// J. of Biomechanics. 1987. Vol. 20. P. 271–280.
17. *Weinbaum S., Cowin S.C., Zeng Y.* A model for the excitation of osteocytes by mechanical loading-induced bone fluid shear stresses // J. of Biomechanics. 1994. Vol. 27, № 3. P. 339–360.
18. *Стецула В.И., Бруско А.Т.* Механизм адаптационной перестройки костей // Структура и биомеханика скелетно-мышечной и сердечно-сосудистой систем позвоночных: сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1984. С. 141–143.
19. *Knothe-Tate M.L., Niederer P., Knothe U.* In vivo tracer transport through the lacunocanalicular system of rat bone in an environment devoid of mechanical loading // Bone. 1998. № 22. P. 107–117.
20. *Neidlinger-Wilke C., Stall I., Claes L., Brand R., Hoellen I., Rubenacker S., Arand M., Kinzl L.* Human osteoblasts from younger normal and osteoporotic donors show differences in proliferation and TGF-3 release in response to cyclic strain // J. of Biomechanics. 1995. Vol. 28. P. 1411–1418.
21. *Сотин А.В., Акулич Ю.В., Подгаец Р.М.* Модель адаптивной перестройки кортикальной костной ткани // Рос. журн. биомеханики. 2001. Т. 5, № 1. С. 24–32.
22. *Регирер С.А., Штейн А.А., Логвенков С.А.* Свойства и функции костных клеток: биомеханические аспекты // Современные проблемы биомеханики. Механика роста и морфогенеза. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. Вып. 10. С. 174–224.
23. *Lanyon L.E.* Functional strain in bone tissue as an objective and controlling stimulus for adaptive bone remodeling // J. of Biomechanics. 1997. Vol. 20, № 11. P. 1083–1093.

УДК 539.374

# АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОДНОМЕРНЫХ ПОДАЛГЕБР ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

**В.А. Ковалев**[1], **Ю.Н. Радаев**[2]

[1]Московский городской университет управления Правительства Москвы,
кафедра прикладной математики;
[2]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
E-mail: vlad_koval@mail.ru, y.radayev@gmail.com

Рассматривается естественная конечномерная (размерности $12$) подалгебра алгебры симметрий, соответствующей группе симметрий предложенных в 1959 г. Д.Д. Ивлевым трехмерных гиперболических уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности для состояний, отвечающих ребру призмы Кулона – Треска, сформулированных в изостатической системе координат. Приводится алгоритм построения оптимальной системы одномерных подалгебр указанной естественной конечномерной подалгебры алгебры симметрий, насчитывающей один трехпараметрический элемент, $12$ двухпараметрических, $66$ однопараметрических элементов и $108$ индивидуальных элементов (всего $187$ элементов).

**Ключевые слова:** теория пластичности, изостатические координаты, группа симметрий, алгебра симметрий, подалгебра, оптимальная система, алгоритм.

**An Optimal System Constructing Algorithm for Symmetry Algebra of Three-Dimensional Equations of the Perfect Plasticity**

**V.A. Kovalev**[1], **Yu.N. Radayev**[2]

[1]Moscow City Government University of Management,
Chair of Applied Mathematics
[2]Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow
E-mail: vlad_koval@mail.ru, y.radayev@gmail.com

The present study is devoted to study of a natural $12$-dimensional symmetry algebra of the three-dimensional hyperbolic differential equations of the perfect plasticity, obtained by D.D. Ivlev in 1959 and formulated in isostatic co-ordinate net. An optimal system of one-dimensional subalgebras constructing algorithm for the Lie algebra is proposed. The optimal system (total $187$ elements) is shown consist of a 3-parametrical element, twelve 2-parametrical elements, sixty six 1-parametrical elements and one hundred and eight individual elements.

**Key words:** theory of plasticity, isostatic co-ordinate, symmetry group, symmetry algebra, subalgebra, optimal system, algorithm.

## 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для ребра призмы Кулона – Треска, определяемого условием «полной пластичности» Хаара – Кармана $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ ($\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ — главные нормальные напряжения, $k$ — предел текучести при сдвиге), уравнения равновесия, полученные Д.Д. Ивлевым в 1959 г. [1], можно представить в форме одного векторного уравнения (см. $[2, 3]$):

$$\mathrm{grad}\sigma_3 \mp 2k\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

 

где $\mathbf{n}$ — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению $\sigma_3$ тензора напряжений. Уравнение (1) принадлежит к гиперболическому аналитическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям образуют круговой конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{n}$. Направления, ортогональные вектору $\mathbf{n}$, тоже указывают ориентацию характеристических элементов.

Векторное уравнение (1) может иметь решения с нетривиальной геометрией векторных линий поля $\mathbf{n}$, только если указанное поле является расслоенным [3]. Критерием расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ в некоторой пространственной области выступает уравнение Якоби:

$$\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n}=0.$$

Условие расслоенности поля $\mathbf{n}$ позволяет нам ввести 2/3-ортогональные криволинейные координаты $\omega^\alpha$ ($\alpha=1,2,3$), определяемые по векторному полю $\mathbf{n}$, так, что координатные поверхности $\omega^3=\mathrm{const}$ являются слоями поля $\mathbf{n}$. Координатные линии на слое векторного поля $\mathbf{n}$ могут пересекаться под произвольным углом; третья координатная линия ортогональна слою и ортогональна первым двум координатным линиям.

