

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

### АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ДИНАМИКЕ ОБОЛОЧЕК ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Л.Ю. Коссович

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: KossovichLYu@info.sgu.ru

В работе описаны асимптотические методы, разработанные для построения математической модели нестационарных волновых процессов в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях, а также предназначенные для решения краевых задач для компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) с различными показателями изменчивости и динамичности. Приведена классификация асимптотических приближений. Изложено построение низкочастотного и коротковолнового приближений, погранслоев в окрестностях квазифронта, фронтов волн расширения и сдвига и условного фронта поверхностных волн Рэлея. Описаны схемы расчленения нестационарного НДС в случаях ударных торцевых продольных воздействий тангенциального, изгибающего, а также воздействия нормального типа.

#### Asymptotic Methods in Dynamics of Shells under Shock Loading

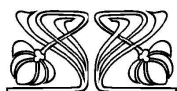
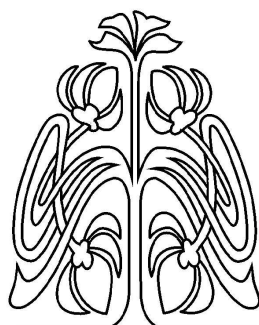
L.Yu. Kossovich

The paper deals with the asymptotic methods, developed for creating a mathematic model of non-stationary wave propagation in shells of revolution under shock impacts of tangential, bending types and shock impacts of normal type; the methods are also aimed at solving the boundary value problems for the strain-stress state (SSS) components with different values of variability and dynamicity indices. Classification of asymptotic approximations is also presented. This classification defines three different types of separation scheme of non-stationary SSS. This scheme uses the following asymptotic approximations: short-wave and low-frequency ones, boundary layers in the vicinities of the quasi-front, the dilatation and shear wave fronts, and the front of Rayleigh surface waves. The schemes of ranges of applicability of approximate theories and schemes for the longitudinal stress resultant, bending moment and transverse shear force are represented.

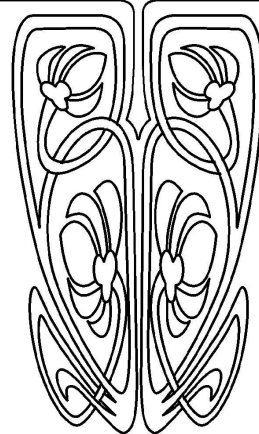
#### ВВЕДЕНИЕ

Целью представленной работы является окончательная систематизация результатов разработки асимптотических методов исследования нестационарных волн для тонких упругих оболочек вращения. Данный обзор обобщает материалы, изложенные в [1], добавлением последнего характерного типа НДС (возникающего при торцевых ударных воздействиях нормального типа и при нормальных поверхностных нагрузках), изученного в последние несколько лет, а также более подробным изложением разработанных асимптотических методов решения краевых задач для приближенных составляющих.

Представленные исследования являются обобщением асимптотического подхода, разработанного А.Л. Гольденвейзером [2,3] в задачах статики и стационарной динамики. Основы схемы расчленения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





изменяемости впервые представлены в монографии [4]. Решения для нестационарных волн строятся с помощью безмоментной и моментной составляющих Кирхгофа – Лява, квазистатического погранслоя типа Сен-Венана и введенного в [4] нового типа составляющей — быстроизменяющегося по продольной координате и времени динамического погранслоя, описывающего НДС в некоторый начальный промежуток времени и в достаточно широкой окрестности фронтов волн. Эта схема расчленения нестационарного НДС явилась принципиально новой, отличающейся в корне от схем расчленения, использующихся в статике и стационарной динамике [2, 3]. В отличие от метода положения решений с различными показателями изменяемости (в частности, метода погранслоя), используется вариант метода сращиваемых разложений. При этом доказано существование областей согласования составляющих Кирхгофа – Лява и динамических погранслоев различного типа, где эти решения совпадают с заданной асимптотической точностью. Наличие областей согласования показывает достаточную точность постановки краевых задач для всех составляющих, а также корректность представленной схемы расчленения. Отметим, что применение этой схемы основывается на существенной неоднородности показателей изменяемости и динамичности по координатам и времени.

Дальнейший анализ решений для динамического погранслоя показал, что динамический погранслоем сам является достаточно неоднородным по изменяемости, вместо которого можно использовать три составляющие различного типа, которые и были введены в [5, 6]. Среди них — погранслоем параболического типа в окрестности квазифронта, коротковолновые приближения для квазиплоской и квазиантиплоской задач теории упругости, а также погранслоем гиперболического типа в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига. Причем если в [5, 6] уравнения параболического погранслоя выводились на базе теории оболочек высокого порядка приближения, то в [7, 8] была разработана методика непосредственного их вывода прямо из точных трехмерных уравнений (в этих работах решались аналогичные задачи для случаев анизотропных и вязкоупругих оболочек).

Отметим, что предыдущие результаты относятся к случаям, когда нестационарные волны в оболочке возникают при ударных торцевых воздействиях, относящихся по классификации У.К. Нигула [9] к случаям продольного воздействия тангенциального типа LT и продольного воздействия изгибающего типа LM. В последние годы был рассмотрен третий и завершающий, с точки зрения типа схемы расчленения нестационарного НДС, вид воздействия: нормальное воздействие вида NW [9]. В отличие от предшествующих случаев, появляется новый тип НДС в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Рассмотрение этого типа НДС началось с анализа нестационарного НДС в случае задачи Лэмба для полуплоскости [10, 11]. Выведено гиперболическое уравнение, описывающее распространение волны Рэлея вдоль границы полуплоскости, а затухание решения в глубь полуплоскости определяется путем последовательного решения двух однотипных задач Неймана для потенциалов Ламе. Полученные методы были использованы для построения погранслоя в пластинах и цилиндрических оболочках в работах [12–14]. В целом нестационарное НДС при таких воздействиях исследовано в работах [15–19].

Указанными работами полностью завершилось построение асимптотического подхода к исследованию нестационарных волн в тонких упругих оболочках. Корректность окончательной схемы расчленения определяется наличием областей согласования между различными приближениями.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим оболочку вращения (рис.1), отнесенную к криволинейным координатам  $(s, \theta, z)$ , где  $s$  — длина дуги вдоль образующей,  $\theta$  — угол в окружном направлении,  $z$  — координата внешней нормали срединной поверхности.

Изучается действие ударной нагрузки, приложенной к краю и зависящей от времени как единичная функция Хевисайда.

Рассматриваются три типа воздействия, а именно продольное воздействие тангенциального типа, продольное воздействие изгибающего типа и нормальное воздействие, соответствующие классификации У.К. Нигула [9]. В первом случае (LT-нагружение) мы имеем ненулевое значение продольного

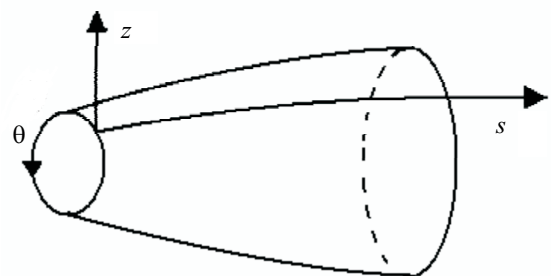


Рис. 1



нормального усилия. Если мы обозначим напряжения и перемещения  $\sigma_{ij}$  и  $v_i$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), то следующие граничные условия соответствуют этой нагрузке:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= IH(t)f(\theta), \quad v_2 = v_3 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \\ f(\theta) &= \cos(m\theta), \quad \text{или} \quad f(\theta) = -\sin(m\theta). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $I$  — амплитуда нагрузки,  $H(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $t$  — время. Во втором случае (LM-нагружение) мы имеем на торце ненулевой изгибающий момент. Пример соответствующих граничных условий имеет вид

$$\sigma_{11} = IzH(t)f(\theta), \quad v_2 = v_3 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \tag{1.2}$$

В третьем же случае (NW-нагружение) мы имеем на торце ненулевую перерезывающую силу. Этой нагрузке соответствуют следующие граничные условия:

$$\sigma_{13}^{(1)} = IH(t)f(\theta), \quad v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \tag{1.3}$$

Рассматриваем только однородные начальные условия

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{1.4}$$

и примем, что лицевые поверхности оболочки свободны от напряжений

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \tag{1.5}$$

где  $h$  — полутолщина оболочки. Мы также предположим, что упругие волны не достигают второго края оболочки и ограничим себя случаем, когда расстояние, пройденное фронтом, соизмеримо с характерным значением радиусов кривизны.

Приведем точные трехмерные уравнения теории упругости. Поскольку длинноволновые составляющие выводятся для самого общего случая тонких оболочек, выпишем сначала трехмерные уравнения для этого общего случая геометрии.

Пусть срединная поверхность оболочки отнесена к ортогональным криволинейным координатам  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ;  $z$  — как и прежде, нормальная координата. Примем для механических параметров следующие обозначения:  $\rho$  — плотность,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Тогда уравнения движения и закона Гука запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial z} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) + \\ + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial z} \sigma_{zi} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} \sigma_{iz} - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{j3}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} \sigma_{ii} - \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial z} \sigma_{jj} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial z} \sigma_{33} + \\ + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{i3} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{j3} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$



$$\begin{aligned}
 \sigma_{ii} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_i + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial z} v_3 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} v_3 \right], \\
 \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_i + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} v_3 + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial z} v_3 \right) + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right], \\
 \sigma_{3i} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial v_i}{\partial z} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} v_i \right], \\
 \sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_i - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_j \right],
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

где  $i \neq j = 1, 2$  и

$$\kappa = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}. \tag{1.8}$$

Здесь  $c_1$  — скорость волны расширения,  $c_2$  — скорость волны сдвига,  $H_i$  — параметры Ламе:

$$H_i = A_i \left( 1 + \frac{z}{R_i} \right), \tag{1.9}$$

где  $A_i$  — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности,  $R_i$  — ее главные радиусы кривизны.

