, а также (10), (12), (9) и (3), получим

$$(u_x)_{h_\gamma}^+(x,t) = \sum_{p \in P(x,t)} \beta(p)(\varphi_{h(p)}^+)_{h(p)}^+(e_p). \tag{25}$$

Вычисление $(u_x)_{-h_\gamma}^+(x,t)$ аналогично и приводит к равенству

$$(u_x)_{-h_\gamma}^+(x,t) = -\sum_{p \in P(x,t)} \beta(p)(\varphi_{h(p)}^+)_{h(p)}^+(e_p). \tag{26}$$

Из равенств (25) и (26) следует, что правая часть равенства (25) и есть $u_{xx}(x,t)$. Значит (см. (18)), при $\psi \equiv 0$ функция (13) удовлетворяет уравнению (1).

Выполнение (4) для функции (13) при $\psi \equiv 0$ следует из определения $\mathcal{C}(t)$ (см. (8)). Но надо еще доказать, что $(\forall\ x \in \partial\Gamma)$ $(\forall\ t > 0)$ $[u(y,t) \to 0$ при $y \to x]$.

Пусть $x \in \partial\Gamma$ и $t > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $|T(x)| = 1$. В этом случае

$$\lim_{y\to x} u(y,t) = \lim_{y\to x} \sum_{\pi\in P(y,t)} \beta(\pi)\varphi(e_\pi) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\Bigg\{ \sum_{p\in P_1(x,t)} \beta(p)\big[\varphi(e_p-\varepsilon h(p)) - \varphi(e_p+\varepsilon h(p))\big] -$$

$$-2\sum_{p\in P_2(x,t)} \beta(p)\varphi(e_p+\varepsilon h(p)) + \sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p)\Bigg[2\sum_{\eta\in T(e_p)} \alpha(e_p,\eta)\varphi(e_p+\varepsilon\eta) - 2\varphi(e_p+\varepsilon h(p))\Bigg]\Bigg\} = 0,$$

ввиду непрерывности φ на $\Gamma\cup\partial\Gamma$, обнуления φ на $\partial\Gamma$ и равенства (3). При этом последний предел — равномерный по любому конечному интервалу изменения переменной t, что вместе со сходимостью $u(y,0) = \varphi(y) \to 0$ при $y \to x$ $(\in \partial\Gamma)$ влечёт сходимость $u(y,t)$ к 0 при $y \to x$ $(\in \partial\Gamma)$ равномерно на каждом отрезке вида $[0;t_0]$. Значит [6, n° 505], функция u непрерывна на $\partial\Gamma \times [0;+\infty)$.

Справедливость (6) для функции (13) при $\psi \equiv 0$ следует из определения $\mathcal{C}(t)$ (см. (8)). Однако надо обосновать, что

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \varphi(x) \quad (x \in \Gamma). \tag{27}$$

Заметим, что для любой $x \in \Gamma$ при достаточно малых $t > 0$ все ломаные p из $P(x,t)$ однозвенны, следовательно, имеет место равенство $\beta(p) = \alpha(x,\theta(p))$. Поэтому

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \lim_{t\to 0+} \sum_{p\in P(x,t)} \alpha(x,\theta(p))\varphi(x+t\cdot\theta(p)) = \lim_{t\to 0+} \sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)\varphi(x+t\cdot h) = \varphi(x),$$

причём в силу равномерной непрерывности φ последний предел — равномерный на Γ. Это вместе с очевидной сходимостью $u(x,t) \to \varphi(x)$ при $t \to 0+$ в точках $x \in \partial\Gamma$ влечёт равномерную уже на $\Gamma\cup\partial\Gamma$ сходимость $u(x,t)$ к $\varphi(x)$ при $t \to 0+$, откуда следует непрерывность функции u на $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times\{0\}$ по совокупности переменных [6, n° 505].

Аналогично доказывается справедливость (7) для (13) при $\psi \equiv 0$: в силу (16) и (10) для $x \in \Gamma$ получим

$$\lim_{t\to 0+} u_t(x,t) = -\lim_{t\to 0+} \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p) = \sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h) \lim_{t\to 0+} \varphi^+_h(x+t\cdot h) = \sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)\varphi^+_h(x) = 0,$$

причём последний предел — равномерный на $\Gamma\cup\partial\Gamma$ в силу равномерной непрерывности $\varphi'|_\gamma$ для любого ребра γ.