Для нахождения соответствующей замены координат ($x_j$ — пространственные декартовы координаты)

$$x_j=f_j(\omega^1,\omega^2,\omega^3)\qquad(j=1,2,3) \tag{2}$$

может быть получена следующая существенно нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=0,\\
\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=0,\\
\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^2}-\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\right)\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\left(\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^2}-\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\right)\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\\
\qquad+\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^2}-\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\right)\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^3}-1=0.
\end{cases} \tag{3}$$

Как свидетельствует проведенный в предыдущих публикациях анализ (см., например, [4]), трехмерные уравнения Д.Д. Ивлева обладают достаточно высокой степенью симметрии, что, возможно, позволит получить ряд новых точных решений, описывающих трехмерное напряженное состояние идеально пластических тел при условии «полной пластичности» Хаара – Кармана.

## 2. АЛГЕБРА СИММЕТРИЙ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Групповой анализ (теория симметрий) дифференциальных уравнений сложился как самостоятельное научное направление в работах С. Ли в конце XIX в. Вычислительные алгоритмы группового анализа дифференциальных уравнений основаны на линейных уравнениях, исследование которых значительно проще по сравнению с нелинейными уравнениями, симметрии которых подлежат определению. Вычислительные методы теории симметрий дифференциальных уравнений алгоритмичны и включены в современные компьютерные системы символьных вычислений.

Методы группового анализа применительно к системам дифференциальных уравнений в частных производных изложены в классической монографии [5]. Мы будем, по возможности, придерживаться терминологии и обозначений, принятых именно в этой книге. Мы рекомендуем также монографии [6–10] для изучения основ группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных.

Применяя методы группового анализа дифференциальных уравнений, можно вычислить инфинитезимальный генератор $(\varsigma\cdot\partial)$ группы симметрий системы дифференциальных уравнений (3), зависящий от 12 произвольных постоянных

$$\begin{gathered}
(\varsigma\cdot\partial)=C_1(\varsigma_1\cdot\partial)+C_2(\varsigma_2\cdot\partial)+C_3(\varsigma_3\cdot\partial)+B_1(\varsigma_4\cdot\partial)+B_2(\varsigma_5\cdot\partial)+B_3(\varsigma_6\cdot\partial)+\\
+A_1(\varsigma_7\cdot\partial)+A_2(\varsigma_8\cdot\partial)+A_3(\varsigma_9\cdot\partial)+C_{10}(\varsigma_{10}\cdot\partial)+C_{11}(\varsigma_{11}\cdot\partial)+C_{12}(\varsigma_{12}\cdot\partial),
\end{gathered} \tag{4}$$

где базисные инфинитезимальные генераторы определены согласно

$$
\begin{aligned}
&(\varsigma_1\cdot\partial) = 3\omega^3\frac{\partial}{\partial\omega^3} + f_1\frac{\partial}{\partial f_1} + f_2\frac{\partial}{\partial f_2} + f_3\frac{\partial}{\partial f_3}, && (\varsigma_7\cdot\partial) = f_3\frac{\partial}{\partial f_2} - f_2\frac{\partial}{\partial f_3},\\
&(\varsigma_2\cdot\partial) = \omega^3\frac{\partial}{\partial\omega^3} - \frac{\omega^1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega^1} - \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial}{\partial\omega^2}, && (\varsigma_8\cdot\partial) = f_1\frac{\partial}{\partial f_3} - f_3\frac{\partial}{\partial f_1},\\
&(\varsigma_3\cdot\partial) = \frac{\partial}{\partial\omega^3}, && (\varsigma_9\cdot\partial) = f_2\frac{\partial}{\partial f_1} - f_1\frac{\partial}{\partial f_2},\\
&(\varsigma_4\cdot\partial) = \frac{\partial}{\partial f_1}, && (\varsigma_{10}\cdot\partial) = \frac{\partial}{\partial\omega^1},\\
&(\varsigma_5\cdot\partial) = \frac{\partial}{\partial f_2}, && (\varsigma_{11}\cdot\partial) = \frac{\partial}{\partial\omega^2},\\
&(\varsigma_6\cdot\partial) = \frac{\partial}{\partial f_3}, && (\varsigma_{12}\cdot\partial) = \omega^1\frac{\partial}{\partial\omega^1} - \omega^2\frac{\partial}{\partial\omega^2}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

В приведенном выше списке инфинитезимальные операторы $(\varsigma_4\cdot\partial)$, $(\varsigma_5\cdot\partial)$, $(\varsigma_6\cdot\partial)$ соответствуют группам переносов вдоль декартовых осей $x_1$, $x_2$, $x_3$; инфинитезимальные операторы $(\varsigma_7\cdot\partial)$, $(\varsigma_8\cdot\partial)$, $(\varsigma_9\cdot\partial)$ соответствуют группам поворотов вокруг координатных осей $x_1$, $x_2$, $x_3$; инфинитезимальные операторы $(\varsigma_3\cdot\partial)$, $(\varsigma_{10}\cdot\partial)$, $(\varsigma_{11}\cdot\partial)$ соответствуют группам трансляций изостатических координат $\omega^1$, $\omega^2$, $\omega^3$; инфинитезимальный оператор $(\varsigma_{12}\cdot\partial)$ определяет группу, инфинитезимально сохраняющую площадь двумерного плоского элемента $d\omega^1 d\omega^2$; инфинитезимальный оператор $(\varsigma_1\cdot\partial)$ соответствует группе совместных растяжений координат $\omega^3$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ в подходящих пропорциях; инфинитезимальный оператор $(\varsigma_2\cdot\partial)$ соответствует группе совместных растяжений – сжатий изостатических координат $\omega^1$, $\omega^2$, $\omega^3$ в подходящих пропорциях.