Перепишем уравнения (1.6)–(1.7) для оболочки вращения. Обозначим через  $A = A(s)$  расстояние от точки срединной поверхности до оси вращения, деленное на  $R$ , где  $R$  — характерное значение радиусов кривизны срединной поверхности. Тогда уравнения движения и закон Гука запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} + k(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} + 2k\sigma_{12} - \rho \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + k\sigma_{31} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right) + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right], \\
 \sigma_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right) + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right], \\
 \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right) + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right], \\
 \sigma_{31} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial v_3}{\partial s} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right], \\
 \sigma_{32} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{AR} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right], \\
 \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial s} - kv_2 \right],
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где  $k = \frac{1}{A} \frac{dA}{ds}$ .



## 2. КЛАССИФИКАЦИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В теории упругих тонкостенных конструкций асимптотические методы имеют важнейшее значение как при выводе приближенных теорий, так и при решении краевых задач для составляющих НДС. Однако данная работа посвящена, в основном, общим вопросам построения НДС с помощью приближенных теорий, построенных асимптотическим методом на базе точной трехмерной теории.

Вывод асимптотически оптимальных уравнений для приближенных теорий производится с помощью метода асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости, который основан на малости геометрического параметра  $\eta = h/R$ .

Динамические процессы в тонких упругих оболочках характеризуются следующими двумя физическими параметрами:  $l$  — отношение длины волны к  $R$  и  $T$  — отношение временного масштаба к  $Rc_2^{-1}$ . Удобно их выразить в степенях малого параметра  $\eta$

$$l = \eta^q, \quad T = \eta^a. \quad (2.1)$$

Показатели  $q, a$  являются основными понятиями. Они называются показателями изменяемости и динамичности.

В случае стационарной динамики параметры  $l$  и  $T$  (и соответственно  $q$  и  $a$ ) являются для каждой стационарной волны в области, занятой телом, как правило, постоянными. В нестационарной динамике, наоборот, они зависят от координат и времени, то есть показатели  $q$  и  $a$  имеют локальный характер.

Растянем масштаб независимых переменных, положив

$$\alpha_i = R\eta^q \xi_i, \quad z = R\eta \zeta, \quad t = Rc_2^{-1} \eta^a \tau, \quad (2.2)$$

и предположим, что дифференцирование по безразмерным переменным  $\xi_i$  и  $\tau$  не изменяет асимптотический порядок неизвестных величин. Зависимость неизвестных величин от толщинной переменной  $\zeta$  часто определяется явно при выводе приближенных уравнений асимптотическим методом. Таким образом, введение независимых переменных (2.2) с учетом изменяемости НДС позволяет методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости вывести асимптотически приближенные уравнения для составляющих НДС при различных значениях показателей изменяемости и динамичности.

При построении нестационарного НДС с граничными условиями типа (1.1)–(1.3) используются в основном составляющие с показателями изменяемости и динамичности, удовлетворяющими следующим условиям:

$$0 \leq q \leq 1, \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (2.3)$$

Введем классификацию рассматриваемых асимптотических приближений. Приближения, для которых  $q < 1$  и  $a < 1$ , отнесены к так называемым длинноволновым низкочастотным; приближения, для которых  $q < 1$  и  $a = 1$ , отнесены к длинноволновым высокочастотным; приближения, для которых  $q = 1$  и  $a < 1$ , отнесены к коротковолновым низкочастотным и, наконец, приближения, для которых  $q = 1$  и  $a = 1$ , отнесены к коротковолновым высокочастотным. Эта классификация представлена на рис.2. Отметим, что длинноволновые низкочастотные приближения определяют безмоментную и изгибную составляющие, описываемые классической двумерной теорией Кирхгофа – Лява.

Для длинноволновых приближений длина волны много больше толщины тела ( $l \gg \eta$ ), в то время как для низкочастотных приближений временной масштаб много больше времени прохождения фронтами волн расширения и сдвига расстояния, равного толщине оболочки ( $T \gg \eta$ ). Для коротковолновых приближений эти длины и для высокочастотных приближений эти времена одного порядка, то есть  $l \sim \eta$  и  $T \sim \eta$  соответственно.



Рис. 2

Разделим длинноволновые приближения на тангенциальное и поперечное (рис. 3). Для тангенциальных приближений тангенциальные компоненты вектора перемещений велики по сравнению с его нормальной компонентой ( $v_i \gg v_3$ ). Наоборот, для поперечных приближений нормальная компонента вектора перемещений велика по сравнению с его тангенциальными компонентами:  $v_3 \gg v_i$ .

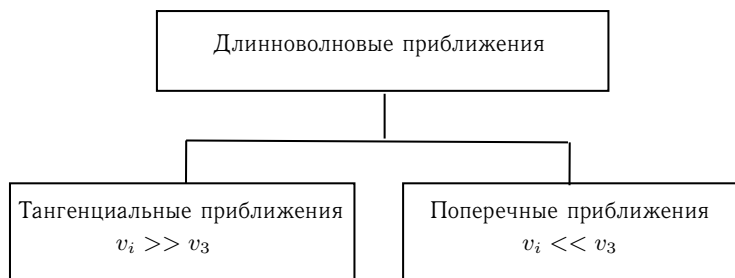


Рис. 3

Коротковолновые низкочастотные приближения не представляют большого интереса в динамике. Показано [6], что они являются частным случаем (квазистатическим) коротковолновых высокочастотных приближений. В нестационарной динамике они дают хорошо известный квазистатический погранслои типа Сен-Венана, описанный для статики в работе [2]. Поэтому мы часто называем длинноволновые низкочастотные приближения низкочастотными и коротковолновые высокочастотные приближения — коротковолновыми.

Асимптотические приближения, отвечающие условию

$$q > 1, \quad a > 1, \tag{2.4}$$

являются обобщением коротковолновых приближений. Они используются в нестационарной динамике при построении погранслоев в окрестностях фронтов волн. Выделены следующие типы погранслоев (рис. 4), которые названы погранслоями гиперболического типа (в окрестностях фронтов волн), параболического типа (в окрестности квазифронта двумерной волны растяжения) и эллиптического типа (в окрестности условного фронта поверхностных волн Релея).

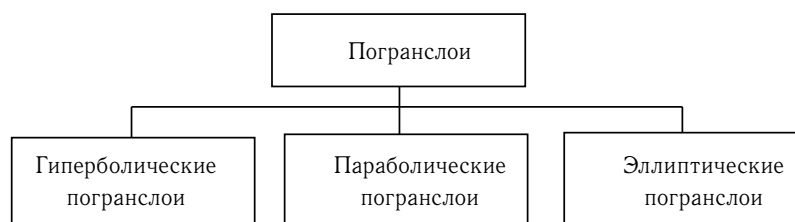


Рис. 4



### 3. НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим длинноволновые низкочастотные приближения трехмерных уравнений теории упругости в общем случае тонких оболочек произвольной формы.

В случае плоской пластины симметричный и антисимметричный по нормальной координате типы граничных условий порождают симметричный и антисимметричный типы НДС. При этом длинноволновые низкочастотные приближения разделяются на два типа: тангенциальные и поперечные, соответствующие теориям растяжения и изгиба тонких пластин. Естественно предположить, что также имеют место два разных рассматриваемых приближения в общем случае тонких оболочек. Начнем рассмотрение с тангенциального приближения.

При построении тангенциального приближения показатели изменчивости и динамичности связаны соотношением  $q = a$  ( $0 \leq q < 1$ ) и компоненты НДС имеют следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} v_i &= R(\eta^q v_i^0 + \eta^{1+q} v_i^1), & v_3 &= R(\eta v_3^0 + \eta^{2q} v_3^1), \\ \sigma_{ii} &= E(\sigma_{ii}^0 + \eta \sigma_{ii}^1), & \sigma_{ij} &= E(\sigma_{ij}^0 + \eta \sigma_{ij}^1), \\ \sigma_{3i} &= E(\eta^{3-3q} \sigma_{3i}^0 + \eta^{2-q} \sigma_{3i}^1), & \sigma_{33} &= E(\eta^{2-2q} \sigma_{33}^0 + \eta^{3-2q} \sigma_{33}^1), \quad (i \neq j = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь предполагается, что величины с индексами имеют один и тот же асимптотический порядок.

Формулы (3.1) обеспечивают разделение искомого НДС на основную и дополнительную компоненты. Величины, входящие в основное НДС, отмечены индексом «0», в то время как величины, входящие в дополнительное НДС, отмечены индексом «1».

Основное НДС аналогично НДС плоского слоя, тогда как дополнительное — результат действия поверхностной кривизны. Если основное НДС симметрично относительно срединной поверхности, то дополнительное антисимметрично, и наоборот. Для симметричного НДС  $v_i, \sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}$  являются четными функциями толщинной координаты, и  $v_3, \sigma_{3i}$  — нечетные функции. Для антисимметричного НДС все величины имеют противоположную четность, а именно  $v_i, \sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}$  являются нечетными функциями толщинной координаты, а  $v_3, \sigma_{3i}$  — четными.