Итак, в случае $\psi \equiv 0$ функция (13) есть решение задачи (1)–(2), (4)–(7).

Остаётся рассмотреть случай, когда $\varphi \equiv 0$ в (13). В этом случае при $x \in \Gamma$ и $t > 0$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)\psi(e_p) = -\sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p), \tag{28}$$

что доказывается так же, как и (16). Далее, если $x \in \Gamma$ и $t > 0$, то

$$u^+_h(x,t) = \int_0^t \left[\sum_{p\in P''(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p) + \frac{\alpha(x,h)-1}{\alpha(x,h)} \sum_{p\in P'(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)\right] d\tau. \tag{29}$$

Здесь мы учитываем, что в силу равномерной непрерывности ψ' на любом ребре и с учётом (11) подынтегральная функция при любом фиксированном $t > 0$ непрерывна по совокупности переменных в некотором прямоугольнике вида $[x;x+\varepsilon h]\times[0;t]$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Из (29) следует, что

$$\sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)u^+_h(x,t) = \int_0^t \sum_{h\in T(x)} \left[\alpha(x,h) \sum_{p\in P''(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p) + (\alpha(x,h)-1) \sum_{p\in P'(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)\right] d\tau.$$

Подынтегральная сумма здесь равна нулю, что доказывается так же, как и равенство нулю правой части равенства (21). Таким образом, функция (13) в случае $\varphi \equiv 0$ удовлетворяет условию (2) и дифференцируема по x в точках $\Gamma \setminus \mathcal{J}$.

Проинтегрируем правую часть (29) при $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$. Покажем, что

$$\int_0^t \sum_{p\in P''(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)\,d\tau = -\sum_{p\in P''(x,t,h)} \beta(p)\psi(e_p) + \frac{1}{2}\psi(x). \tag{30}$$

С одной стороны, производные по t левой и правой частей (30) равны. В то же время при достаточно малых $t > 0$ в $P''(x,\tau,h)$ содержится ровно одна, причём однозвенная, ломаная, которую обозначим через $\widetilde{p}$. Учитывая равенство $h(\widetilde{p}) = h$, получим

$$\int_0^t \sum_{p\in P''(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)\,d\tau = \int_0^t \beta(\widetilde{p})\psi^+_h(x-\tau h)\,d\tau = \frac{1}{2}[\psi(x) - \psi(x-th)],$$

что совпадает с правой частью (30) при тех же t. Тем самым равенство (30) доказано. Далее, поскольку $P'(x,\tau,h) = P''(x,\tau,-h)$, то в силу (30)

$$\int_0^t \sum_{p\in P'(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)d\tau = \int_0^t \sum_{p\in P''(x,\tau,-h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)d\tau =$$

$$= -\sum_{p\in P''(x,t,-h)} \beta(p)\psi(e_p) + \frac{1}{2}\psi(x) = -\sum_{p\in P'(x,t,h)} \beta(p)\psi(e_p) + \frac{1}{2}\psi(x).$$

Значит (см. (29)), для $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$

$$u^+_h(x,t) = -\sum_{p\in P''(x,t,h)} \beta(p)\psi(e_p) + \sum_{p\in P'(x,t,h)} \beta(p)\psi(e_p).$$

Отсюда, поскольку $u^+_{h_\gamma}(x,t) = u_x(x,t)$ для $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$ (здесь γ — ребро, содержащее x), получаем

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p),$$

что вместе с (28) влечёт выполнение (1) для функции (13) при $\varphi \equiv 0$.

Далее, функция $[\mathcal{C}(t)\psi](x)$ как функция x и t непрерывна на $\partial\Gamma \times [0;+\infty)$, что доказывается так же, как и непрерывность $[\mathcal{C}(t)\varphi](x)$. Поэтому функция (13) при $\varphi \equiv 0$ не только удовлетворяет условию (4), но и непрерывна в точках $\partial\Gamma \times [0;+\infty)$.

Остаётся отметить выполнение начальных условий. Справедливость $u(x,0) = 0$ очевидна. Равенство $u_t(x,0+) = \psi(x)$ обосновывается так же, как и (27). Теорема доказана.