Известно, что алгебра симметрий пространственных уравнений математической теории пластичности (3) бесконечномерна. «Естественная» конечномерная «часть» указанной алгебры симметрий образуется генераторами вида (4). Действительно, можно показать, что инфинитезимальные операторы $(\varsigma_j\cdot\partial)$ $(j=\overline{1,12})$ линейно независимы. Поэтому можно ввести конечномерное линейное подпространство, представляющее собой линейную оболочку базисных операторов $(\varsigma_j\cdot\partial)$. Двенадцатимерное линейное пространство с базисом из инфинитезимальных операторов (5) наделяется стандартной алгебраической структурой с помощью билинейной операции коммутации операторов (скобка Пуассона операторов). Чтобы доказать, что линейная оболочка операторов (5) образует алгебру Ли, необходимо составить таблицу коммутаторов базисных инфинитезимальных операторов $(\varsigma_j\cdot\partial)$ $(j=\overline{1,12})$, проверив при этом, что коммутаторы $[(\varsigma_i\cdot\partial),(\varsigma_j\cdot\partial)]$ снова можно разложить по базису $(\varsigma_k\cdot\partial)$:

$$[(\varsigma_i\cdot\partial),(\varsigma_j\cdot\partial)] = C^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}(\varsigma_k\cdot\partial). \tag{6}$$

Символы $C^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}$ в разложении (6) являются структурными константами алгебры Ли в базисе $(\varsigma_j\cdot\partial)$ $(j=\overline{1,12})$.

Таблица коммутаторов, приведенная ниже, показывает, что инфинитезимальные операторы (5) действительно определяют конечномерную подалгебру $L^{12}$ алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (3). Таблица составлена так, чтобы на пересечении строки с номером $i$ и столбца с номером $j$ находился коммутатор $[(\varsigma_i\cdot\partial),(\varsigma_j\cdot\partial)]$.

Структурные константы $C^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}$ рассматриваемой конечномерной алгебры Ли $L^{12}$ без труда определяются на основании приведенной таблицы коммутаторов. Здесь мы приводим ненулевые структурные константы алгебры Ли $L^{12}$ в базисе $(\varsigma_j\cdot\partial)$ $(j=\overline{1,12})$:

$$
\begin{gathered}
C^{3\cdot\cdot}_{\cdot 13}=-3,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 14}=-1,\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 15}=-1,\quad C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 16}=-1;\quad C^{3\cdot\cdot}_{\cdot 23}=-1,\quad C^{\underline{10}\cdot\cdot}_{\cdot 2\underline{10}}=1/2,\quad C^{\underline{11}\cdot\cdot}_{\cdot 2\underline{11}}=1/2;\\
C^{3\cdot\cdot}_{\cdot 31}=3,\quad C^{3\cdot\cdot}_{\cdot 32}=1;\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 41}=1,\quad C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 48}=1,\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 49}=-1;\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 51}=1,\quad C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 57}=-1,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 59}=1;\\
C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 61}=1,\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 67}=1,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 68}=-1;\quad C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 75}=1,\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 76}=-1,\quad C^{9\cdot\cdot}_{\cdot 78}=1,\quad C^{8\cdot\cdot}_{\cdot 79}=-1;\\
C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 84}=-1,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 86}=1,\quad C^{9\cdot\cdot}_{\cdot 87}=-1,\quad C^{7\cdot\cdot}_{\cdot 89}=1;\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 94}=1,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 95}=-1,\quad C^{8\cdot\cdot}_{\cdot 97}=1,\quad C^{7\cdot\cdot}_{\cdot 98}=-1;\\
C^{\underline{10}\cdot\cdot}_{\cdot \underline{10}2}=-1/2,\quad C^{\underline{10}\cdot\cdot}_{\cdot \underline{10}\underline{12}}=1;\quad C^{\underline{11}\cdot\cdot}_{\cdot \underline{11}2}=-1/2,\quad C^{\underline{11}\cdot\cdot}_{\cdot \underline{11}\underline{12}}=-1;\quad C^{\underline{10}\cdot\cdot}_{\cdot \underline{12}\underline{10}}=-1,\quad C^{\underline{11}\cdot\cdot}_{\cdot \underline{12}\underline{11}}=1.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Заметим, что натуральные числа, записываемые двумя цифрами, подчеркнуты снизу для того, чтобы отличать их от расположенных друг за другом натуральных чисел, представляемых одной цифрой.

