



lytical solution of the problem of converging shock waves // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99. A. 124503.

5. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. М.: Наука, 1983. 314 с.

6. Кожанов В.С. Модификация метода Сапункова решения задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 126–128.

УДК 539.3

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ В РЯД ПО МОДАМ

Л.Ю.Коссович¹, В.А.Юрко², И.В.Кириллова³

Саратовский государственный университет,

¹кафедра математической теории упругости и биомеханики,

²кафедра математической физики и вычислительной математики,

³Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем

E-mail: ¹rector@sgu.ru, ²yurkova@info.sgu.ru, ³nano-bio@sgu.ru

Рассматриваются колебания полосы в рамках плоской задачи теории упругости. Приведено описание мод колебаний. Изучены свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи для их амплитуд. Построена функция Грина, являющаяся ядром обратного оператора краевой задачи. Доказаны полнота собственных функций и теоремы о разложении, позволяющие решать задачи для полубесконечных или конечных пластин при произвольных видах граничных условий.

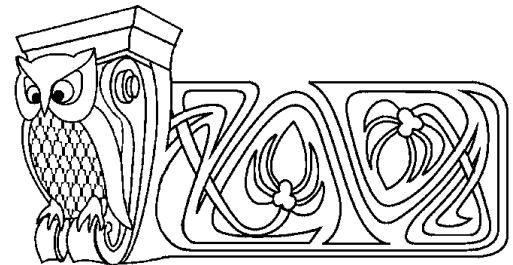
Ключевые слова: теория упругости, волновые процессы, моды колебаний, собственные значения, собственные функции, асимптотика.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамического напряженно-деформированного состояния бесконечных, полубесконечных и конечных пластин в рамках трёхмерной теории упругости имеет важное значение как для непосредственно практических целей, так и в качестве модельного примера, необходимого для поиска путей анализа колебаний и волновых процессов в оболочечных конструкциях произвольной геометрии. Подробный анализ свойств волновых процессов и используемых приближённых теорий проведен в работах [1–3]. Указанный анализ послужил основой для разработки асимптотической теории колебаний и нестационарных волн в тонких оболочках [4–6].

В нестационарных задачах для бесконечной или полубесконечной полосы основным аналитическим методом исследования является использование двухкратных интегральных преобразований – Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. При этом в краевых задачах в случае заданных торцевых воздействий применение интегрального преобразования Фурье ограничено теми случаями граничных условий [1, 2], когда интегральным преобразованиям требуется только информация об искомым величинах на границах. В работе [7] была предложена методика для случаев, когда в поперечном сечении заданы либо перемещения, либо напряжения. Рассматривались два парных интегральных уравнения для торцевых неизвестных (перемещений или напряжений).

Отметим, что на первом этапе обращение двойных интегральных изображений производится с помощью теории вычетов, и решение в конечном итоге представляется в виде разложения по несобственным интегралам от мод колебаний. Таким образом, разложение по модам нужно уметь строить в общем случае граничных условий, а для этого требуется исследовать свойства задач на собственные функции и собственные значения. Эта задача и решается в представленной работе. Она имеет не только прикладное значение для исследования нестационарных волн, но и самостоятельное для изучения собственных и вынужденных колебаний пластины.



Mode-Series Expansion of Solutions of Elasticity Problems for a Strip

L.Yu. Kossovich¹, V.A. Yurko², I.V. Kirillova³

Saratov State University,

¹Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics;

²Chair of Mathematical Physics and Numerical Analysis;

³Educational-Research Institute of Nanostructures and Biosystems

E-mail: ¹rector@sgu.ru, ²yurkova@sgu.ru, ³nano-bio@sgu.ru

Oscillations of a strip are considered as a plane problem of elasticity theory. Description of oscillation modes is provided. Properties of eigenvalues and eigenfunctions are studied for a boundary value problem for their amplitudes. Green's function is constructed as a kernel of the inverse operator. Completeness and expansion theorems are proved which allow one to solve problems for finite and infinite membranes under arbitrary boundary conditions.

Key words: elasticity theory, wave propagation, oscillation modes, eigenvalues, eigenfunctions.

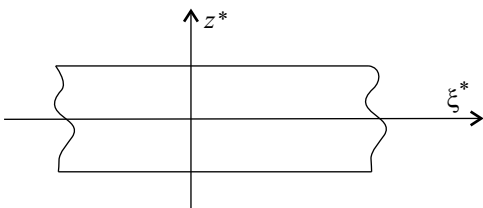


В представленной работе рассматривается распространение волн в бесконечной пластине постоянной толщины. Изучается решение дифференциальной системы для мод колебаний с требуемой гармонической зависимостью решений по продольной координате и времени. Рассмотрены собственные значения и собственные функции краевой задачи для амплитудных функций, доказаны их ортогональность и полнота, разложимость любой вектор-функций по собственным функциям краевой задачи. Получены выражения для коэффициентов разложения в ряд по собственным функциям.

Таким образом, проведенное исследование является базовым как при исследовании задач для колебаний пластин, так и при исследовании нестационарных волн в пластинах при поверхностных и торцевых ударных воздействиях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим распространение волн в бесконечной плите, ограниченной плоскостями $z^* = \pm h$ в направлении оси ξ^* (рисунок). Динамическое напряженно-деформированное состояние плиты описывается уравнениями плоской задачи теории упругости [8]. Запишем в безразмерной форме разрешающие уравнения движения в перемещениях:



$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial z} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial z} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнения закона Гука

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{33} = k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z}. \quad (2)$$

Здесь $\xi = \frac{\xi^*}{h}$, $z = \frac{z^*}{h}$, $k^2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$, $\alpha = \frac{1}{1-2\nu}$, $k_1 = \frac{\nu}{1-2\nu}$, $k_2 = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$, где ν — коэффициент Пуассона.

Будем изучать решения дифференциальной системы (1) следующего вида:

$$v_j(\xi, z, t) = V_j(z) \exp(i(\omega t + \varkappa \xi)). \quad (3)$$

Потребуем, чтобы моды (3) удовлетворяли уравнениям движения (1) и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях $z = \pm 1$: $\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0$. Подставляя (3) в (1) и (2), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $V_1(z)$, $V_3(z)$:

$$\left. \begin{aligned} V_1''(z) + i\varkappa\alpha V_3'(z) + \left(\omega^2 - \frac{\varkappa^2}{k^2} \right) V_1(z) &= 0, \\ \frac{1}{k^2} V_3''(z) + i\varkappa\alpha V_1'(z) + (\omega^2 - \varkappa^2) V_3(z) &= 0, \\ -1 \leq z \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и краевые условия

$$V_1'(\pm 1) + i\varkappa V_3(\pm 1) = 0, \quad V_3'(\pm 1) + i\varkappa\beta V_1(\pm 1) = 0, \quad (5)$$

где $\beta = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\nu}{1-\nu}$.