3. О КЛАССЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (1)–(2), (4)–(7)

Обратимся теперь к вопросу о том, какому классу принадлежит решение задачи (1)–(2), (4)–(7) при выполнении условий теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда решение* u *задачи* (1)–(2), (4)–(7) *и его производные* u_t *и* u_{tt} *непрерывны на* $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0;+\infty)$, u_{xx} *непрерывно доопределяема на* $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0;+\infty)$, *а* u_x *равномерно непрерывна на* $\gamma \times [0;+\infty)$, *где* γ *— любое ребро* Γ. *Кроме того,*

$$\sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)(u_t)^+_h(x,t) = 0 \quad (x \in \mathcal{J},\ t > 0). \tag{31}$$

Замечание. Заявленные в теореме 2 свойства решения u задачи (1)–(2), (4)–(7) означают, в частности, что u и u_t — как функции первого аргумента при фиксированном втором аргументе, — наследуют все свойства φ и соответственно ψ из условий теоремы. Здесь мы учитываем, что в силу уравнения (1) из непрерывности u_{tt} на $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times[0;+\infty)$ вытекает равномерная непрерывность u_{xx} на $\gamma\times[0;+\infty)$, где γ — любое ребро Γ, а также, что

$$(u_h^+)_h^+(x,t)=(u_\eta^+)_\eta^+(x,t)\quad (x\in\mathcal{J},\ h,\eta\in T(x),\ t\geq 0),$$
$$(u_h^+)_h^+(x,t)=0\quad (x\in\partial\Gamma,\ h\in T(x),\ t\geq 0).$$

Доказательство теоремы 2. В доказательстве теоремы 1 мы уже установили непрерывность по t функций u и u_t. Поэтому, доказав непрерывность на $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times[0;+\infty)$ функции u_{tt}, мы докажем такую же непрерывность функций u_t и u. Кроме того, в силу уравнения (1) u_{xx}, будучи равной u_{tt} на $\Gamma\setminus\mathcal{J}$, будет непрерывно доопределяемой на $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times[0;+\infty)$ (если мы докажем, что u_{tt} непрерывна на этом множестве), что повлечёт и равномерную непрерывность $u_x|_{\gamma\times[0;+\infty)}$ для любого ребра γ.

Для обоснования непрерывности u_{tt} на $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times[0;+\infty)$ достаточно показать непрерывность правых частей в (18) и в (28). Равномерная на Γ непрерывность по t правой части в (18) следует, с учётом (9) и (12), из равномерной непрерывности $\varphi''|_\gamma$ на любом ребре γ, а правой части в (28) — из равномерной непрерывности $\psi'|_\gamma$ на любом ребре γ (и с учётом (11)). При этом для любой $x\in\partial\Gamma$

$$\lim_{y\to x}u_{tt}(y,t)=0=u_{tt}(x,t),\tag{32}$$

что и влечёт непрерывность u_{tt} на $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times[0;+\infty)$. Обоснуем (32):

$$\lim_{y\to x}u_{tt}(y,t)=\lim_{y\to x}\sum_{\pi\in P(y,t)}\beta(\pi)\Big[\big(\varphi_{h(\pi)}^+\big)_{h(\pi)}^+(e_\pi)-\psi_{h(\pi)}^+(e_\pi)\Big]=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\Bigg\{\sum_{p\in P_1(x,t)}\beta(p)\Big[\varphi''(e_p-\varepsilon h(p))-\varphi''(e_p+\varepsilon h(p))\Big]-2\sum_{p\in P_2(x,t)}\beta(p)\varphi''(e_p+\varepsilon h(p))+$$
$$+\sum_{p\in P_3(x,t)}\beta(p)\Big[2\sum_{\eta\in T(e_p)}\alpha(e_p,\eta)\varphi''(e_p+\varepsilon\eta)-2\varphi''(e_p+\varepsilon h(p))\Big]-$$
$$-\sum_{p\in P_1(x,t)}\beta(p)\Big[\psi_{h(p)}^+(e_p-\varepsilon h(p))-\psi_{h(p)}^+(e_p+\varepsilon h(p))\Big]+$$
$$+\sum_{p\in P_2(x,t)}\beta(p)\Big[\psi_{h(p)}^+(e_p+\varepsilon h(p))+\psi_{-h(p)}^+(e_p+\varepsilon h(p))\Big]-$$
$$-\sum_{p\in P_3(x,t)}\beta(p)\Big[2\sum_{\eta\in T(e_p)}\alpha(e_p,\eta)\psi_{-\eta}^+(e_p+\varepsilon\eta)-\psi_{-h(p)}^+(e_p+\varepsilon h(p))-\psi_{h(p)}^+(e_p+\varepsilon h(p))\Big]\Bigg\}.$$

Здесь все суммы стремятся к нулю (при $\varepsilon\to 0+$): первая и четвёртая — так как φ'' и ψ' непрерывны на $\Gamma\setminus\mathcal{J}$, вторая и третья — так как φ'' равномерно непрерывна на каждом ребре и удовлетворяет условиям (12) и (9), пятая — так как просто равна нулю, шестая — так как ψ' равномерно непрерывна на каждом ребре и удовлетворяет условию (11).