Таблица коммутаторов инфинитезимальных операторов, определяющих естественную конечномерную подалгебру алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (3)

| | $(\varsigma_1\cdot\partial)$ | $(\varsigma_2\cdot\partial)$ | $(\varsigma_3\cdot\partial)$ | $(\varsigma_4\cdot\partial)$ | $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $(\varsigma_6\cdot\partial)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\varsigma_1\cdot\partial)$ | 0 | 0 | $-3(\varsigma_3\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_4\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_6\cdot\partial)$ |
| $(\varsigma_2\cdot\partial)$ | 0 | 0 | $-(\varsigma_3\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_3\cdot\partial)$ | $3(\varsigma_3\cdot\partial)$ | $(\varsigma_3\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_4\cdot\partial)$ | $(\varsigma_4\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_7\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_5\cdot\partial)$ |
| $(\varsigma_8\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | $-(\varsigma_6\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_4\cdot\partial)$ |
| $(\varsigma_9\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_4\cdot\partial)$ | 0 |
| $(\varsigma_{10}\cdot\partial)$ | 0 | $-1/2(\varsigma_{10}\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_{11}\cdot\partial)$ | 0 | $-1/2(\varsigma_{11}\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_{12}\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | $(\varsigma_7\cdot\partial)$ | $(\varsigma_8\cdot\partial)$ | $(\varsigma_9\cdot\partial)$ | $(\varsigma_{10}\cdot\partial)$ | $(\varsigma_{11}\cdot\partial)$ | $(\varsigma_{12}\cdot\partial)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\varsigma_1\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_2\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | $1/2(\varsigma_{10}\cdot\partial)$ | $1/2(\varsigma_{11}\cdot\partial)$ | 0 |
| $(\varsigma_3\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_4\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_5\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_6\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_4\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_4\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_7\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_9\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_8\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_8\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_9\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_7\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_9\cdot\partial)$ | $(\varsigma_8\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_7\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_{10}\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $(\varsigma_{10}\cdot\partial)$ |
| $(\varsigma_{11}\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-(\varsigma_{11}\cdot\partial)$ |
| $(\varsigma_{12}\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | $-(\varsigma_{10}\cdot\partial)$ | $(\varsigma_{11}\cdot\partial)$ | 0 |

Далее можно указать однопараметрические группы автоморфизмов рассматриваемой алгебры Ли $L^{12}$, порождаемые базисными векторами $\varsigma_j$ $(j=\overline{1,12})$. Для каждого базисного вектора $\varsigma_j$ $(j=\overline{1,12})$ имеем соответствующую однопараметрическую группу внутренних автоморфизмов, действующую на коэффициенты $C_1$, $C_2$, $C_3$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $C_{10}$, $C_{11}$, $C_{12}$; они приводятся в конце статьи в виде списка (1)–(12).

## 3. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЙ

Построение оптимальной системы одномерных подалгебр алгебры симметрий $L^{12}$ мы осуществим с помощью «наивного» подхода, состоящего в том, что инфинитезимальный оператор (4) (точнее, коэффициенты $C_1$, $C_2$, $C_3$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $C_{10}$, $C_{11}$, $C_{12}$) подвергается различным преобразованиям из списка (1)–(12) так, чтобы «упростить» его настолько, насколько это представляется возможным (в частности, стремясь привести к нулевому значению как можно больше из указанных двенадцати постоянных). Далее мы выбираем из каждого класса инфинитезимальных операторов, переводящихся друг в друга автоморфизмами (1)–(12), по одному простейшему представителю и формируем оптимальную систему одномерных подалгебр алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (3).

При поиске указанных простейших представителей, кроме однопараметрических групп автоморфизмов, будем применять также преобразование, заключающееся в умножении простейшего инфинитезимального оператора на некоторую постоянную (так называемое преобразование умножения).

Рассмотрим постоянные $A_i$ и $B_i$ как компоненты векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в трехмерном пространстве $x_1$, $x_2$, $x_3$. Тогда автоморфизмы (7), (8), (9) представляют собой повороты указанных векторов как жесткого целого на различные углы $\tau$ вокруг декартовых осей $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Если вектор $\mathbf{A}$ ненулевой (т.е. хотя бы одна из его компонент $A_i$ не равна нулю), то такими поворотами можно перевести вектор $\mathbf{A}$ в положение, когда он будет коллинеарен оси $x_1$. Ясно, что тогда $A_2 = A_3 = 0$, $A_1 \neq 0$. При этом, если вектор $\mathbf{B}$ не равен нулю (т.е. хотя бы одна из его компонент $B_i$ отлична от нуля), то поворотом вокруг оси $x_1$ вектор $\mathbf{B}$ можно преобразовать так, чтобы его проекция на ось $x_3$ (т.е. компонента $B_3$) была бы равна нулю ($B_3 = 0$). Применяя последовательно автоморфизмы (5), (6) при значениях $\tau$, равных соответственно $\dfrac{B_2C_1}{C_1^2 + A_1^2}$ и $\dfrac{B_2A_1}{C_1^2 + A_1^2}$, можно добиться того, чтобы компонента $B_2$ стала нулевой, не изменяя при этом нулевого значения компоненты $B_3$.

Если вектор $\mathbf{A}$ равен нулю (т.е. $A_1 = A_2 = A_3 = 0$), то поворотами (7), (8), (9) вектор $\mathbf{B}$ заведомо может быть переведен в такое положение, когда он будет коллинеарен оси $x_1$, и поэтому снова получаем $B_2 = B_3 = 0$.

Таким образом, при любых обстоятельствах можно добиться того, чтобы выполнялись равенства $A_2 = A_3 = 0$ и $B_2 = B_3 = 0$. Поскольку декартовы оси $x_j$ ($j = 1, 2, 3$) равноправны, то вместо $A_2 = A_3 = 0$ и $B_2 = B_3 = 0$ можно считать выполненными равенства $A_1 = A_3 = 0$ и $B_1 = B_3 = 0$ или $A_1 = A_2 = 0$ и $B_1 = B_2 = 0$.