Выполним замену переменных $x = z + 1$ и обозначим $y_1(x) = V_1(z)$, $y_2(x) = V_3(z)$. Тогда краевая задача (4), (5) принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1''(x) + i\varkappa\alpha y_2'(x) + \left(\omega^2 - \frac{\varkappa^2}{k^2} \right) y_1(x) &= 0, \\ \frac{1}{k^2} y_2''(x) + i\varkappa\alpha y_1'(x) + (\omega^2 - \varkappa^2) y_2(x) &= 0, \\ 0 \leq x \leq 2; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$



$$\left. \begin{aligned} y_1'(0) + i\kappa y_2(0) = 0, & \quad y_1'(2) + i\kappa y_2(2) = 0, \\ y_2'(0) + i\kappa\beta y_1(0) = 0, & \quad y_2'(2) + i\kappa\beta y_1(2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Будем рассматривать краевую задачу (6), (7) при фиксированном вещественном κ со спектральным параметром $\lambda = -\omega^2$. Запишем краевую задачу (6), (7) в операторном виде. Для этого введем обозначения

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2} \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & i\kappa\alpha \\ i\kappa\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\kappa^2}{k^2} & 0 \\ 0 & -\kappa^2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & i\kappa \\ i\kappa\beta & 0 \end{bmatrix}$$

и рассмотрим дифференциальные операторы

$$LY(x) = P_0 Y''(x) + P_1 Y'(x) + P_2 Y(x), \quad L_\lambda Y(x) = LY(x) - \lambda Y(x)$$

и линейные формы

$$U_1(Y) = Y'(0) + PY(0), \quad U_2(Y) = Y'(2) + PY(2).$$

Тогда краевую задачу (6), (7) можно записать следующим образом:

$$L_\lambda Y(x) = 0, \quad U_1(Y) = U_2(Y) = 0.$$

Сформулируем основные результаты, доказательства которых приведены в разд. 2–4.

Введем гильбертово пространство $L_2^2(0, 2)$ комплекснозначных вектор-функций $F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{bmatrix}$ с нормой $\|F(x)\|_{L_2^2(0,2)}^2 = \int_0^2 \{|F_1(x)|^2 + |F_2(x)|^2\} dx$ и скалярным произведением $(F(x), f(x))_{L_2^2(0,2)} = \int_0^2 \langle F(x), f(x) \rangle dx$, где $\langle F(x), f(x) \rangle = F_1(x)\bar{f}_1(x) + F_2(x)\bar{f}_2(x) = \bar{f}^T(x)F(x)$ — скалярное произведение в E_2 , T — знак транспонирования. Будем обозначать через $\lambda_n = -\omega_n^2$ собственные значения краевой задачи (6), (7), через $Y_n(x) = \begin{bmatrix} Y_{n1}(x) \\ Y_{n2}(x) \end{bmatrix}$ — собственные функции, отвечающие собственным значениям λ_n .

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Собственные значения краевой задачи (6), (7) вещественны, образуют две последовательности $\{\omega_n\} = \{\omega_{n1}\} \cup \{\omega_{n2}\}$, причём при $n \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические формулы:*

$$\omega_{n1} = \frac{\pi n}{2} + o(1), \quad \omega_{n2} = \frac{\pi n}{2k} + o(1).$$

Теорема 2. *Собственные функции краевой задачи (6), (7), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2^2(0, 2)$, т. е.*

$$\int_0^2 \langle Y_n(x), Y_m(x) \rangle dx = 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Теорема 3. *Система собственных функций $\{Y_n(x)\}$ краевой задачи (6), (7) полна в $L_2^2(0, 2)$.*

Полнота системы собственных функций означает, что не существует ненулевого элемента пространства $L_2^2(0, 2)$, ортогонального всем собственным функциям краевой задачи (6), (7). Это равносильно тому, что линейная оболочка собственных функций всюду плотна в $L_2^2(0, 2)$.

Теорема 4. *Любая вектор-функция $F(x) \in L_2^2(0, 2)$ единственным образом разлагается в ряд по собственным функциям краевой задачи (6), (7):*

$$F(x) = \sum_n c_n Y_n(x), \quad (8)$$



где коэффициенты c_n вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{(F(x), Y_n(x))_{L_2^2(0,2)}}{\|Y_n(x)\|_{L_2^2(0,2)}^2}.$$

При этом ряд (8) сходится по норме пространства $L_2^2(0, 2)$, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| F(x) - \sum_n^N c_n Y_n(x) \right\|_{L_2^2(0,2)} = 0.$$

Если, кроме того, вектор-функция $F(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет краевым условиям $U_1(F) = U_2(F) = 0$, то ряд (8) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 2]$.

Остановимся кратко на содержании разд. 2–4. В разд. 2 рассматриваются решения системы дифференциальных уравнений (6) и исследуются их свойства. В разд. 3 изучаются свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи (6), (7). В частности, доказываются теоремы 1 и 2. В разд. 4 строится функция Грина краевой задачи (6), (7), которая является ядром обратного оператора краевой задачи, изучаются ее свойства и с их помощью доказываются теоремы 3 и 4.

2. РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ИХ СВОЙСТВА

2.1. Построим фундаментальную систему решений Эйлера – Бирхгофа для системы дифференциальных уравнений (6).

Обозначим $a = \sqrt{\omega^2 - \varkappa^2} = \omega \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}}$, $b = \sqrt{k^2 \omega^2 - \varkappa^2} = k\omega \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{k^2 \omega^2}}$. Здесь и везде в дальнейшем через \sqrt{z} обозначено аналитическое продолжение арифметического значения корня, т. е. если $z = |z| \exp(i\varphi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, то $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \exp(i\varphi/2)$.