Справедливость (31) устанавливается дифференцированием по t равенства (2) и с учётом равенства

$$(u_h^+)_t(x,t)=(u_t)_h^+(x,t)\quad (x\in\mathcal{J},\ h\in T(x),\ t>0),$$

которое следует непосредственно из (20), (16) и (29), (28). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-00299).

Библиографический список

1. *Юрко В.А.* О восстановлении операторов Штурма – Лиувилля на графах // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 619–630.

2. *Прядиев В.Л.* Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Современная математика

и её приложения. Тбилиси, 2006. Т. 38. С. 82–94.
3. *Прядиев В. Л.* Численная схема решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети при обобщённо-гладких условиях трансмиссии // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2008. № 8/2 (67). С. 195–202.
4. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 272 с.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. Т. II. 808 с.

УДК 512.571 + 515.122.55

АЛГЕБРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ

В.А. Молчанов

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: V.Molchanov@inbox.ru

С помощью методов нестандартного анализа изучаются непрерывные сходимости в пространстве мультифункций и описываются псевдотопологические алгебры непрерывных мультифункций.

Ключевые слова: сходимости в пространстве мультифункций, алгебры отношений, нестандартный анализ.

Algebras of Continuous Multifunctions

V.A. Molchanov

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: V.Molchanov@inbox.ru

With the help of methods of nonstandard analysis we investigate continuous convergences in the space of multifunctions and describe pseudotopological algebras of continuous multifunctions.

Key words: convergences in the space of multifunctions, algebras of relations, nonstandard analysis.

ВВЕДЕНИЕ

Как показывают результаты исследований [1, 2], разработанная В.В. Вагнером теория отношений [3] является эффективным инструментом в изучении сходимостей в функциональных пространствах на основе нестандартного подхода к топологии [4]. Настоящая статья продолжает эти исследования и посвящена изучению непрерывных сходимостей в пространстве мультифункций с помощью методов алгебры отношений [3] и нестандартного анализа [5]. В начале работы канонически определяются непрерывные сходимости мультифункций и обосновывается их согласованность с отображением вычисления. Здесь также приводятся условия, при которых непрерывные сходимости являются топологиями, хаусдорфовыми или регулярными сходимостями, описываются компактные множества мультифункций. Основные результаты работы описывают псевдотопологические алгебры непрерывных мультифункций.

Основные результаты работы докладывались на Международной конференции, посвященной 100-летию профессора В.В. Вагнера.

В работе используются методы нестандартного анализа [5], общепринятая топологическая терминология [6, 7] и отдельные результаты из нестандартной топологии [2, 4].

Как обычно [4], для простоты рассуждений основные множества X рассматриваемых пространств сходимости считаются подмножествами множества индивидов $\mathbf{S}$, над которым строится теоретико-множественная суперструктура $V(\mathbf{S})$ [5]. Для таких множеств X определено нестандартное расширение ${}^*X$ и любой фильтр $\mathcal{F}$ над X полностью определяется своей монадой $\mu\mathcal{F} = \bigcap\{{}^*A : A \in \mathcal{F}\}$. Монады ультрафильтров над множеством X разбивают расширение ${}^*X$ на классы эквивалентности ε_X. Подмножество $M \subset {}^*X$ называется насыщенным, если $\varepsilon_X(M) \subset M$, и монадой, если $M = \mu\mathcal{F}$ для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ над множеством X.

При нестандартном подходе к топологии [4] произвольная сходимость [6] на множестве X определяется соответствием $\rho \subset X \times {}^*X$, для которого все значения $\rho(a) = \{x \in {}^*X : (a, x) \in \rho\}$ $(a \in X)$ являются насыщенными подмножествами ${}^*X$ и удовлетворяют условию $a \in \rho(a)$. Такие соответствия называются (нестандартными) сходимостями и на них распространяется топологическая терминоло-