Следует отметить, что если $C_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (4) при $\tau$, равном $B_1/C_1$, удается привести к нулевому значению компоненту $B_1$ вектора $\mathbf{B}$.

Дальнейшие рассуждения удобнее всего разбить на четыре этапа, характеризующихся выполнением перечисленных ниже условий

**I.** $C_2 \pm 2C_{12} \neq 0$;

**II.** $C_2 - 2C_{12} = 0$, $C_2 + 2C_{12} \neq 0$;

**III.** $C_2 + 2C_{12} = 0$, $C_2 - 2C_{12} \neq 0$;

**IV.** $C_2 = 0$, $2C_{12} = 0$.

**I.** На протяжении всего первого этапа будем считать, что выполняется условие $C_2 \pm 2C_{12} \neq 0$. Если $C_2$, $C_{12}$ выбираются так, что $C_2 \pm 2C_{12} \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (10) и (11) при $\tau$, соответственно равном $\dfrac{2C_{10}}{2C_{12} - C_2}$ и $\dfrac{-2C_{11}}{2C_{12} + C_2}$, можно привести к нулевому значению $C_{10}$ и $C_{11}$.

**I.A.** Коэффициенты $C_1$, $C_2$ подчиняются неравенству $3C_1 + C_2 \neq 0$. При выполнении неравенства $3C_1 + C_2 \neq 0$, применяя автоморфизм (3) при $\tau$, равном $\dfrac{C_3}{3C_1 + C_2}$, можно привести к нулевому значению $C_3$.

**I.A.1.** Считаем выполненным условие $C_1 \neq 0$. При условии $C_1 \neq 0$, как отмечалось выше, удается привести к нулевому значению $B_1$; применяя затем преобразование умножения, приводим $C_1$ к единице и таким образом получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_3(\varsigma_{12} \cdot \partial), \tag{8}$$

где $D_1$, $D_2$, $D_3$ — произвольные постоянные, подчиненные ограничению $|D_1| \neq 2|D_3|$.

**I.A.2.** Этот этап рассуждений характеризуется выполнением дополнительного условия $C_1 = 0$. Если $C_1 = 0$, то коэффициент $B_1$ привести к нулевому значению не удается.

**I.A.2.1.** Если, кроме того, $C_2 \neq 0$ и $B_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln |C_2/B_1|$, добиваемся того, чтобы коэффициенты $C_2$ и $B_1$ стали равными по абсолютной величине. В результате получаем простейших представителей вида

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{9}$$

**I.A.2.2.** Если полагать $C_2 \neq 0$ и $B_1 = 0$, то получаем следующих простейших представителей:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{10}$$

**I.B.** Коэффициенты $C_1$, $C_2$ подчиняются равенству $3C_1 + C_2 = 0$. Если $3C_1 + C_2 = 0$, то коэффициент $C_3$ сделать нулевым не удается.

**I.B.1.** Считаем выполненым условие $C_1 \neq 0$. Тогда удается привести к нулевому значению коэффициент $B_1$.

**I.B.1.1.** Если, кроме того, $C_3 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (2) при $\tau$, равном $\ln|C_1/C_3|$, приводим $C_1$ и $C_3$ к значениям, равным по модулю; учитывая $3C_1 + C_2 = 0$, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial). \quad (11)$$

**I.B.1.2.** Если $C_3 = 0$, то получаем двухпараметрическое семейство простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial). \quad (12)$$

**I.B.2.** Считаем выполненым условие $C_1 = 0$. Тогда в силу $3C_1 + C_2 = 0$ будет выполнено условие $C_2 = 0$. Ясно, что при этом $C_{12} \neq 0$. Если $C_1 = 0$, то коэффициент $B_1$ привести к нулевому значению не удается. В случае, когда $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, находим, что коэффициенты $C_3$ и $B_1$ не приводятся к нулевому значению.

**I.B.2.1.** Полагаем, что $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$. Если $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|A_1/B_1|$, убеждаемся, что $A_1$ и $B_1$ приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (2) при $\tau$, равном $\ln|A_1/C_3|$, приводим к равным абсолютным значениям коэффициенты $A_1$ и $C_3$. В итоге получаем однопараметрическое семейство простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0). \quad (13)$$

Здесь $D$ — произвольная постоянная.

**I.B.2.2.** Полагаем, что $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$. Применяя автоморфизм (1), приводим к равным абсолютным значениям коэффициенты $A_1$ и $C_3$. Получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0). \quad (14)$$

**I.B.2.3.** Полагаем, что $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$. Применяя автоморфизм (1), приводим к равным абсолютным значениям коэффициенты $A_1$ и $B_1$. Получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0). \quad (15)$$

**I.B.2.4.** Полагаем, что $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$. Напомним, что $C_{12} \neq 0$. Применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|C_{12}/B_1|$, что допустимо в силу $C_{12} \neq 0$, $B_1 \neq 0$, убеждаемся, что $C_{12}$ и $B_1$ приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (2) при $\tau$, равном $\ln|C_{12}/C_3|$, что допустимо в силу $C_{12} \neq 0$, $C_3 \neq 0$, приводим к равным абсолютным значениям величины $C_{12}$ и $C_3$. В результате получаем представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial).$$

**I.B.2.5.** Полагаем, что $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$. Применяя автоморфизм (1), приводим к равным абсолютным значениям коэффициенты $C_3$ и $C_{12}$, которые в пределах рассматриваемого случая оба отличны от нуля. Получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial).$$