Будем искать решения системы (6) в виде

$$Y(x) = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} e^{i\rho x}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получаем линейную алгебраическую систему:

$$\left. \begin{aligned} \left(-\rho^2 + \omega^2 - \frac{\varkappa^2}{k^2}\right) \Theta_1 - \varkappa \alpha \rho \Theta_2 &= 0, \\ -\alpha \varkappa \rho \Theta_1 - \left(-\frac{\rho^2}{k^2} + \omega^2 - \varkappa^2\right) \Theta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Система (10) имеет ненулевое решение Θ_1, Θ_2 в том случае, если ее определитель равен нулю, т. е. при тех значениях ρ , для которых

$$\left(\rho^2 - \omega^2 + \frac{\varkappa^2}{k^2}\right) \left(\frac{\rho^2}{k^2} - \omega^2 + \varkappa^2\right) - \varkappa^2 \alpha^2 \rho^2 = 0,$$

или

$$\rho^4 - b\rho^2 + c = 0,$$

где $b = (k^2 + 1)\omega^2 - 2\varkappa^2$, $c = k^2\omega^4 - \omega^2\varkappa^2(k^2 + 1) + \varkappa^4$. Отсюда вычисляем

$$\rho^2 = \frac{(k^2 + 1)\omega^2 - \varkappa^2 \pm \frac{k^2 - 1}{2}\omega^2}{2}$$

и, следовательно, $\rho_{1,2} = \pm a$, $\rho_{3,4} = \pm b$. Подставляя в (10) $\rho = \pm a$, вычисляем Θ_1, Θ_2 . Выбираем $\Theta_1 = 1$. Тогда в силу (10) $\Theta_2 = -\varkappa/\rho$. Аналогичным образом рассуждаем при $\rho = \pm b$. В этом случае выбираем $\Theta_2 = 1$ и в силу (10) имеем $\Theta_1 = \varkappa/\rho$.



Таким образом, мы доказали, что система дифференциальных уравнений (6) имеет фундаментальную систему решений $B_1 = \{Y_1(x), Y_2(x), Y_3(x), Y_4(x)\}$, где

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\varkappa/a \end{bmatrix} e^{iax}, \quad Y_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ \varkappa/a \end{bmatrix} e^{-iax}, \quad Y_3(x) = \begin{bmatrix} \varkappa/b \\ 1 \end{bmatrix} e^{ibx}, \quad Y_4(x) = \begin{bmatrix} -\varkappa/b \\ 1 \end{bmatrix} e^{-ibx}. \quad (11)$$

Нетрудно вычислить вронскиан функций B_1 :

$$W_0 := \det \begin{bmatrix} Y_j(x) \\ Y'_j(x) \end{bmatrix}_{j=1,4} = \frac{4k^2\omega^4}{ab}. \quad (12)$$

Используя (11), получаем, что при $\omega \rightarrow \infty$ фундаментальная система решений B_1 имеет следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\varkappa/\omega \end{bmatrix} e^{i\omega x} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right\}, & Y_2(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \varkappa/\omega \end{bmatrix} e^{-i\omega x} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right\}, \\ Y_3(x) &= \begin{bmatrix} \varkappa/(k\omega) \\ 1 \end{bmatrix} e^{ik\omega x} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right\}, & Y_4(x) &= \begin{bmatrix} -\varkappa/(k\omega) \\ 1 \end{bmatrix} e^{-ik\omega x} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

2.2. Рассмотрим вектор-функции

$$\left. \begin{aligned} Z_1(x) &= \frac{1}{2} (Y_1(x) + Y_2(x)), & Z_2(x) &= \frac{1}{2} (Y_1(x) - Y_2(x)), \\ Z_3(x) &= \frac{1}{2} (Y_3(x) - Y_4(x)), & Z_4(x) &= \frac{1}{2} (Y_3(x) + Y_4(x)). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Подставляя в (13) выражения для вектор-функций $Y_j(x)$ из (11), вычисляем

$$Z_1(x) = \begin{bmatrix} \cos ax \\ -i\frac{\varkappa}{a} \sin ax \end{bmatrix}, \quad Z_2(x) = \begin{bmatrix} i \sin ax \\ -\frac{\varkappa}{a} \cos ax \end{bmatrix}, \quad Z_3(x) = \begin{bmatrix} \frac{\varkappa}{b} \cos bx \\ i \sin bx \end{bmatrix}, \quad Z_4(x) = \begin{bmatrix} i\frac{\varkappa}{b} \sin bx \\ \cos bx \end{bmatrix}.$$

Функции $B_2 = \{Z_1(x), Z_2(x), Z_3(x), Z_4(x)\}$ образуют фундаментальную систему решений для (6), причем их вронскиан имеет вид

$$W_1 := \det \begin{bmatrix} Z_j(x) \\ Z'_j(x) \end{bmatrix}_{j=1,4} = -\frac{k^2\omega^4}{ab} = -\frac{1}{4}W_0.$$

2.3. Введем в рассмотрение вектор-функции $B_3 = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)\}$, $\varphi_j(x) = \begin{bmatrix} \varphi_{1j}(x) \\ \varphi_{2j}(x) \end{bmatrix}$,

которые являются решениями дифференциальной системы (6) при начальных условиях

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \varphi'_1(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -i\varkappa\beta \end{bmatrix}, & \varphi_2(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \varphi'_2(0) &= \begin{bmatrix} -i\varkappa \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi_3(0) &= \varphi_4(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \varphi'_3(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \varphi'_4(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ясно, что в силу теоремы Пикара решения $\varphi_j(x) = \varphi_j(x, \lambda)$ существуют, единственны и при каждом фиксированном $x \in [0, 2]$ являются целыми аналитическими функциями по λ . По теореме Остроградского – Лиувилля [9] вронскиан B_3 не зависит от x . Вычисляем его при $x = 0$ и получаем

$$W_3 = \det \begin{bmatrix} \varphi_j(x) \\ \varphi'_j(x) \end{bmatrix}_{j=1,4} \equiv 1.$$



Таким образом, вектор-функции $B_3 = \{\varphi_j(x)\}_{j=\overline{1,4}}$ образуют фундаментальную систему решений для (6). Отметим, что решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ удовлетворяют краевому условию в точке $x = 0$, т. е.

$$U_1(\varphi_1) = U_1(\varphi_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Выразим решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ через фундаментальную систему решений B_2 . Получим

$$\varphi_1(x) = A_1 Z_1(x) + A_3 Z_3(x), \quad \varphi_2(x) = A_2 Z_2(x) + A_4 Z_4(x),$$

где

$$A_1 = \frac{b^2 + \varkappa^2 \beta}{k^2 \omega^2}, \quad A_2 = -\frac{2\varkappa a}{\omega^2}, \quad A_3 = \frac{\varkappa(1 - \beta)b}{k^2 \omega^2}, \quad A_4 = 1.$$

При $\omega \rightarrow \infty$ для функций $A_j = A_j(\omega)$ имеют место асимптотические формулы:

$$A_1 = 1 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad A_2 = -\frac{2\varkappa}{\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \quad A_3 = \frac{\varkappa(1 - \beta)}{k\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \quad A_4 = 1.$$

3. СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию

$$\Delta_0(\lambda) := \det \begin{bmatrix} U_1(Y_j) \\ U_2(Y_j) \end{bmatrix}_{j=\overline{1,4}} = \det \begin{bmatrix} Y'_j(0) + P Y_j(0) \\ Y'_j(2) + P Y_j(2) \end{bmatrix}_{j=\overline{1,4}}. \quad (14)$$

Подставляя в (14) выражения для вектор-функций $Y_j(x)$ из (11), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_0(\lambda) = & -16 \left(a - \frac{\varkappa^2}{a} \right) \varkappa (-\varkappa + \varkappa\beta) \left(b + \frac{\beta\varkappa^2}{b} \right) + \left(\left(a - \frac{\varkappa^2}{a} \right) \left(b + \frac{\beta\varkappa^2}{b} \right) + \right. \\ & \left. + 2\varkappa (-\varkappa + \varkappa\beta) \right)^2 \left(\exp(2i(b - a)) + \exp(2i(a - b)) \right) - \\ & - \left(\left(a - \frac{\varkappa^2}{a} \right) \left(b + \frac{\beta\varkappa^2}{b} \right) - 2\varkappa(-\varkappa + \varkappa\beta) \right)^2 \left(\exp(-2i(a + b)) + \exp(2i(a + b)) \right), \end{aligned}$$

или

$$\Delta_0(\lambda) = 2\gamma_1^2 \cos 2(a - b) - 2\gamma_2^2 \cos 2(a + b) - \gamma_3,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & \left(a - \frac{\varkappa^2}{a} \right) \left(b + \frac{\beta\varkappa^2}{b} \right) + 2\varkappa(-\varkappa + \varkappa\beta), \quad \gamma_2 = \left(a - \frac{\varkappa^2}{a} \right) \left(b + \frac{\beta\varkappa^2}{b} \right) - 2\varkappa(-\varkappa + \varkappa\beta), \\ \gamma_3 = & 16 \left(a - \frac{\varkappa^2}{a} \right) \left(b + \frac{\beta\varkappa^2}{b} \right) \varkappa(-\varkappa + \varkappa\beta). \end{aligned}$$

Полученное выражение преобразуется к виду

$$\Delta_0(\lambda) = d_1 \sin 2a \sin 2b + d_2 (\cos 2a \cos 2b - 1), \quad (15)$$

где

$$d_1 = 4 \left(a - \frac{\varkappa^2}{a} \right)^2 \left(b + \frac{\beta\varkappa^2}{b} \right)^2 + 8\varkappa^2 (-\varkappa + \varkappa\beta)^2, \quad d_2 = 16 \left(a - \frac{\varkappa^2}{a} \right) \left(b + \frac{\beta\varkappa^2}{b} \right) \varkappa(-\varkappa + \varkappa\beta). \quad (16)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Delta(\lambda) := \det \begin{bmatrix} U_1(\varphi_j) \\ U_2(\varphi_j) \end{bmatrix}_{j=\overline{1,4}} = \begin{bmatrix} \varphi'_j(0) + P\varphi_j(0) \\ \varphi'_j(2) + P\varphi_j(2) \end{bmatrix}_{j=\overline{1,4}}.$$



Так как $U_1(\varphi_1) = U_1(\varphi_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $U_1(\varphi_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $U_1(\varphi_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, то

$$\Delta(\lambda) = \det U_2(\varphi), \quad (17)$$

где $\varphi(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) \end{bmatrix}$.

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой аналитической по λ (в отличие от функции $\Delta_0(\lambda)$). Функцию $\Delta(\lambda)$ будем называть *характеристической функцией* краевой задачи (6), (7).

Так как

$$W_0^{-1} \det \begin{bmatrix} U_1(Y_j) \\ U_2(Y_j) \end{bmatrix}_{j=\overline{1,4}} = W_3^{-1} \det \begin{bmatrix} U_1(\varphi_j) \\ U_2(\varphi_j) \end{bmatrix}_{j=\overline{1,4}},$$

то мы получаем следующую связь между функциями $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = \frac{\Delta_0(\lambda)}{W_0}. \quad (18)$$

Из (18), используя (12), (15), (16), вычисляем

$$\Delta(\lambda) = d_1^* \sin 2a \sin 2b + d_2^* (\cos 2a \cos 2b - 1), \quad (19)$$

где

$$d_1^* = d_1 \frac{ab}{4k^2\omega^4}, \quad d_2^* = d_2 \frac{ab}{4k^2\omega^4}.$$

При $\omega \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические формулы:

$$d_1^* = k\omega^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right), \quad d_2^* = 4\kappa^2 (\beta - 1) + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right). \quad (20)$$

Утверждение 1. Нули целой функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи (6), (7). При этом собственные функции краевой задачи (6), (7) имеют вид

$$Y_n(x) = C_n \varphi_1(x, \lambda_n) + D_n \varphi_2(x, \lambda_n), \quad (21)$$

где $\lambda_n = -\omega_n^2$ — собственные значения, а константы C_n, D_n находятся из соотношения

$$C_n U_2(\varphi_1(x, \lambda_n)) + D_n U_2(\varphi_2(x, \lambda_n)) = 0. \quad (22)$$

Доказательство. 1. Пусть $\Delta(\lambda_n) = 0$. Тогда в силу (17) определитель системы (22) равен нулю. Следовательно, система (22) имеет ненулевое решение C_n, D_n . Построим функцию $Y_n(x)$ по формуле (21). Непосредственной проверкой убеждаемся, что $Y_n(x) \neq 0$ и удовлетворяет (6), (7) при $\lambda = \lambda_n$. Следовательно, λ_n является собственным значением краевой задачи (6), (7).