В рассматриваемом случае основное НДС симметрично относительно срединной поверхности. С точки зрения использования рассматриваемых приближений в нестационарных задачах произведенный набор требований, накладываемых на показатели изменчивости, динамичности и интенсивности, позволяет удовлетворить этим приближениям (по обычной терминологии безмоментной составляющей) тангенциальной части граничных условий в двумерной форме, а также описать распространение волн сжатия и сдвига (асимптотически главная часть разрешающей системы для приближения содержит старшие производные от тангенциальных перемещений по продольной координате и времени).

Описание процесса асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости приведено подробно в [10, 6]. Здесь мы укажем только основные его вехи. Подставим асимптотики (3.1) в уравнения (1.5)–(1.6) и проведем замену переменных согласно (2.2) при  $a = q$ . Разделяя каждое из уравнений на две части, принимая во внимание четность членов по  $\zeta$  и пренебрегая членами порядка  $O(\eta^{2-2q})$  (асимптотическая погрешность классической теории оболочек Кирхгова – Лява), приходим к замкнутой системе относительно асимптотически главных компонент  $v_3^1, v_i^0, \sigma_{ii}^0$  и  $\sigma_{ij}^0$ . Выведена также система, определяющая асимптотически второстепенные компоненты через асимптотически главные. Эти две системы дают возможность установить следующую зависимость от нормальной координаты:

$$\begin{aligned} v_i^0 &= v_i^{(0)}, & v_3^1 &= v_3^{(0)}, & \sigma_{ii}^0 &= \sigma_{ii}^{(0)}, & \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^{(0)}, \\ v_i^1 &= \zeta v_i^{(1)}, & v_3^0 &= \zeta v_3^{(1)}, & \sigma_{ii}^1 &= \zeta \sigma_{ii}^{(1)}, & \sigma_{ij}^1 &= \zeta \sigma_{ij}^{(1)}, \\ \sigma_{3i}^1 &= \sigma_{3i}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{3i}^{(2)}, & \sigma_{33}^0 &= \sigma_{33}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{33}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выведены уравнения для величин с индексами в скобках, не зависящих от  $\zeta$ . Запишем разрешающую систему относительно следующих общепринятых в теории оболочек двумерных величин:  $T_i$  — продольные усилия,  $S_{ij}$  — сдвигающие усилия,  $u_i$  — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности,  $w$  — прогиб:



$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i u_j + \frac{w}{R_i} + \nu \left( \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + k_j u_j + \frac{w}{R_j} \right) \right\}, \\
S_{ij} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left\{ \frac{A_i}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{u_i}{A_i} \right) + \frac{A_j}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{u_j}{A_j} \right) \right\}, \\
\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (T_i - T_j) + 2k_i S_{ij} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где  $k_i = \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}$  ( $i \neq j = 1, 2$ ).

Рассмотрим теперь поперечное приближение. Показатели изменяемости и динамичности связаны соотношением  $q = (a + 1)/2$  ( $0 \leq a < 1$ ), а асимптотика НДС определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
v_i &= R(\eta v_i^0 + \eta^{2q} v_i^1), \quad v_3 = R(\eta^q v_3^0 + \eta^{q+1} v_3^1), \\
\sigma_{ii} &= E(\eta^{1-q} \sigma_{ii}^0 + \eta^q \sigma_{ii}^1), \quad \sigma_{ij} = E(\eta^{1-q} \sigma_{ij}^0 + \eta^q \sigma_{ij}^1), \\
\sigma_{3i} &= E(\eta^{2-2q} \sigma_{3i}^0 + \eta^{3-2q} \sigma_{3i}^1), \quad \sigma_{33} = E(\eta^{3-3q} \sigma_{33}^0 + \eta^{2-q} \sigma_{33}^1) \quad (i \neq j = 1, 2).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Основное НДС антисимметрично относительно срединной поверхности. С точки зрения использования рассматриваемого приближения в нестационарных задачах, указанный выбор показателей изменяемости, динамичности и интенсивности позволяет поперечному приближению (изгибной составляющей по обычной терминологии) удовлетворить нетангенциальной части граничных условий, снять невязку, появившуюся в этих условиях после построения безмоментной составляющей, а также обеспечить частичное моделирование поперечной изгибной волны (показатели изменяемости и динамичности выбираются так, чтобы асимптотически главная часть разрешающей системы содержала старшие производные от прогиба по продольной координате и времени). Выведены системы для асимптотически главных и второстепенных компонент НДС [6, 10], дающие возможность установить следующую зависимость от нормальной координаты:

$$\begin{aligned}
v_i^1 &= v_i^{(0)}, \quad v_3^0 = v_3^{(0)}, \quad \sigma_{ii}^1 = \sigma_{ii}^{(0)}, \quad \sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^{(0)}, \\
v_i^0 &= \zeta v_i^{(1)}, \quad v_3^1 = \zeta v_3^{(1)}, \quad \sigma_{ii}^0 = \zeta \sigma_{ii}^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^0 = \zeta \sigma_{ij}^{(1)}, \\
\sigma_{3i}^0 &= \sigma_{3i}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{3i}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^1 = \sigma_{33}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^0 = \zeta \sigma_{33}^{(1)} + \zeta^3 \sigma_{33}^{(3)}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Выведены уравнения для величин с индексами в скобках, не зависящих от  $\zeta$ . Запишем разрешающую систему относительно усилий, перемещений точек срединной поверхности, а также изгибающих моментов  $G_i$ , скручивающих моментов  $H_{ij}$  и перерезывающих сил  $N_i$ :

$$\begin{aligned}
G_i &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right) + k_i \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} + \nu \left[ \frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right) + k_j \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right] \right\}, \\
H_{ij} &= -\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right) - k_j \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right\}, \\
T_i &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i u_j + \frac{w}{R_i} + \nu \left( \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + k_j u_i + \frac{w}{R_j} \right) \right\}, \\
S_{ij} &= \frac{Eh}{1-\nu} \left\{ \frac{A_i}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{u_i}{A_i} \right) + \frac{A_j}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{u_j}{A_j} \right) \right\}, \\
\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (T_i - T_j) + 2k_i S_{ij} &= 0, \\
\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} - k_2 N_1 - k_1 N_2 + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{1}{A_i} \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (G_i - G_j) + 2k_i H_{ij} - N_i &= 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$





Отметим, что полученные приближения являются, по сути, асимптотическим обобщением соответствующих составляющих теории Кирхгофа – Лява. Одним из принципиальных положений этого обобщения является возможность (а во многих случаях и необходимость) учета изменения длины нормального элемента:

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{2Eh}(T_1 + T_2). \quad (3.7)$$

#### 4. КОРОТКОВОЛНОВЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В случае коротковолновых высокочастотных приближений ( $q = a = 1$ ) легко выписать асимптотику НДС. Дело в том, что при  $q = 1$  длина волны имеет порядок толщины, и все направления становятся эквивалентными. Очевидно, что искомое НДС симметрично или антисимметрично относительно срединной поверхности с асимптотической погрешностью  $O(\eta)$ . Следовательно, асимптотика НДС имеет вид

$$\sigma_{kl} = E(\sigma_{kl}^0 + \eta\sigma_{kl}^1), \quad v_m = R\eta(v_m^0 + \eta v_m^1) \quad (k, l, m = 1, 2, 3). \quad (4.1)$$

Здесь, как в предыдущем пункте, мы разделяем искомое НДС на основную (величины с индексом «0») и дополнительную компоненты.

Выпишем уравнения в размерной форме для асимптотически главных компонент НДС:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial z} + k_j(\sigma_{ii} + \sigma_{jj}) + k_i(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{j3}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + k_j \sigma_{i3} + k_i \sigma_{j3} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0, \\ \sigma_{ii} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + k_j v_i \right) + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} k_i v_j \right], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + k_j v_i + k_i v_j \right) + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right], \\ \sigma_{zi} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial v_i}{\partial z} \right], \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_i} - k_i v_i - k_j v_j \right] \quad (i \neq j = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Уравнения (4.2) аналогичны уравнениям трехмерной упругости при условии, что метрика срединной плоскости слоя совпадает с метрикой срединной поверхности оболочки. Коэффициенты этих уравнений не зависят от толщинной координаты  $\alpha_3$ . Более того, они являются функциями коэффициентов первой квадратичной формы срединной поверхности.

В случае оболочки вращения разрешающие уравнения (4.2) могут быть значительно упрощены. Рассмотрим в деталях случай, когда колебания являются коротковолновыми только в направлении меридиана. Предположим, что изменяемость по окружной координате имеет показатель изменяемости  $p < 1$ . Тогда выделяются два типа асимптотик НДС. Асимптотика первого типа имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ll} &= E\sigma_{ll}^*, \quad \sigma_{12} = E\eta^{1-p}\sigma_{12}^*, \quad \sigma_{31} = E\sigma_{31}^*, \quad \sigma_{32} = E\eta^{1-p}\sigma_{32}^*, \\ v_1 &= R\eta v_1^*, \quad v_2 = R\eta^{2-p}v_2^*, \quad v_3 = R\eta v_3^* \quad (l = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.3)$$

При этом асимптотически главными компонентами НДС являются  $\sigma_{ll}$  ( $l = 1, 2, 3$ ),  $\sigma_{31}$ ,  $v_1$  и  $v_3$ . Заметим, что эти напряжения и перемещения определяют плоскую задачу теории упругости, а асимптотически главные части разрешающих уравнений совпадают с уравнениями плоской задачи теории упругости. Асимптотически второстепенные напряжения и перемещения появляются в этих уравнениях только с множителем  $\eta^{2-2p}$ .