**I.B.2.6.** Полагаем, что $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$. Применяя автоморфизм (1), приводим к равным абсолютным значениям коэффициенты $B_1$ и $C_{12}$, которые в пределах рассматриваемого случая оба отличны от нуля. Получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial).$$

**I.B.2.7.** Полагаем, что $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$. Коэффициент $C_{12}$ в пределах рассматриваемого случая отличен от нуля. Получаем однопараметрическое семейство простейших представителей:

$$(\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0).$$

**I.B.2.8.** Полагаем, что $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$. Коэффициент $C_{12}$ в пределах рассматриваемого случая отличен от нуля. Получаем простейшего представителя:

$$(\varsigma_{12} \cdot \partial).$$

**II.** Этот этап характеризуется выполнением условий $C_2 - 2C_{12} = 0$ и $C_2 + 2C_{12} \neq 0$. Если коэффициенты $C_2$, $C_{12}$ выбираются так, что $C_2 - 2C_{12} = 0$, но $C_2 + 2C_{12} \neq 0$ (т.е. $C_2 = 2C_{12} \neq 0$), то коэффициент $C_{10}$ не удается привести к нулевому значению. Применяя автоморфизм (11) при $\tau$, равном $\dfrac{-2C_{11}}{2C_{12} + C_2}$, можно привести к нулевому значению коэффициент $C_{11}$.

**II.A.** Считаем выполненным неравенство $3C_1 + C_2 \neq 0$.

**II.A.1.** Полагаем, кроме того, что удовлетворяется неравенство $C_1 \neq 0$. Если $C_1 \neq 0$ и $3C_1 + C_2 \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (4) и (3) при $\tau$, соответственно равном $\dfrac{B_1}{C_1}$ и $\dfrac{C_3}{3C_1 + C_2}$, можно привести к нулевому значению коэффициенты $B_1$ и $C_3$.

**II.A.1.1.** Дополнительно, полагаем, что $C_{10} \neq 0$. Поскольку $C_{10} \neq 0$, то, применяя автоморфизм (12) при $\tau$, равном $\ln|C_1/C_{10}|$, убеждаемся, что коэффициенты $C_1$ и $C_{10}$ приводятся к равным по модулю значениям; применяя затем преобразование умножения, приводим коэффициент $C_1$ к значению, равному единице, и таким образом получаем двухпараметрическое семейство простейших представителей вида

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial) \quad (D_1 \neq 0). \tag{16}$$

**II.A.1.2.** Этот случай характеризуется выполнением дополнительного равенства $C_{10} = 0$. Находим двухпараметрическое семейство простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial) \quad (D_1 \neq 0).$$

Это семейство *дополняет* (8) при $D_3 = \dfrac{1}{2}D_1$.

**II.A.2.** Полагаем, кроме того, что выполняется равенство $C_1 = 0$. Если $C_1 = 0$, то коэффициент $B_1$ привести к нулевому значению не удается.

**II.A.2.1.** Полагаем, что $C_{10} \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Применяя автоморфизм (12) при $\tau$, равном $\ln|C_2/C_{10}|$, убеждаемся, что $C_2$ и $C_{10}$ приводятся к равным по модулю значениям. Если $C_2 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|C_2/B_1|$, добиваемся того, чтобы коэффициенты $C_2$ и $B_1$ стали равными по абсолютной величине. В результате получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**II.A.2.2.** Полагаем, что $C_{10} \neq 0$, $B_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Получаем следующих простейших представителей:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**II.A.2.3.** Полагаем, что $C_{10} = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Применяя автоморфизм (1), убеждаемся, что $A_1$ и $B_1$ приводятся к равным по модулю значениям. Получаем следующих простейших представителей:

$$2(\varsigma_2 \cdot \partial) + D((\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial)) + (\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0). \tag{17}$$

**II.A.2.4.** Полагаем, что $C_{10} = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Получаем следующих простейших представителей:

$$2(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + (\varsigma_{12} \cdot \partial).$$

**II.A.2.5.** Полагаем, что $C_{10} = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Получаем следующих простейших представителей:

$$2(\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial) + (\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0). \tag{18}$$

**II.A.2.6.** Полагаем, что $C_{10} = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Получаем следующих простейших представителей:

$$2(\varsigma_2 \cdot \partial) + (\varsigma_{12} \cdot \partial),$$

которые дополняют (17), (18) при $D = 0$.

**II.B.** Считаем дополнительно выполненным равенство $3C_1 + C_2 = 0$. Если $3C_1 + C_2 = 0$, то коэффициент $C_3$ не удается привести к нулевому значению.

**II.B.1.** Полагаем, кроме того, что удовлетворяется неравенство $C_1 \neq 0$. Тогда можно привести к нулевому значению коэффициент $B_1$.