2. Пусть теперь λ_n — собственное значение краевой задачи (6), (7), а $Y_n(x)$ — соответствующая собственная функция. Разложим функцию $Y_n(x)$ по фундаментальной системе решений Б₃:

$$Y_n(x) = C_n \varphi_1(x, \lambda_n) + D_n \varphi_2(x, \lambda_n) + C_n^* \varphi_3(x, \lambda_n) + D_n^* \varphi_4(x, \lambda_n).$$

Применяя к обеим частям этого равенства линейную форму U_1 и учитывая, что $U_1(Y_n) = 0$, получим $C_n^* = D_n^* = 0$, т. е. справедливо представление (21). Так как $U_2(Y_n) = 0$, то применяя к обеим частям равенства (21) линейную форму U_2 , приходим к соотношению (22). Далее, так как $Y_n(x) \neq 0$, то $|C_n| + |D_n| > 0$, и, следовательно, система (22) имеет ненулевое решение. Но это означает, что определитель системы (22) равен нулю, т. е. $\Delta(\lambda_n) = 0$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. При вещественном λ и для любых дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций $Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}$, $Z(x) = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix}$, удовлетворяющих краевым условиям (7), имеет место равенство

$$\int_0^2 \langle L_\lambda Y(x), Z(x) \rangle dx = \int_0^2 \langle Y(x), L_\lambda Z(x) \rangle dx. \quad (23)$$



Доказательство. Запишем левую часть равенства (23) в координатах

$$\int_0^2 \langle L_\lambda Y(x), Z(x) \rangle dx = \int_0^2 \left\{ \left(y_1''(x) + i\kappa\alpha y_2'(x) - \left(\lambda + \frac{\kappa^2}{k^2} \right) y_1(x) \right) \bar{z}_1(x) + \left(\frac{1}{k^2} y_2''(x) + i\kappa\alpha y_1'(x) - (\lambda + \kappa^2) y_2(x) \right) \bar{z}_2(x) \right\} dx.$$

Выполняя дважды интегрирование по частям, преобразуем это выражение к виду

$$\begin{aligned} \int_0^2 \langle L_\lambda Y(x), Z(x) \rangle dx &= \int_0^2 \left\{ y_1'(x) \bar{z}_1(x) - y_1(x) \bar{z}_1'(x) + \frac{1}{k^2} (y_2'(x) \bar{z}_2(x) - y_2(x) \bar{z}_2'(x)) + \right. \\ &+ i\kappa\alpha (y_2(x) \bar{z}_1(x) + y_1'(x) \bar{z}_2'(x)) \left. \right\} + \int_0^2 \left\{ y_1(x) \left(\bar{z}_1''(x) - i\kappa\alpha \bar{z}_2'(x) - \left(\lambda + \frac{\kappa^2}{k^2} \right) \bar{z}_1(x) \right) + \right. \\ &\left. + y_2(x) \left(\frac{1}{k^2} \bar{z}_2''(x) - i\kappa\alpha \bar{z}_2'(x) - (\lambda + \kappa^2) \bar{z}_2(x) \right) \right\} dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Воспользуемся тем, что функция $y(x)$ удовлетворяет краевым условиям (7), т. е.

$$y_1'(0) = -i\kappa y_2(0), \quad y_2'(0) = -i\kappa\beta y_1(0), \quad y_1'(2) = -i\kappa y_2(2), \quad y_2'(2) = -i\kappa\beta y_1(2).$$

Тогда из (24) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_0^2 \langle L_\lambda Y(x), Z(x) \rangle dx &= \int_0^2 \left\{ y_1(x) \left(-\bar{z}_1'(x) - \frac{i\kappa\beta}{k^2} \bar{z}_2(x) + i\kappa\alpha \bar{z}_2(x) \right) + \right. \\ &+ y_2(x) \left(-i\kappa \bar{z}_1(x) - \frac{1}{k^2} \bar{z}_2'(x) + i\kappa\alpha \bar{z}_1(x) \right) \left. \right\} + \int_0^2 \left\{ y_1(x) \left(\overline{z_1''(x) + i\kappa\alpha z_2'(x) - \left(\lambda + \frac{\kappa^2}{k^2} \right) z_1(x)} \right) + \right. \\ &\left. + y_2(x) \left(\overline{\frac{1}{k^2} z_2''(x) + i\kappa\alpha z_1'(x) - (\lambda + \kappa^2) z_2(x)} \right) \right\} dx. \end{aligned}$$

Функция $Z(x)$ удовлетворяет краевым условиям (7), т. е.

$$\bar{z}_1'(0) = i\kappa \bar{z}_2(0), \quad \bar{z}_2'(0) = i\kappa\beta \bar{z}_1(0), \quad \bar{z}_1'(2) = i\kappa \bar{z}_2(2), \quad \bar{z}_2'(2) = i\kappa\beta \bar{z}_1(2).$$

Так как $\alpha - \frac{\beta}{k^2} = 1$, то подстановка $\left\{ \dots \right\}$ равна нулю, и мы приходим к равенству (23). Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Собственные значения краевой задачи (6), (7) вещественны. Собственные функции краевой задачи (6), (7), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в пространстве $L_2^2(0, 2)$.

Доказательство. Воспользуемся равенством (23) при $\lambda = 0$, $Y(x) = Y_n(x)$, $Z(x) = Y_m(x)$. Так как $Y_n(x)$ являются собственными функциями краевой задачи (6), (7), то они являются дважды непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяют краевым условиям (7). Поэтому в силу (23) имеем

$$\int_0^2 \langle LY_n(x), Y_m(x) \rangle dx = \int_0^2 \langle Y_n(x), LY_m(x) \rangle dx.$$

Так как $LY_n(x) = \lambda_n Y_n(x)$, то приходим к равенству

$$(\lambda_n - \bar{\lambda}_m) \int_0^2 \langle Y_n(x), Y_m(x) \rangle dx = 0. \quad (25)$$



Возьмем сначала в (25) $n = m$. Так как $Y_n(x) \neq 0$, то

$$\int_0^2 \langle Y_n(x), Y_n(x) \rangle dx = \|Y_n(x)\|_{L_2^2(0,2)}^2 > 0,$$

и, следовательно, из (25) находим $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$. Таким образом, собственные значения краевой задачи (6), (7) вещественны. Пусть теперь в (25) $\lambda_n \neq \lambda_m$. Тогда

$$\int_0^2 \langle Y_n(x), Y_m(x) \rangle dx = 0,$$

т. е. собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *Характеристическая функция представима в виде*

$$\Delta(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda), \tag{26}$$

где

$$f(\lambda) = k\omega^2 \sin 2\omega \sin 2k\omega, \tag{27}$$

а для функции $g(\lambda)$ имеет место оценка

$$|g(\lambda)| \leq C|\omega| \exp(2(k+1)|\tau|), \tag{28}$$

где $\tau = \text{Im} \omega$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (19). При достаточно больших $|\omega|$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \sin 2a &= \sin \left(2\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right) = \sin 2\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right), \\ \cos 2a &= \cos \left(2\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right) = \cos 2\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right). \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

Аналогично

$$\sin 2b = \sin 2k\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \cos 2b = \cos 2k\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{30}$$