Анализ показал [4, 6], что для построения решения для колебаний с погрешностью  $\delta = O(\eta + \eta^{2-2p})$  разрешающие уравнения коротковолнового приближения должны быть построены



с асимптотической точностью  $\delta$ , то есть члены порядка  $O(\eta + \eta^{2-2p})$  должны быть в разрешающих уравнениях сохранены.

Исследования также показали [4, 6], что второе разрешающее уравнение движения может быть максимально упрощено (оно заменяется уравнением первого порядка), и системы разрешающих уравнений в размерном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} + k(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{1}{RA} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{\partial v_2}{\partial s} = 0, \\
& \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + k\sigma_{31} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0, \\
& \sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right) + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right], \\
& \sigma_{22} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right) + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right], \\
& \sigma_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right) + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right], \\
& \sigma_{31} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_3}{\partial s} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right), \\
& \sigma_{32} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{AR} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right), \\
& \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial s} \right).
\end{aligned}$$

Отметим, что модифицированное второе уравнение движения имеет очевидный физический смысл. Оно соответствует отсутствию вращения вокруг нормали к срединной поверхности. Заметим также, что с введением этого модифицированного уравнения система описывает только волны расширения и поперечные волны, определяющие деформацию изгиба.

Перейдем к рассмотрению асимптотики второго типа:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ll} &= E\eta^{1-p}\sigma_{ll}^*, \quad \sigma_{12} = E\sigma_{12}^*, \quad \sigma_{31} = E\eta^{1-p}\sigma_{31}^*, \quad \sigma_{32} = E\sigma_{32}^*, \\
v_1 &= R\eta^{2-p}v_1^*, \quad v_2 = R\eta v_2^*, \quad v_3 = R\eta^{2-p}v_3^* \quad (l = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

При этом величины, характеризующие антиплоскую задачу теории упругости (напряжения  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{32}$  и перемещение  $v_2$ ), являются асимптотически главными, а асимптотически главные части разрешающих уравнений совпадают с уравнениями антиплоской задачи теории упругости.

Анализ показал, что в рассматриваемом случае можно модифицировать первое и третье уравнения движения, и система разрешающих уравнений в размерном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} = 0, \\
& v_3 = 0, \\
& \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} + 2k\sigma_{12} - \rho \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = 0, \\
& \sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right), \\
& \sigma_{33} = \frac{E\nu}{2(1+\nu^2)\kappa^2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{31} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial z}, \quad \sigma_{32} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_2}{\partial z}, \\
& \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{RA} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial s} - kv_2 \right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Физический смысл модифицированных уравнений движения ясен: они соответствуют отсутствию объемного расширения и нормального перемещения.



## 5. ПОГРАНСЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ КВАЗИФРОНТА

Хорошо известно, что как классическая теория обобщенного плоского напряженного состояния, так и теория оболочек Кирхгофа – Лява искажают скорость волны расширения. Вместо  $c_1$  они задают скорость  $c_3 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$ . Фронт волны расширения по классическим двумерным теориям пластин и оболочек является фактически квазифронтом: в его окрестности трехмерное решение хотя и быстро изменяется, но является непрерывным.

Предположим, что в окрестности квазифронта преобладает длинноволновый характер решения и показатель изменчивости принадлежит полуинтервалу

$$\frac{2}{3} \leq q < 1. \quad (5.1)$$

Классическая теория оболочек не работает на этом полуинтервале, и при построении асимптотически оптимальных уравнений следует учитывать члены более высокого порядка малости. Введем безразмерные переменные  $x$  и  $t_3$  [7, 8]

$$x = \frac{1}{R\eta^{2/3}}(tc_3 - s), \quad t_3 = \frac{tc_3}{R} \quad (5.2)$$

и предположим, что дифференцирование по  $x$  и  $t_3$  не изменяет асимптотического порядка неизвестных величин. Считаем, что  $q = a = 2/3$  и толщина погранслоя имеет порядок  $O(\eta^{2/3})$ .

Пусть асимптотика НДС в этой области определяется выражениями:

$$\begin{aligned} v_1 &= R \left( \eta^{2/3} v_1^0 + \eta^{5/3} v_1^1 \right), & v_2 &= R \left( \eta^{4/3-p} v_2^0 + \eta^{7/3-p} v_2^1 \right), \\ v_3 &= R \left( \eta v_3^0 + \eta^{4/3} v_3^1 \right), & \sigma_{11} &= E(\sigma_{11}^0 + \eta \sigma_{11}^1), & \sigma_{22} &= E(\sigma_{22}^0 + \eta \sigma_{22}^1), \\ \sigma_{33} &= E \left( \eta^{2/3} \sigma_{33}^0 + \eta^{5/3} \sigma_{33}^1 \right), & \sigma_{13} &= E \left( \eta \sigma_{13}^0 + \eta^{4/3} \sigma_{13}^1 \right), \\ \sigma_{23} &= E \left( \eta^{5/3-p} \sigma_{23}^0 + \eta^{2-p} \sigma_{23}^1 \right), & \sigma_{12} &= E \left( \eta^{2/3-p} \sigma_{12}^0 + \eta^{5/3-p} \sigma_{12}^1 \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пренебрегая асимптотически малыми членами в разрешающих уравнениях (1.9)–(1.10) с учетом (5.2)–(5.3) и интегрируя эти уравнения по  $\zeta$ , устанавливаем зависимость неизвестных величин от нормальной координаты:

$$\begin{aligned} v_1^0 &= v_{1,0}^{(0)} + \eta^{2/3} \left( v_{1,1}^{(0)} + \zeta^2 v_{1,1}^{(2)} \right), & v_2^0 &= v_2^{(0)}, & v_3^0 &= v_3^{(0)}, \\ \sigma_{11}^0 &= \sigma_{11,0}^{(0)} + \eta^{2/3} \left( \sigma_{11,1}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{11,1}^{(2)} \right), & \sigma_{22}^0 &= \sigma_{22}^{(0)}, & \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^{(0)}, \\ v_i^1 &= \zeta v_i^{(1)}, & v_3^1 &= \zeta v_3^{(1)}, & \sigma_{ii}^1 &= \zeta \sigma_{ii}^{(1)}, & \sigma_{ij}^1 &= \zeta \sigma_{ij}^{(1)}, \\ \sigma_{3i}^1 &= \sigma_{3i}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{3i}^{(2)}, & \sigma_{33}^0 &= \sigma_{33}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{33}^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь учитывается тот факт, что для построения уравнений погранслоя в окрестности квазифронта компоненты НДС  $v_1^0$  и  $\sigma_{11}^0$  должны определяться с большей, чем остальные компоненты, точностью  $O(\eta^{2/3})$ .

Введем усилия и перемещения срединной поверхности по формулам:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2Eh\sigma_{11,0}^{(0)}, & T_2 &= 2Eh\sigma_{22}^{(0)}, & S_{ij} &= 2Eh\eta^{2/3-p}\sigma_{ij}^{(0)}, \\ u_1 &= R\eta^{2/3}v_{1,0}^{(0)}, & u_2 &= R\eta^{4/3-p}v_2^{(0)}, & w &= R\eta^{4/3}v_3^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Тогда для асимптотически главных двумерных компонент НДС  $u_1$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^3 \partial t_3} + R \frac{k}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \frac{\nu^2}{6(1-\nu^2)} \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} &= 0, \\ T_1 &= -\frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{R\eta^{2/3}} \frac{\partial u_1}{\partial x}, & T_2 &= -\frac{2Eh\nu}{1-\nu^2} \frac{1}{R\eta^{2/3}} \frac{\partial u_1}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.6)$$



Рассмотрим погранслоя для волн, распространяющихся в направлении возрастания координаты  $s$ . В этом случае можно получить разрешающее уравнение относительно продольного перемещения, допускающее простые решения, выражающиеся через функцию Эйри. Получим искомое уравнение, проинтегрировав (5.6) по  $x$ :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_3} + R \frac{k}{2} u_1 - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = 0. \quad (5.7)$$

Перейдем к исходным координатам  $s, \theta, t$ . Уравнения для асимптотически главных компонент примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{1}{c_3} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{k}{2} u_1 - \frac{\nu^2 h^2}{6(1-\nu)^2 c_3^3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} &= 0, \\ T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad T_2 = \frac{2Eh\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial s}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

а для асимптотически второстепенных компонент —

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) u_1 = 0, \\ S_{12} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left( -\frac{1}{RA} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial s} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

## 6. ПОГРАНСЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ ФРОНТОВ ВОЛН РАСШИРЕНИЯ И ВОЛНЫ СДВИГА

В этой части мы описываем вывод уравнений погранслоя в окрестности фронта на примере волны расширения. Рассмотрим сначала погранслоя в случае продольных воздействий тангенциального и изгибающего типов вида (1.1) и (1.2), когда основной разрыв решения, порожденный ударной нагрузкой, переносится нормальным напряжением  $\sigma_{11}$ . Уравнения выводятся для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны (цилиндрические и конические оболочки, а также пластины), когда фронт волны образуется совокупностью нормалей к срединной поверхности.

Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{1}{R\eta^2} (tc_1 - s), \quad t_1 = \frac{tc_1}{R} \quad (6.1)$$

и предположим, что дифференцирование по  $x, t_1$  не изменяет порядка неизвестных величин. Считаем, что толщина погранслоя имеет порядок  $O(\eta^2)$  и  $q = a = 2$ . Определим асимптотику НДС формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= R\eta v_1^*, \quad v_2 = R\eta^{3-p} v_2^*, \quad v_3 = R\eta^2 v_3^*, \\ \sigma_{11} &= E\eta^{-1} \sigma_{11}^*, \quad \sigma_{22} = E\eta^{-1} \sigma_{22}^*, \quad \sigma_{33} = E\eta^{-1} \sigma_{33}^*, \\ \sigma_{13} &= E\sigma_{13}^*, \quad \sigma_{23} = E\eta^{2-p} \sigma_{23}^*, \quad \sigma_{12} = E\eta^{1-p} \sigma_{12}^*, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где все величины со звездочкой имеют одинаковый асимптотический порядок.

Переходя к переменным (6.1) и к величинам со звездочкой и удерживая асимптотически главные члены, получим из уравнений (1.10)–(1.11) замкнутую подсистему для асимптотически главных компонент  $v_1^*, \sigma_{11}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{33}^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x \partial t_1} - \frac{A'}{A} \frac{\partial v_1^*}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_{11}^* &= -\frac{1}{2(1+\nu)\kappa^2} \frac{\partial v_1^*}{\partial x}, \quad \sigma_{22}^* = -\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1^*}{\partial x}, \quad \sigma_{33}^* = -\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1^*}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Вторая подсистема служит для определения асимптотически второстепенных компонент  $v_2^*, v_3^*, \sigma_{13}^*, \sigma_{23}^*, \sigma_{12}^*$  через асимптотически главную компоненту  $v_1^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2^*}{\partial x} - \frac{1}{A} \frac{\partial v_1^*}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_{13}^* &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{23}^* = \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_2^*}{\partial \zeta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v_3^*}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{12}^* = \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{A} \frac{\partial v_1^*}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (6.4)$$



Здесь, как и в предшествующем случае, мы имеем право пренебрегать в уравнении асимптотически второстепенными членами, оставляя в них только асимптотически главную часть. Данный вывод следует из того, что безразмерные переменные (6.1) имеют порядок единицы в рассматриваемой окрестности фронта.

В исходных координатах рассматриваемые подсистемы запишутся в виде:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{A'}{A} \frac{\partial v_1}{\partial s} = 0, \quad (6.5)$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial s}, \quad \sigma_{22} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial s}, \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial s},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial s} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial s} = 0, \quad (6.6)$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v_1}{\partial z}, \quad \sigma_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta}.$$

Можно проверить, что решения должны удовлетворять только одному граничному условию на лицевых поверхностях

$$\sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h \quad (6.7)$$

и одному граничному условию на торце  $s = 0$ :

$$\sigma_{11} = IH(t)f(\theta) \quad (LT - \text{нагружение}), \quad (6.8)$$

$$\sigma_{11} = IzH(t)s(\theta) \quad (LM - \text{нагружение}).$$

Отметим, что если исходные трехмерные уравнения теории упругости описывают три типа волн (продольные волны — волны расширения и поперечные волны — волны сдвига), то полученные уравнения погранслоя в окрестности фронта волны описывают только волны одного типа, задающие рассматриваемый фронт.

При воздействии вида NW передний фронт волны сдвига несет главный разрыв напряжения  $\sigma_{13}$ , отражающий скачок напряжения в начальный момент времени. В рассматриваемом случае оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны фронт образован нормальными к срединной поверхности и определяется уравнением  $s = c_2 t$ .

Асимптотику НДС погранслоя определим следующим образом:

$$v_1 = R\eta^2 v_1^*, \quad v_2 = R\eta^{4-p} v_2^*, \quad v_3 = R\eta v_3^*, \quad (6.9)$$

$$\sigma_{11} = E\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{22} = E\sigma_{22}^*, \quad \sigma_{33} = E\sigma_{33}^*,$$

$$\sigma_{13} = E\eta^{-1} \sigma_{13}^*, \quad \sigma_{23} = E\eta^{1-p} \sigma_{23}^*, \quad \sigma_{12} = E\eta^{2-p} \sigma_{12}^*.$$

В рассматриваемом случае асимптотически главной компонентой вектора перемещений является  $v_3$ , а главным напряжением —  $\sigma_{13}$ . Тогда аналогично предыдущему случаю выводим систему для асимптотически главных компонент НДС

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial s^2} + \frac{A'}{A} \frac{\partial v_3}{\partial s} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_3}{\partial s} \quad (6.10)$$

и для асимптотически второстепенных компонент

$$\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial s^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - \frac{A'}{A} \frac{\partial v_2}{\partial s} \right) + \frac{1}{AR} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) + \frac{A'}{A^2 R} \frac{\partial^2 v_1}{\partial s \partial \theta} = 0,$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad \sigma_{22} = \frac{2\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad \sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad (6.11)$$

$$\sigma_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{AR} \frac{\partial v_3}{\partial \theta}, \quad \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_2}{\partial s} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right).$$



## 7. ПОГРАНСЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ УСЛОВНОГО ФРОНТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЕЛЕЯ

Построим погранслои в окрестности условного фронта поверхностных волн Релея для цилиндрической оболочки [13, 19].

Анализ разрешающих уравнений показывает, что искомое НДС, строящееся с показателями изменяемости и динамичности, равными единице, относится к классу коротковолновых и является симметричным или антисимметричным относительно срединной поверхности с асимптотической погрешностью  $O(\eta)$ :

$$\sigma_{kl} = E (\sigma_{kl}^0 + \eta \sigma_{kl}^1), \quad v_m = R\eta (v_m^0 + \eta v_m^1), \quad k, l, m = 1, 2, 3, \quad (7.1)$$

где индексом «0» обозначена основная составляющая НДС (симметричная или антисимметричная относительно срединной поверхности), а индексом «1» обозначена второстепенная составляющая (соответственно антисимметричная или симметричная). Тогда разрешающие уравнения для основной составляющей будут переписаны в виде, совпадающем с уравнениями для плоского слоя:

$$\begin{aligned} \kappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \kappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

где  $\xi = s/h$ ,  $\zeta = z/h$ ,  $\tau = tc_2/c_1$ .

Аналогично случаю выведения уравнений погранслоя для полуполосы [14] выделим частное решение уравнений (7.2)–(7.3), удовлетворяющее только граничным условиям (1.3) при  $f(\theta) = 1$ . Обозначим это решение верхним индексом «0»:

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &= 0, \quad v_3^{(0)} = -I(\tau - \xi)H(\tau - \xi), \\ \sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{13}^{(0)} = \frac{EI}{2(1+\nu)}H(\tau - \xi). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Решение (7.4), построенное с малой асимптотической погрешностью  $O(\eta)$ , представляет собой поперечную волну, распространяющуюся вдоль оси цилиндрической оболочки в плоскостях, проходящих через эту ось. Построенное таким образом решение не удовлетворяет граничным условиям (1.5) на лицевых поверхностях.

Представим решение рассматриваемой задачи в виде следующей суммы:

$$\text{НДС} = \text{НДС}^{(0)} + \text{НДС}^{(1)}, \quad (7.5)$$

где для решения с верхним индексом «1» на торце и лицевых поверхностях ставятся следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \quad \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi} &= 0, \quad v_1^{(1)} = 0, \\ \zeta = \pm 1 : \quad \sigma_{33}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{13}^{(1)} = -\frac{EI}{2(1+\nu)}H(\tau - \xi). \end{aligned} \quad (7.6)$$

На рис.5 показаны нагружения на лицевые поверхности в этой задаче.

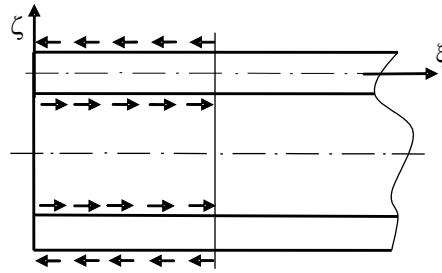


Рис. 5

Граничные условия (7.5) показывают, что деформированное торцевое сечение остается прямолинейным и перпендикулярным к оси цилиндра. Следовательно, если взять бесконечную цилиндрическую оболочку с симметричным нагружением, показанным на рис.6, то деформирование каждой из ее симметричных частей эквивалентно деформированию рассматриваемой полубесконечной оболочки. Поэтому можно перейти к исследованию эквивалентной задачи для бесконечной оболочки, представленной на рис. 6.