**II.B.1.1.** Дополнительно считаем, что $C_3 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$. Если $C_3 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (2) и (12) при $\tau$, равном соответственно $\ln|C_1/C_3|$ и $\ln|C_1/C_{10}|$, приводим $C_1$, $C_3$ и $C_{10}$ к значениям, равным по модулю, и, следовательно, получаем множество простейших представителей вида

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) - \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**II.B.1.2.** Дополнительно принимаем, что выполнены условия $C_3 \neq 0$, $C_{10} = 0$. Получаем множество простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) - \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**II.B.1.3.** Дополнительно принимаем, что выполнены условия $C_3 = 0$, $C_{10} \neq 0$. С помощью автоморфизма (12) коэффициенты $C_{10}$ и $C_1$ удается привести к значениям, одинаковым по абсолютной величине. Учитывая еще, что $3C_1 + C_2 = 0$ и $C_2 = 2C_{12} \neq 0$, получаем множество простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) - \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**II.B.1.4.** Дополнительно принимаем, что выполнены условия $C_3 = 0$, $C_{10} = 0$. Получаем множество простейших представителей:

$$-\frac{2}{3}(\varsigma_1 \cdot \partial) + 2(\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial) + (\varsigma_{12} \cdot \partial).$$

Заметим, что случаи типа **II.B.2**, когда выполняется равенство $C_1 = 0$, невозможны в рамках предположений **II.B**.

**III.** Этот этап характеризуется выполнением условий $C_2 + 2C_{12} = 0$ и $C_2 - 2C_{12} \neq 0$. Если $C_2$, $C_{12}$ выбираются так, что $C_2 + 2C_{12} = 0$, но $C_2 - 2C_{12} \neq 0$ (т.е. $C_2 = -2C_{12} \neq 0$), то коэффициент $C_{11}$ автоморфизмами (1)–(12) не удается привести к нулевому значению. Применяя автоморфизм (10) при $\tau$, равном $\dfrac{2C_{10}}{2C_{12} - C_2}$, можно привести к нулевому значению коэффициент $C_{10}$.

**III.A.** Считаем выполненным неравенство $3C_1 + C_2 \neq 0$.

**III.A.1.** Полагаем, кроме того, что удовлетворяется неравенство $C_1 \neq 0$. Если $C_1 \neq 0$ и $3C_1 + C_2 \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (4) и (3) при $\tau$, соответственно равном $\dfrac{B_1}{C_1}$ и $\dfrac{C_3}{3C_1 + C_2}$, можно привести к нулевому значению $B_1$ и $C_3$.

**III.A.1.1.** Дополнительно, полагаем, что $C_{11} \neq 0$. Так как $C_{11} \neq 0$, то, применяя автоморфизм (12) при $\tau$, равном $-\ln|C_1/C_{11}|$, убеждаемся, что $C_1$ и $C_{11}$ приводятся к равным по модулю значениям; применяя затем преобразование умножения, приводим $C_1$ к единице и таким образом получаем множество простейших представителей вида

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial) \quad (D_1 \neq 0). \tag{19}$$

**III.A.1.2.** Этот случай характеризуется выполнением дополнительного равенства $C_{11} = 0$. Находим двухпараметрическое семейство простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial) \quad (D_1 \neq 0).$$

Это семейство *дополняет* (8) при $D_3 = -\dfrac{1}{2}D_1$.

**III.A.2.** Полагаем, кроме того, что выполняется равенство $C_1 = 0$. Если $C_1 = 0$, то коэффициент $B_1$ привести к нулевому значению не удается.

**III.A.2.1.** Полагаем, что $C_{11} \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Применяя автоморфизм (12) при $\tau$, равном $-\ln|C_2/C_{11}|$, убеждаемся, что $C_2$ и $C_{11}$ приводятся к равным по модулю значениям. Если $B_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|C_2/B_1|$, добиваемся того, чтобы $C_2$ и $B_1$ стали равными по абсолютной величине. В результате получаем простейших представителей вида

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**III.A.2.2.** Полагаем, что $C_{11} \neq 0$, $B_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Получаем следующих простейших представителей:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**III.A.2.3.** Полагаем, что $C_{11} = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Применяя автоморфизм (1), убеждаемся, что $A_1$ и $B_1$ приводятся к равным по модулю значениям. Получаем следующих простейших представителей:

$$-2(\varsigma_2 \cdot \partial) + D((\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial)) + (\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0). \tag{20}$$

**III.A.2.4.** Полагаем, что $C_{11} = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Получаем следующих простейших представителей:

$$-2(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + (\varsigma_{12} \cdot \partial).$$

**III.A.2.5.** Полагаем, что $C_{11} = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Получаем следующих простейших представителей:

$$-2(\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial) + (\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0). \tag{21}$$

**III.A.2.6.** Полагаем, что $C_{11} = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Получаем следующих простейших представителей:

$$-2(\varsigma_2 \cdot \partial) + (\varsigma_{12} \cdot \partial),$$

которые дополняют (20), (21) при $D = 0$.

**III.B.** Считаем дополнительно выполненным равенство $3C_1 + C_2 = 0$. Если $3C_1 + C_2 = 0$, то коэффициент $C_3$ не удается привести к нулевому значению.

**III.B.1.** Полагаем, кроме того, что удовлетворяется неравенство $C_1 \neq 0$. Тогда можно привести к нулевому значению коэффициент $B_1$.