Используя формулы Эйлера, получаем оценки

$$|\sin 2\omega| \leq \exp(2|\tau|), \quad |\sin 2k\omega| \leq \exp(2k|\tau|), \quad |\cos 2\omega| \leq \exp(2|\tau|), \quad |\cos 2k\omega| \leq \exp(2k|\tau|), \tag{31}$$

Подставляя теперь асимптотические формулы (20), (29), (30) в правую часть равенства (19) и пользуясь оценками (31), получаем требуемое представление (26). Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. *Собственные значения $\lambda_n = -\omega_n^2$ краевой задачи (6), (7) образуют две последовательности $\{\omega_n\} = \{\omega_{n1}\} \cup \{\omega_{n2}\}$, причем при $n \rightarrow \infty$*

$$\omega_{n1} = \frac{\pi n}{2} + o(1), \quad \omega_{n2} = \frac{\pi n}{2k} + o(1). \tag{32}$$

Доказательство. Возьмем достаточно малое, но фиксированное число $\delta > 0$. Через G_δ^0 обозначим ω -плоскость с выброшенными круговыми δ -окрестностями точек $\left\{ \frac{\pi n}{2} \right\}, \left\{ \frac{\pi n}{2k} \right\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В области G_δ^0 имеют место оценки

$$|\sin 2\omega| \geq C \exp(2|\tau|), \quad |\sin 2k\omega| \geq C \exp(2k|\tau|), \tag{33}$$

где константа C зависит от δ . Из (27) и (33) получаем оценку снизу для функции $f(\lambda)$

$$|f(\lambda)| \geq C|\omega^2| \exp(2(k+1)|\tau|). \tag{34}$$



Обозначим $G_\delta = \mathbb{C} \setminus G_\delta^0$ т.е. G_δ — совокупность δ -окрестностей точек $\left\{\frac{\pi n}{2}\right\}, \left\{\frac{\pi n}{2k}\right\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда $G_\delta = \bigcup_N G_{\delta, N}$, где $G_{\delta, N}$ — непересекающиеся односвязные компоненты множества G_δ . Обозначим через $\gamma_{\delta, N}$ границу области $G_{\delta, N}$. Рассмотрим в области G_δ^0 контуры $\Gamma_N = \{\omega : |\omega| = R_N\}$ — окружности радиусов $R_N \rightarrow \infty$. При достаточно больших N из оценок (28), (34) вытекает, что

$$|f(\lambda)| > |g(\lambda)|, \quad \omega \in \Gamma_N.$$

Поэтому по теореме Руше [10] внутри Γ_N целые функции $\Delta(\lambda)$ и $f(\lambda)$ имеют одинаковое число нулей с учетом кратностей. Далее, при достаточно больших N из (28), (34) вытекает, что

$$|f(\lambda)| > |g(\lambda)|, \quad \omega \in \gamma_{\delta, N}.$$

Снова применяем теорему Руше, но уже к области $G_{\delta, N}$, и получаем, что функции $\Delta(\lambda)$ и $f(\lambda)$ имеют в $G_{\delta, N}$ одинаковое число нулей с учетом кратностей.

Нули функции $f(\lambda)$ суть $\left\{\frac{\pi n}{2}\right\}, \left\{\frac{\pi n}{2k}\right\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В силу произвольности $\delta > 0$ получаем, что целая функция $\Delta(\lambda)$ имеет счетное множество нулей $\lambda_n = -\omega_n^2$. Эти нули образуют две последовательности $\{\omega_n\} = \{\omega_{n1}\} \cup \{\omega_{n2}\}$, причем при $n \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические формулы (32). Утверждение 5 доказано.

Пример. Пусть $\varkappa = 0$. Тогда $\varphi_1(x) = \begin{bmatrix} \cos \omega x \\ 0 \end{bmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos k\omega x \end{bmatrix}, \Delta(\lambda) = k\omega^2 \sin 2\omega \sin 2k\omega$.

Собственные значения в случае $\varkappa = 0$ имеют вид $\lambda_n = -\omega_n^2, \{\omega_n\} = \left\{\frac{\pi n}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\pi n}{2k}\right\}$, а собственные функции имеют вид $\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi n}{2} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \frac{\pi n}{2} x \end{bmatrix}$.

4. ПОЛНОТА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ

4.1. В этом пункте мы построим функцию Грина краевой задачи (6), (7), которая является ядром обратного оператора краевой задачи.

Возьмем произвольную фундаментальную систему решений (6):

$$B = \{\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x)\}, \quad \psi_j(x) = \begin{bmatrix} \psi_{1j}(x) \\ \psi_{2j}(x) \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Обозначим

$$\Phi_1(x) = \begin{bmatrix} \psi_{11}(x) & \psi_{12}(x) \\ \psi_{21}(x) & \psi_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(x) = \begin{bmatrix} \psi_{13}(x) & \psi_{14}(x) \\ \psi_{23}(x) & \psi_{24}(x) \end{bmatrix},$$

$$\Omega(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1'(x) & \Phi_2'(x) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi'_{11}(x) & \psi'_{12}(x) & \psi'_{13}(x) & \psi'_{14}(x) \\ \psi'_{21}(x) & \psi'_{22}(x) & \psi'_{23}(x) & \psi'_{24}(x) \\ \psi_{11}(x) & \psi_{12}(x) & \psi_{13}(x) & \psi_{14}(x) \\ \psi_{21}(x) & \psi_{22}(x) & \psi_{23}(x) & \psi_{24}(x) \end{bmatrix}.$$

Пусть $S(x) = \begin{bmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) & S_{13}(x) & S_{14}(x) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) & S_{23}(x) & S_{24}(x) \\ S_{31}(x) & S_{32}(x) & S_{33}(x) & S_{34}(x) \\ S_{41}(x) & S_{42}(x) & S_{43}(x) & S_{44}(x) \end{bmatrix}$ — матрица, обратная к $\Omega(x)$, а

$$S_1(x) = \begin{bmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad S_2(x) = \begin{bmatrix} S_{31}(x) & S_{32}(x) \\ S_{41}(x) & S_{42}(x) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим функцию $g(x, t) = g(x, t, \lambda)$ вида

$$g(x, t) = \Phi_1(x)S_1(t) + \Phi_2(x)S_2(t), \quad x \geq t. \tag{35}$$



Из построения, в частности, следует, что

$$g(x, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \Big|_{t=x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция $g(x, t)$ называется *функцией Грина задачи Коши*. Она не зависит от выбора фундаментальной системы решений Б.

Задача Коши

$$L_\lambda Y(x) = F(x), \quad Y(0) = Y'(0) = 0 \tag{36}$$

имеет единственное решение, которое даётся формулой

$$Y(x) = \int_0^x g(x, t) F(t) dt,$$

что проверяется непосредственной подстановкой в (36).