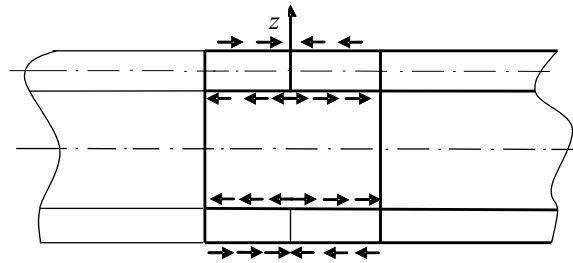


Рис. 6

Тогда вывод уравнений погранслоя можно провести аналогично случаю бесконечной цилиндрической оболочки [13, 14] с помощью символического метода А.И. Лурье. Запишем систему уравнений (7.2)–(7.3) в операторном виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{d\zeta^2} + (\kappa^{-2} \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) v_1 + \frac{\partial_\xi}{1-2\nu} \frac{dv_3}{d\zeta} &= 0, \\ \frac{\partial_\xi}{1-2\nu} \frac{dv_1}{d\zeta} + \kappa^{-2} \frac{d^2 v_3}{d\zeta^2} + (\partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) v_3 &= 0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{dv_3}{d\zeta} + \partial_\xi v_1 \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left( \frac{dv_3}{d\zeta} + \frac{\nu}{1-\nu} \partial_\xi v_1 \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left( \partial_\xi v_3 + \frac{dv_1}{d\zeta} \right), \end{aligned} \quad (7.8)$$

где операторы  $\partial_\xi$ ,  $\partial_\tau$  имеют вид

$$\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (7.9)$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad \frac{dv_3}{d\zeta} &= 0, \quad v_1 = 0, \\ \zeta = \pm 1: \quad \sigma_{33} &= 0, \quad \sigma_{13} = -\frac{EI}{2(1+\nu)h} H(\tau - \xi). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Решаем систему (7.7), рассматриваемую как систему обыкновенных дифференциальных уравнений, и удовлетворяем граничным условиям (7.10). Пренебрегая членами малого порядка [13,14] и рассматривая большие значения времени  $\tau \gg 1$  (когда фронты волн проходят расстояние, много



большее толщины полосы):  $\tau = O(T)$ ,  $T \gg 1$ , введем малый параметр  $\varepsilon = 1/T$  и масштабированные переменные  $y$ ,  $\tau_0$ :

$$y = \frac{\xi_0 - \kappa_R \tau_0}{\varepsilon}, \quad \zeta_0 = \varepsilon \zeta, \quad \tau_0 = \varepsilon \tau, \quad (7.11)$$

где коэффициент  $\kappa_R = c_R/c_2 < 1$ ,  $c_R$  — скорость поверхностных волн Релея. Коэффициент  $k_R$  является корнем известного трансцендентного уравнения:

$$(2 - k_R^2)^2 - 4\sqrt{1 - \kappa_R^2}\sqrt{1 - \kappa^2\kappa_R^2} = 0. \quad (7.12)$$

Введем новые операторы  $\partial_y$ ,  $\partial_{\tau_0}$ :

$$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_{\tau_0} = \frac{\partial}{\partial \tau_0}. \quad (7.13)$$

Отбрасывая в операторном решении асимптотически второстепенные члены и возвращаясь к исходным операторам, введем объемный и сдвиговой потенциалы Ламе  $\varphi$  и  $\psi$ . Разделим их на части, обозначая индексом «1» отрицательное по  $\zeta$  направление распространения возмущения, а индексом «2» — положительное:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2. \quad (7.14)$$

Эти потенциальные функции определяются эллиптическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} &= 0, \\ \left(1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - c_R^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} + 2\kappa_R B \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial s^2} &= \frac{\kappa_R B}{1 - \kappa_R^2/2} S, \quad z = h, \\ 2\kappa_R B \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \kappa_R^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} &= \frac{\kappa_R B}{1 - \kappa_R^2/2} S, \quad z = -h, \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \frac{1}{1 - \kappa_R^2/2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \right), \quad z = h, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= \frac{1}{1 - \kappa_R^2/2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \right), \quad z = -h, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где постоянная  $B$  и функция  $S$  определяются выражениями:

$$B = 2 \left[ \kappa \frac{\kappa_R}{1 - \kappa_R^2} + \frac{\kappa^2 \kappa_R^2}{1 - \kappa^2 \kappa_R^2} - \frac{4\kappa_R^2}{2 - \kappa_R^2} \right]^{-1}, \quad S = \begin{cases} \frac{1}{2} IH(\tau - \xi), & \xi > 0, \\ -\frac{1}{2} IH(\tau - \xi), & \xi < 0. \end{cases}$$

Перемещения и напряжения выражаются через потенциальные функции по формулам

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \frac{\partial \psi_2}{\partial s}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[ - \left(1 - \frac{\kappa_R^2}{2}\right) \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial s \partial z} \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial s \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s \partial z} - \left(1 - \frac{\kappa_R^2}{2}\right) \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial s^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.18)$$





## 8. ВОЛНЫ ПРИ LT НАГРУЖЕНИИ

Проиллюстрируем расчленение НДС на составляющие с различными показателями изменчивости при продольных воздействиях тангенциального типа схемой решения для продольного усилия  $T_1$  в цилиндрической оболочке (осесимметричный случай) в некоторый момент времени, который больше времени пробега передним фронтом волны толщины оболочки (рис.7) и схемой областей применимости приближенных теорий (рис.8).

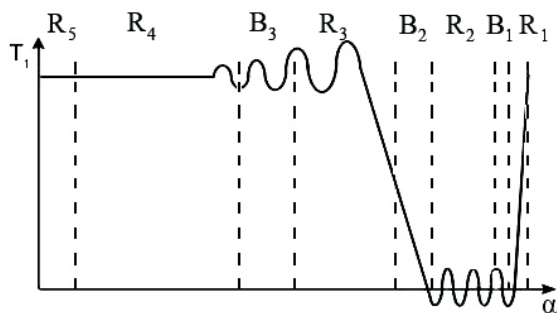


Рис. 7

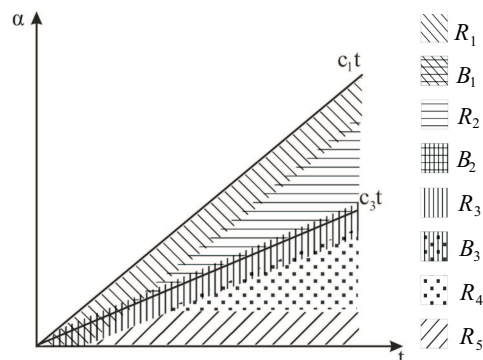


Рис. 8

Применяются [4, 6] следующие приближенные теории:  $R_1$  — гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения,  $R_2$  — квазиплоская квазисимметричная задача теории упругости,  $R_3$  — параболический погранслои в окрестности квазифронта,  $R_4$  — тангенциальное длинноволновое приближение (безмоментная составляющая теории Кирхгофа – Лява),  $R_5$  — наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана;  $B_1, B_2, B_3$  — области согласования.

Исследования работы [4] с учетом выделения вместо динамического погранслоя двух типов погранслоев и квазиплоской задачи, выполненного в [6], показали, что область согласования между безмоментной составляющей и погранслоем в окрестности квазифронта определяется асимптотическим неравенством

$$\eta^{1-p} + \eta^{4/3-2p} + \eta^{2/3} \ll \frac{1}{R} (c_3 t - s) \ll 1. \quad (8.1)$$

В работе [20] найдено расположение области согласования между коротковолновой составляющей (квазиплоская задача теории упругости) и погранслоем в окрестности фронта волны расширения:

$$\eta^2 \ll \frac{1}{R} (c_1 t - s) \ll \eta. \quad (8.2)$$

Отметим, что проведенные исследования сняли дискутирующийся долгое время вопрос о возможности использования параболических уравнений теории Кирхгофа – Лява для описания волновых процессов в оболочках, указав с помощью асимптотических оценок границы области применимости безмоментных и изгибных составляющих. Результаты исследования полностью согласуются с выводами В.В. Новожилова и Л.И. Слепяна [21, 22] о действии принципа Сен-Венана в динамике пластин и оболочек.

В соответствии с (1.1) граничные условия для безмоментной составляющей записываются в виде

$$T_1 = 2hIH(t)f(\theta), \quad u_2 = 0. \quad (8.3)$$

Рассмотрим случай быстроизменяющейся по окружной координате неосесимметричной нагрузки, когда  $p > 0$ . Для решения краевой задачи для безмоментной составляющей в [4] использовано интегральное преобразование Лапласа по времени с последующим обращением изображения различными асимптотическими методами в зависимости от диапазона изменения продольной пространственной переменной и времени. Так, для волны растяжения при



$\xi_0(\tau_0 - \xi_0) = O(\eta^{2p})$  ( $\xi_0 = s/R$ ,  $\tau_0 = c_3 t/R$ ) метод прифронтной асимптотики дал решение в виде разложения по функциям Бесселя

$$T_1^{(p)} = 2hI \left[ J_0 \left( \sqrt{2m_*^2 \eta^{-2p} \xi_0 \tau_p} \right) + \frac{2(1-\nu)\tau_p}{\xi_0} J_2 \left( \sqrt{2m_*^2 \eta^{-2p} \xi_0 \tau_p} \right) + \dots \right] f(\theta) H(\tau_p), \quad (8.4)$$

$$\tau_p = \tau_0 - \xi_0, \quad m_* = m\eta^p,$$

а при  $\xi_0(\tau_0 - \xi_0) \gg \eta^{2p}$  метод перевала позволяет представить решение для волны растяжения в виде

$$T_1^{(p)} = 2hI \left\{ \left[ 1 - \frac{(1-\nu)m_* \xi_0}{2\eta^p} + \frac{(1-\nu)m_*^2 \xi_0^2}{2\eta^{2p}} \right] \exp \left( -m_* \frac{\xi_0}{\eta^p} \right) + \frac{\eta^{p/2} \xi_0}{\pi^{1/2} m_*^{1/2} \tau_0 T_p^{1/4}} \left[ 1 - \frac{(1-\nu)T_p}{\tau_0^2} \right] \left( \cos \frac{m_* T_p^{1/2}}{\eta^p} + \sin \frac{m_* T_p^{1/2}}{\eta^p} \right) \left[ 1 + O \left( \frac{\eta^p}{T_p^{1/2}} \right) \right] \right\} f(\theta), \quad (8.5)$$

$$T_p = \tau_0^2 - \xi_0^2.$$

Решение для погранслоя в окрестности квазифронтв легко получается из уравнения (5.8) и имеет вид [4,6]

$$T_1 = 2hI \left[ \frac{1}{3} + \int_0^y Ai(-y') dy' \right] f(\theta), \quad y = \left[ \frac{2(1-\nu)^2}{\nu^2 \eta^2 \xi_0} \right]^{1/3} (\tau_0 - \xi_0), \quad (8.6)$$

где  $Ai(\cdot)$  — функция Эйри.

Решение для погранслоя в окрестности фронта волны расширения строится с помощью двойного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье — по пространственной продольной координате. Обращение ищется с помощью разложения изображения в бесконечный ряд по вычелам и метода профронтной асимптотики (разложение по обратным степеням параметра преобразования Лапласа):

$$T_1 = \frac{4hl}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2} \left[ 2^{1/2} (n-1/2) \pi \eta^{-1} \sqrt{\xi_0 \left( \frac{c_1 t}{R} - \xi_0 \right)} \right] f(\theta) H \left( \frac{c_1 t}{R} - \xi_0 \right). \quad (8.7)$$

Уравнения для квазистатического погранслоя в рассматриваемом случае торцевого воздействия совпадают с уравнениями плоской задачи теории упругости для полуполосы [2]. Методы решения соответствующей краевой задачи представлены в [23, 24].

Отметим также, что коротковолновая составляющая имеет малоамплитудный характер и практического расчетного интереса не представляет. Ее анализ необходим только для доказательства корректности предложенной схемы расчленения.

В случае  $p = 0$  изменяется только схема построения безмоментной составляющей [4]. Здесь применяется только метод прифронтной асимптотики.

Методы обращения изображения по Лапласу, разработанные для цилиндрической оболочки, могут быть применены для общего случая оболочек вращения после нахождения решения в изображениях асимптотическим методом экспоненциального представления.

## 9. ВОЛНЫ ПРИ LM НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрим схему расчленения НДС на составляющие при продольных воздействиях изгибающего типа (граничные условия (1.2)) на примере цилиндрической оболочки. Схема решения для изгибающего момента  $G_1$  в некоторый момент времени, большой времени пробега передним фронтом волны толщины оболочки, изображена на рис.9, а схема областей применимости приближенных теорий изображена на рис.10.

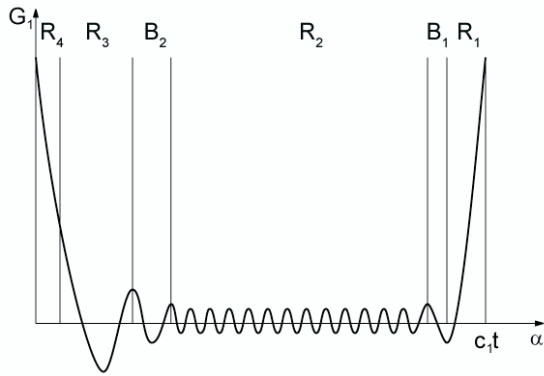


Рис. 9

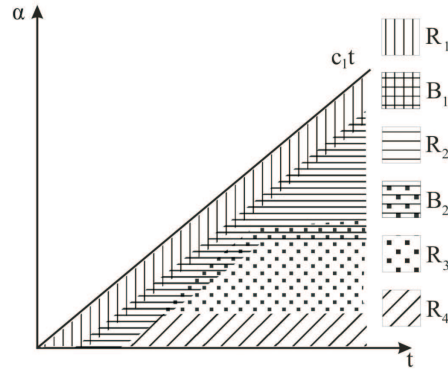


Рис. 10

$R_1$  — гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения,  $R_2$  — квазиплоская квазиантисимметричная задача теории упругости,  $R_3$  — поперечное длинноволновое приближение (изгибная составляющая теории Кирхгофа – Лява),  $R_4$  — наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана,  $B_1, B_2$  — области согласования.

Исследования работы [4] с учетом выделения в рассматриваемом типе НДС вместо динамического погранслоя — погранслоя в окрестности фронта и квазиплоской задачи, выполненного в [6], показали, что область согласования между изгибной и коротковолновой составляющими определяется асимптотическим неравенством

$$\eta^{1/2} \left( \frac{c_3 t}{R} \right)^{1/2} + \eta^{1-p} \frac{c_3 t}{R} \ll \xi_0 \ll \eta^{1/4} \left( \frac{c_3 t}{R} \right)^{1/4}. \quad (9.1)$$

В соответствии с (1.2) граничные условия для изгибной составляющей записываются в виде

$$G_1 = \frac{2}{3} h^3 I H(t) f(\theta), \quad w = 0. \quad (9.2)$$

Рассмотрим сначала случай неосесимметричной нагрузки при  $p > 1/2$ . В этом случае при использовании интегрального преобразования Лапласа по временной переменной удается найти простую асимптотику для корней характеристического уравнения, содержащего малый параметр [4]. После использования метода перевала получаем решение для изгибающего момента при  $\tau_0 \gg \eta^{2p-1}$  в виде

$$G_1 = \frac{2}{3} h^3 I \left\{ \left[ 1 - \frac{(1-\nu)m_* \xi_0}{2 \eta^p} \right] \exp \left( -m_* \frac{\xi_0}{\eta^p} \right) \frac{3^{3/4} \eta^{2p-3/2} \xi_0}{\pi^{1/2} 2^{3/2} \tau_0^{3/2}} \frac{\nu m_*^2 + \frac{3\xi_0^2}{4\eta^{2-2p}\tau_0^2}}{\left( m_*^2 + \frac{3\xi_0^2}{4\eta^{2-2p}\tau_0^2} \right)^2} \times \right. \\ \left. \times (\cos T_M - \sin T_M) \left[ 1 + O \left( \frac{\eta \tau_0}{\xi_0^2} \right) \right] \right\}, \quad (9.3)$$

$$T_M = \frac{3^{1/2} \xi_0^2}{4\eta \tau_0} + \frac{m_*^2 \tau_0}{3^{1/2} \eta^{2p-1}}.$$

При  $\tau_0 = O(\eta^{2p-1})$  (а также для всех значений времени в диапазоне  $\tau_0 = O(1)$  при  $p \leq 1/2$ ) решение строится при помощи разложения изображений в ряды по обратным степеням корня квадратного из параметра преобразования Лапласа, когда оригинал решения представляется в виде ряда по функциям  $D_{m,c}$  и  $D_{m,s}$ , введенным и описанным в [4]:

$$G_1 = \frac{2}{3} h^3 I \left\{ D_{1,c}(y, \tau_0) - \eta^{2r-2p} \frac{m_*^2 \xi_0}{2^{3/2} 3^{1/4} \eta^r} [D_{2,c}(y, \tau_0) - D_{2,s}(y, \tau_0)] - \right. \\ \left. - \left[ \eta^{2r-2p} \frac{(1-\nu)m_*^2}{3^{1/2}} + \eta^{4r-4p} \frac{m_*^4 \xi_0^2}{8 \cdot 3^{1/2} \eta^{2r}} \right] D_{3,s}(y, \tau_0) + \dots \right\}, \quad (9.4)$$

$$y = \frac{3^{1/4} \xi_0}{2^{1/2} \eta^r}, \quad r = \begin{cases} 1/2, & p \leq 1/2, \\ p, & p > 1/2. \end{cases}$$



Решение для погранслоя в окрестности фронта волны расширения строится, как и в предыдущем случае воздействия типа LT, с помощью двойных интегральных преобразований, теории вычетов и метода прифронтной асимптотики [6]:

$$G_1 = \frac{4h^3 I}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_0 \left( 2^{1/2} m \pi \eta^{-1} \sqrt{\xi_0 \left( \frac{c_1 t}{R} - \xi_0 \right)} \right) H \left( \frac{c_1 t}{R} - \xi_0 \right). \quad (9.5)$$

Решение для коротковолновой составляющей не строится вследствие его малоамплитудного характера.

### 10. ВОЛНЫ ПРИ NW НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрим схему расчленения НДС на составляющие при торцевом воздействии нормального типа (граничные условия (1.3)) также на примере цилиндрической оболочки. Схема расчленения для перерезывающей силы  $N_1$  изображена на рис. 11, а схема областей применимости приближенных теорий представлена на рис. 12.