Рассмотрим неоднородную краевую задачу:

$$L_\lambda Y(x) = F(x), \tag{37}$$

$$U_1(Y) = U_2(Y) = 0. \tag{38}$$

Общее решение уравнения (37) имеет вид

$$Y(x) = \Phi_1(x)C_1 + \Phi_2(x)C_2 + \int_0^x g(x, t) F(t) dt, \tag{39}$$

где $C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix}$ — произвольные постоянные векторы.

Определим C_1, C_2 . Для этого подставим (39) в краевые условия (38). Получим

$$\begin{bmatrix} U_1(\Phi_1) & U_1(\Phi_2) \\ U_2(\Phi_1) & U_2(\Phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\int_0^2 U^*(t) F(t) dt \end{bmatrix}, \tag{40}$$

где $U^*(t) = U_2(g(x, t))$ по x .

Обозначим $U = \begin{bmatrix} U_1(\Phi_1) & U_1(\Phi_2) \\ U_2(\Phi_1) & U_2(\Phi_2) \end{bmatrix}$, $Q = U^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$. Решая (40), вычисляем

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\int_0^2 U^*(t) F(t) dt \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$C_1 = -Q_{12} \int_0^2 U^*(t) F(t) dt, \quad C_2 = -Q_{22} \int_0^2 U^*(t) F(t) dt. \tag{41}$$

Подставляя (41) в (39), получаем

$$Y(x) = \int_0^2 G(x, t) F(t) dt, \tag{42}$$

где функция $G(x, t) = G(x, t, \lambda)$ определяется формулой

$$G(x, t) = g(x, t) - (\Phi_1(x)Q_{12} + \Phi_2(x)Q_{22})U^*(t). \tag{43}$$

Здесь подразумевается, что $g(x, t) \equiv 0$ при $t > x$. Функция $G(x, t)$ не зависит от выбора фундаментальной системы решений Б. В частности, выбирая в качестве Б фундаментальную систему решений $B_3 = \{\varphi_j(x)\}_{j=\overline{1,4}}$, получаем, что $\det U = \Delta(\lambda)$.



Таким образом, мы доказали, что если $\lambda \neq \lambda_n$, то краевая задача (37), (38) имеет единственное решение, которое имеет вид (42), (43), причем функция $G(x, t)$ при фиксированном $\lambda \neq \lambda_n$ непрерывна по x и t . Функция $G(x, t)$ называется *функцией Грина краевой задачи*.

Полезно иметь другую формулу для вычисления функции Грина $G(x, t)$. Из (43) с учетом (35) и равенства $Q = U^{-1}$ получим

$$G(x, t) = \begin{cases} \Phi_1(x)Q_{11}U_1(\Phi_1)S_1(t) - \Phi_1(x)Q_{12}U_2(\Phi_2)S_2(t) - \\ \quad - \Phi_2(x)Q_{22}U_2(\Phi_1)S_1(t) + \Phi_2(x)Q_{21}U_1(\Phi_2)S_2(t), & t \leq x, \\ -\Phi_1(x)Q_{12}U_2(\Phi_1)S_1(t) - \Phi_1(x)Q_{12}U_2(\Phi_2)S_2(t) - \\ \quad - \Phi_2(x)Q_{22}U_2(\Phi_1)S_1(t) - \Phi_2(x)Q_{22}U_2(\Phi_2)S_2(t), & t \geq x. \end{cases}$$

4.2. В этом пункте мы докажем теорему о полноте и о разложении по собственным функциям. Для этого предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 6. При вещественных $\lambda \neq \lambda_n$

$$G(x, t) = (\overline{G(t, x)})^T. \tag{44}$$

Доказательство. Пусть $F(x), f(x)$ — произвольные непрерывные вектор-функции. Обозначим

$$Y(x) = \int_0^2 G(x, t)F(t) dt, \quad Z(x) = \int_0^2 G(x, t)f(t) dt. \tag{45}$$

Тогда согласно вышеизложенному имеем

$$L_\lambda Y(x) = F(x), \quad L_\lambda Z(x) = f(x). \tag{46}$$

Функции $Y(x), Z(x)$ удовлетворяют краевым условиям $U_j(Y) = U_j(Z) = 0, j = 1, 2$.

Воспользуемся утверждением 2. В силу (23) имеем $\int_0^2 \langle L_\lambda Y(x), Z(x) \rangle dx = \int_0^2 \langle Y(x), L_\lambda Z(x) \rangle dx$, или с учётом (46) $\int_0^2 \langle F(x), Z(x) \rangle dx = \int_0^2 \langle Y(x), f(x) \rangle dx$. Используя (45), вычисляем

$$\int_2^0 \bar{Z}^T(x)F(x) dx = \int_0^2 \bar{f}^T(x) dx \int_0^2 G(x, t)F(t) dt = \int_0^2 \left(\int_0^2 \bar{f}^T(x)G(x, t) dx \right) F(t) dt.$$

В силу произвольности $F(t)$ заключаем, что $\bar{Z}^T(x) = \int_0^2 \bar{f}^T(t)G(t, x) dt$ или, что то же самое, $Z(x) = \int_0^2 (\overline{G(t, x)})^T f(t) dt$. Сравним это соотношение с (45). В силу произвольности $f(t)$ получаем $(\overline{G(t, x)})^T = G(x, t)$. Утверждение 6 доказано.

Возьмем фиксированное вещественное $\lambda \neq \lambda_n$ и рассмотрим интегральный оператор $Y = GF$ в пространстве $L_2^2(0, 2)$ вида

$$Y(x) = \int_0^2 G(x, t)F(t) dt, \quad F(x) \in L_2^2(0, 2). \tag{47}$$

Утверждение 7. Оператор G является вполне непрерывным, самосопряженным. Оператор G обратим, т. е. существует обратный G^{-1} .

Доказательство. Так как функция $G(x, t)$ является непрерывной по x, t , то она является ядром Гильберта – Шмидта, и, следовательно, оператор G вида (47) является вполне непрерывным (см. [11]). Обратимость оператора G очевидна, так как обратный оператор G^{-1} задается соотношениями (37), (38).