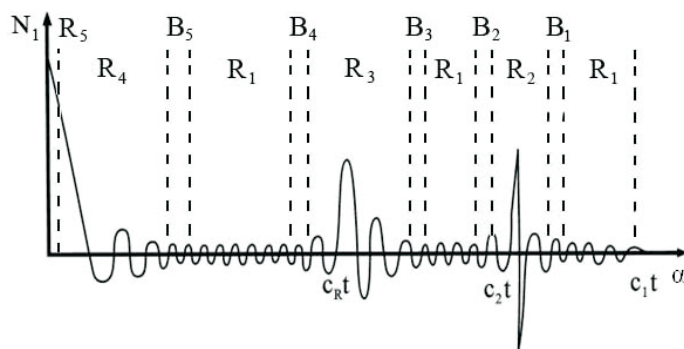


Рис. 11

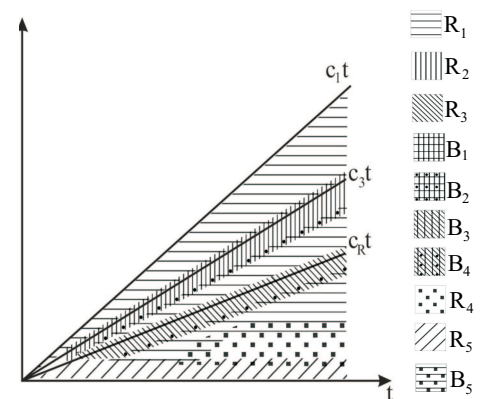


Рис. 12

Применяются [19] следующие приближенные теории:  $R_1$  — квазиплоская квазиантисимметричная задача теории упругости (коротковолновое приближение),  $R_2$  — погранслоем в окрестности фронта волны сдвига,  $R_3$  — погранслоем в окрестности условного фронта поверхностной волны Релея,  $R_4$  — поперечное длинноволновое приближение (изгибная составляющая теории Кирхгофа – Лява),  $R_5$  — наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана. Здесь же обозначениями  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  изображены соответствующие области согласования приближенных теорий. При этом анализ схемы решения показывает, что разрывной скачок наблюдается на фронте волны сдвига, а непрерывный скачок — на фронте условного фронта волны Релея, неверно воспринимаемого двумерной теорией типа Тимошенко как дополнительный фронт сдвиговой волны. Таким образом, неточность теории типа Тимошенко заключается здесь в том, что она неверно воспринимает условный фронт поверхностной волны Релея, фактически являющийся квазифронтом, как фронт с соответствующим разрывом решения, что полностью противоречит точной картине явления по трехмерной теории.

Для построения решения изгибной составляющей применяются методы, указанные в предыдущем параграфе. Решение в окрестности фронта волны сдвига строится методом прифронтной асимптотики [6]. Для решения задачи о погранслоем в окрестности условного фронта поверхностной волны Релея используется метод двойных интегральных преобразований: Лапласа — по времени и Фурье — по продольной координате [25].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работах У.К. Нигула [9] и других авторов показано, что все случаи нестационарных волн в тонкостенных телах при ударных торцевых воздействиях сводятся к трем основным схемам, определяемым тремя типами нагрузки.



Описанные в статье асимптотические методы исследования нестационарных волн в тонких упругих оболочках вращения составляют в совокупности замкнутую математическую модель исследования простейшего класса нестационарных процессов в тонкостенных конструкциях. Замкнутую как в смысле полноты разработанных математических методов, так и в смысле влияния особенностей рассмотренных в классе материалов и геометрии конструкции на свойства НДС и соответственно на принципы расчленения НДС на составляющие с различными показателями изменчивости. Полнота математических методов заключается как в построении полной системы асимптотически оптимальных уравнений, описывающих все необходимые составляющие нестационарного НДС, так и в разработке аналитических методов решения краевых задач для составляющих. Последние представляют как самостоятельный интерес, так и интерес для построения решений модельных задач при разработке численных методов исследования или для разработки гибридных аналитически-численных алгоритмов.

В рамках разработанной математической модели проведены дальнейшие исследования, углубившие понимание рассматриваемых физических явлений с точки зрения формирования установившихся процессов при различных видах воздействий. Так, в работе [15] исследуется, в частности, стремление решения для изгибающей в оболочках вращения к стационарному с ростом времени и принципиальные отличия со временем свойств этих решений от соответствующих решений для пластин. В работах [16, 17] исследовано нестационарное НДС при ударно приложенных гармонических торцевых воздействиях на оболочки вращения и выявлено расположение зон перехода нестационарной части решения в гармонические колебания.

Разработка математической модели указанного класса определила принципы подхода к исследованию самых разнообразных динамических задач для тонкостенных конструкций, которые базируются на широчайших возможностях асимптотического метода. Приведем примеры последних разработок, обобщающих рассмотренный асимптотический подход.

В плане изучения нового класса ударных воздействий и изменения общей схемы расчленения характерна работа [18], которая указывает, в частности, что при высокочастотном краевом нагружении НДС около торца будет описываться вместо длинноволновой низкочастотной составляющей (теория Кирхгофа – Лява) длинноволновой высокочастотной. Локальное нормальное ударное воздействие сжимающего типа на упругую плиту рассматривалось в [19]: для решения этой очень характерной задачи использовалась уточненная асимптотическая 2D модель. Отметим также, что изменение геометрического класса задач — переход к оболочкам общего очертания (или к воздействиям, локально действующим на торцы оболочки) — требует кардинально нового подхода к выбору систем координат, связанного со сложной геометрией фронтов и квазифронтов. В [18] предложено срединную поверхность произвольных оболочек относить не к линиям кривизны, а к полугеодезической системе координат и изучать процесс распространения волн вдоль геодезических. Данный подход реализован в работах [20–21] на примере скошенной цилиндрической оболочки.

Интересными теоретически и практически важными явились исследования распространения нестационарных волн в подкрепленных оболочках вращения [22, 23]. Здесь необходимым оказался учет квазистатического погранслоя типа Сен-Венана при исследовании волнового процесса в подкреплениях.

Рассмотрены нестационарные процессы в оболочках из других материалов со свойствами, принципиально влияющими на характер НДС. Так, в работах [7, 24] выведены асимптотически оптимальные уравнения для различного типа погранслоев в трансверсально изотропных тонких пластинах и оболочках.

В работах [7, 25] рассмотрено нестационарное НДС в оболочках из вязкоупругих материалов. Введение нового параметра — показателя интенсивности времени релаксации — позволило описать новую классификацию нестационарного НДС конструкций в случае вязкоупругих материалов с дифференциальной формой уравнений состояния. Выведены асимптотически оптимальные уравнения всех составляющих.

Анализ математической модели, описанной в рассматриваемой статье, и ее обобщений на различные случаи геометрии тонкостенных конструкций и материалов показывает универсальный характер разработанной математической теории.

**Библиографический список**

1. Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях // Изв. Саратов. ун-та. Новая сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 115–128
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упруги тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
4. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 176 с.
5. Kaplunov J.D. On the quasi-front in two-dimensional shell theories // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 2. 1991. V. 313. P. 731–736.
6. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego Academic Press, 1998.
7. Шевцова Ю.В. Погранслои в окрестности квазифронта в трансверсально изотропной цилиндрической оболочке // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. С. 114–117.
8. Бажанова Н.С., Коссович Л.Ю., Сухоловская М.С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Известия вузов. Северокавказский регион. Естественные науки. 2000. №2. С. 17–24.
9. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Intern. J. Solids and Structures. 1969. V. 54. P. 607–627.
10. Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // Докл. АН. 2004. Т. 395, № 4. С. 482–484.
11. Kaplunov J., Kossovich L., Zakharov A. An explicit asymptotic model for the Bleustein-Gulyaev wave. C.R. Mecanique. 2004. № 332. P. 487–492.
12. Коссович Л.Ю., Кушеккалиев А.Н. Поле Рэлея в бесконечном упругом слое // Математика, механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып.5. С. 159–161.
13. Ковалев В.А., Коссович Л.Ю., Таранов О.В. Поле Рэлея в задаче Лэмба для цилиндрической оболочки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. 2004. С. 52–54.
14. Ковалев В.А., Коссович Л.Ю., Таранов О.В. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуплоскости при действии торцевой нагрузки // Известия РАН. МТТ. 2005. №5. С. 89–96.
15. Кушеккалиев А.Н. Решение задач о распространении волн в трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке при нормальных воздействиях // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002. Вып. 14. С. 106–115.
16. Кушеккалиев А.Н. Волны типа Рэлея в полубесконечной пластине при нормальном воздействии поперечного типа // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 15. С.66–73.
17. Коссович Л.Ю., Кушеккалиев А.Н. Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003. №2. С. 10–22.
18. Коссович Л.Ю., Кушеккалиев А.Н. Расчленение нестационарного НДС в задаче Лэмба для бесконечного слоя на составляющие с разными показателями изменчивости // Тр. III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. Ростов н/Д, 2003. С. 232–234.
19. Ковалев В.А., Таранов О.В. Расчленение нестационарного НДС цилиндрических оболочек при ударных торцевых воздействиях нормального типа // Смешанные задачи механики деформированного тела: Материалы V Рос. конф. с международным участием. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 191–193.
20. Кириллова И.В. Области согласования погранслоя и коротковолнового высокочастотного приближения // Математическое моделирование и управление в технических системах: Сб. трудов / СГАУ. Саратов, 1998. С. 3–11.
21. Новожилов В.В., Слепян Л.И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней // ПММ. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 261–281.
22. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
23. Гусейн-Заде М.И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуплоскости // Прикл. мат. и мех. 1965. Т.29, вып. 2. С. 393–399.
24. Гусейн-Заде М.И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуплоскости // Прикл. мат. и мех. 1965. Т.29, вып. 4. С. 752–760.
25. Ковалев В.А., Таранов О.В. Анализ точного и приближенного решения для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея в упругой полуплоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная сер. 2007. № 6(56). С. 57–60