Докажем самосопряженность оператора G . В самом деле, для любых вектор-функций $F(x), f(x) \in L_2^2(0, 2)$ имеем



$$(GF, f)_{L_2^2(0,2)} = \int_0^2 \langle GF(x), f(x) \rangle dx = \int_0^2 \bar{f}^T(x) dx \int_0^2 G(x, t) F(t) dt.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$(GF, f)_{L_2^2(0,2)} = \int_0^2 \left(\int_0^2 \bar{f}(t) G(t, x) dt \right) F(x) dx = \int_0^2 \left(\int_0^2 \overline{[G(t, x)]^T f(t) dt} \right)^T F(x) dx.$$

Используя равенство (44), вычисляем

$$(GF, f)_{L_2^2(0,2)} = \int_0^2 \left(\int_0^2 G(x, t) f(t) dt \right)^T F(x) dx = (F, Gf)_{L_2^2(0,2)}.$$

Отсюда вытекает, что $G^* = G$, т. е. оператор G является самосопряженным. Утверждение 7 доказано.

Утверждение 8. *Характеристические числа оператора G суть $\lambda_n^+ = \lambda_n - \lambda$. Функции $Y_n(x)$ являются собственными функциями оператора G , отвечающими характеристическим числам λ_n^+ .*

Доказательство. В самом деле, соотношения $LY_n(x) = \lambda_n Y_n(x)$, $U_1(Y_n) = U_2(Y_n) = 0$ равносильны соотношениям

$$L_\lambda Y_n(x) = (\lambda_n - \lambda) Y_n(x), \quad U_1(Y_n) = U_2(Y_n) = 0,$$

или

$$Y_n(x) = (\lambda_n - \lambda) \int_0^2 G(x, t) Y_n(t) dt.$$

Таким образом, $\lambda_n^+ G Y_n(x) = Y_n(x)$, и утверждение 8 доказано.

Воспользуемся теоремой Гильберта – Шмидта [12].

Теорема Гильберта – Шмидта. *Пусть A – вполне непрерывный, самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве H . Пусть μ_n – характеристические числа оператора A , а $\{\varphi_n\}$ собственные вектора, отвечающие характеристическим числам μ_n . Тогда для любого элемента $\xi \in H$ имеет место представление*

$$\xi = \sum_n c_n \varphi_n + \xi',$$

где $\xi' \in \text{Ker } A$. При этом

$$A\xi = \sum_n \frac{c_n}{\mu_n} \varphi_n. \tag{48}$$

Если оператор A является интегральным оператором с непрерывным ядром, то ряд (48) сходится абсолютно и равномерно.

Применим теорему Гильберта – Шмидта к оператору G . Так как оператор G обратим, то $\text{Ker } G = 0$, и, следовательно, любая вектор-функция $F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{bmatrix} \in L_2^2(0, 2)$ единственным образом разлагается в ряд по собственным функциям $\{Y_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_n c_n Y_n(x), \tag{49}$$

причем ряд (49) сходится по норме пространства $L_2^2(0, 2)$. Пользуясь ортогональностью собственных функций $\{Y_n(x)\}$ (см. теорему 2), вычисляем коэффициенты C_n :

$$c_n = \frac{(F(x), Y_n(x))_{L_2^2(0,2)}}{\|Y_n(x)\|_{L_2^2(0,2)}^2}.$$

Если, кроме того, $F(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет краевым условиям $U_1(F) = U_2(F) = 0$, то $F(x)$ принадлежит области значений оператора G , т. е.



существует $f(x) \in L_2^2(0, 2)$ такая, что $F(x) = Gf(x)$. Отсюда вытекает, что ряд (49) будет сходиться абсолютно и равномерно по $x \in [0, 2]$. Таким образом, теоремы 3 и 4 полностью доказаны.

В заключение отметим, что для доказательства теоремы о разложении может быть применен также метод контурного интеграла (см., например, [13]). Для этого надо проинтегрировать функцию Грина $G(x, t) = G(x, t, \lambda)$ по системе расширяющихся контуров в λ -плоскости, не проходящих через собственные значения λ_n . Вычисляя затем полученные интегралы и применяя теорию вычетов, получаем в пределе, с одной стороны, ряд Фурье по собственным функциям, а с другой стороны, разлагаемую функцию $F(x)$.

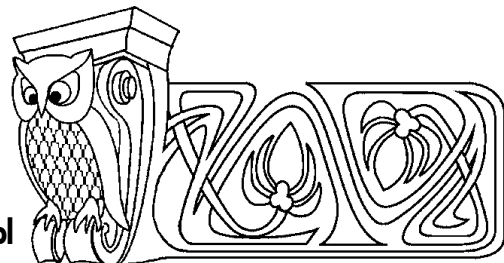
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).

Библиографический список

1. Айнола Л., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14, № 1. С. 3–63.
2. Нигул У.К. Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям // ПММ. 1969. Вып. 2. С. 308–322.
3. Nigul U. Regions of effective of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Intern. J. of Solid and Structures. 1969. Vol. 5. P. 607–627.
4. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругости тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 176 с.
5. Kaplunov U.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San-Diego: Academic Press, 1998. 226 с.
6. Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 111–131.
7. Miklovits Y. On wave propagation in an elastic plate with nonmixed edge conditions // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. Vol. 41, № 6. P. 1587.
8. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
9. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 272 с.
10. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.
11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 624 с.
13. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

УДК 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА УПРУГОГО СТЕРЖНЯ КАК МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ



К.С. Листрова, В.К. Манжосов

Ульяновский государственный технический университет,
кафедра теоретической и прикладной механики
E-mail: v.manjosov@ulstu.ru

Разработана модель продольного удара стержня как механической системы с конечным числом степеней свободы. Уравнения движения преобразованы к виду, когда в структуре уравнений представлен параметр, определяющий скорость звука в материале стержня. Это позволяет естественным образом сопоставлять результаты с волновой моделью продольного удара. Представлен алгоритм численного решения уравнений движения и его реализация при моделировании продольного удара тестового объекта.

Ключевые слова: продольный удар, модель удара, удар стержня, удар о жесткую преграду, ударная сила, волновая модель удара.

Modelling of the Longitudinal Impact Springy Rod as Mechanical System with Final Number of the Degree of the Liberty

K.S. Listrova, V.K. Manjosov

Ulyanovsk State Technical University,
Chair of Theoretical and Applied Mechanics
E-mail: v.manjosov@ulstu.ru

The model of the longitudinal impact rod was designed as mechanical system with final number of the degrees of the liberty. The Equations of the motion are transformed to type, when in structure of the equations is presented parameter, defining velocity of the sound in material rod. This allows the natural image to match the results with wave model of the longitudinal impact. The Presented algorithm of the numerical decision of the equations of the motion and its realization at modeling of the longitudinal impact of the test object.

Key words: longitudinal impact, model of the impact, impact of the rod, impact about hard barrier, striking power, wave model of the impact.