**III.B.1.1.** Дополнительно считаем, что $C_3 \neq 0$, $C_{11} \neq 0$. Если $C_3 \neq 0$, $C_{11} \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (2) и (12) при $\tau$, равном соответственно $\ln|C_1/C_3|$ и $-\ln|C_1/C_{11}|$, приводим коэффициенты $C_1$, $C_3$ и $C_{11}$ к значениям, равным по модулю, и, следовательно, получаем множество простейших представителей вида

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**III.B.1.2.** Дополнительно принимаем, что выполнены условия $C_3 \neq 0$, $C_{11} = 0$. Получаем множество простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) + \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**III.B.1.3.** Дополнительно принимаем, что выполнены условия $C_3 = 0$, $C_{11} \neq 0$. С помощью автоморфизма (12) коэффициенты $C_{11}$ и $C_1$ удается привести к значениям, одинаковым по абсолютной величине. Учитывая еще, что $3C_1 + C_2 = 0$ и $C_2 = -2C_{12} \neq 0$, получаем множество простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**III.B.1.4.** Дополнительно принимаем, что выполнены условия $C_3 = 0$, $C_{11} = 0$. Получаем множество простейших представителей:

$$\frac{2}{3}(\varsigma_1 \cdot \partial) - 2(\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial) + (\varsigma_{12} \cdot \partial).$$

Заметим, что случаи типа **III.B.2**, когда выполняется равенство $C_1 = 0$, невозможны в рамках предположений **III.B**.

**IV.** В пределах этого этапа рассуждений будем считать, что $C_2 = 0$ и $C_{12} = 0$. Коэффициенты $C_{10}$ и $C_{11}$ не приводятся к нулю, поэтому придется рассматривать случаи $C_{10} \neq 0$, $C_{11} \neq 0$; $C_{10} \neq 0$, $C_{11} = 0$; $C_{10} = 0$, $C_{11} \neq 0$; $C_{10} = 0$, $C_{11} = 0$. Заметим, что если один из коэффициентов $C_{10}$ или $C_{11}$ равен нулю, то оставшийся из них с помощью автоморфизма (12) приводится к значению $\pm 1$.

**IV.A.** Этот случай характеризуется условиями $C_{10} \neq 0$, $C_{11} \neq 0$. Если $C_{10} \neq 0$ и $C_{11} \neq 0$, то, применяя автоморфизм (12) при $\tau$, равном $\dfrac{1}{2}\ln|C_{11}/C_{10}|$, убеждаемся, что $C_{10}$ и $C_{11}$ приводятся к равным по модулю значениям. Рассматриваемый случай удобно разбить еще на два в зависимости от выполнения условий $C_1 \neq 0$ или $C_1 = 0$.

**IV.A.1.** Допустим сначала, что $C_1 \neq 0$. Если $C_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (4) и (3) при $\tau$, соответственно равном $\dfrac{B_1}{C_1}$ и $\dfrac{C_3}{3C_1}$, удается привести к нулевому значению $B_1$ и $C_3$. Действуя автоморфизмом (2) при $\tau$, равном $-2\ln|C_1/C_{10}|$, убеждаемся, что $C_1$ и $C_{10}$ приводятся к равным по модулю значениям; применяя затем преобразование умножения, приводим $C_1$ к единице и таким образом получаем множество простейших представителей вида

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial).$$

**IV.A.2.** Далее до конца **IV.A** будем считать, что $C_1 = 0$. Выделим еще восемь вариантов в зависимости от выполнения условий:

**IV.A.2.1.** $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$;
**IV.A.2.2.** $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$;
**IV.A.2.3.** $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$;
**IV.A.2.4.** $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$;
**IV.A.2.5.** $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$;
**IV.A.2.6.** $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$;
**IV.A.2.7.** $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$;
**IV.A.2.8.** $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$.

**IV.A.2.1.** Если $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|A_1/B_1|$, убеждаемся, что $A_1$ и $B_1$ приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (2) при $\tau$, равном $\ln|A_1/C_3|$, приводим к равным абсолютным значениям величины $A_1$ и $C_3$. В итоге получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)) \quad (D \neq 0). \tag{22}$$

**IV.A.2.2.** Считаем выполненными условия $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$. Применяя автоморфизм (2) при $\tau$, равном $-2\ln|A_1/C_{10}|$, убеждаемся, что $A_1$ и $C_{10}$ приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|A_1/C_3|/3$, приводим к равным абсолютным значениям величины $A_1$ и $C_3$. В итоге получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{23}$$

**IV.A.2.3.** Считаем выполненными условия $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$. Применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|A_1/B_1|$, убеждаемся, что $A_1$ и $B_1$ приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (2) при $\tau$, равном $-2\ln|A_1/C_{10}|$, приводим к равным абсолютным значениям величины $A_1$ и $C_{10}$. В итоге получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{24}$$

**IV.A.2.4.** Считаем выполненными условия $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$. Применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|1/B_1|$, приравниваем абсолютную величину $B_1$ к единице, и, применяя после этого автоморфизм (2) при $\tau$, равном $\ln|1/C_3|$, приравниваем $C_3 = 1$. (Применяя автоморфизмы (1) и (2) при $\tau$, связанных равенством $\tau_{(2)} = -2\tau_{(1)}$, получим преобразование, по своему действию совпадающее с преобразованием умножения, т.е. преобразования (1), (2) и преобразование умножения не являются независимыми.) В итоге получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)) \quad (D \neq 0). \tag{25}$$

**IV.A.2.5.** Считаем выполненными условия $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$. Применяя автоморфизм (1), находим, что модули коэффициентов $C_3$, $C_{10}$, $C_{11}$ приводятся к одной и той же величине. Поэтому получаем представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{26}$$

**IV.A.2.6.** Считаем выполненными условия $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$. Применяя автоморфизм (1), находим, что модули коэффициентов $B_1$, $C_{10}$, $C_{11}$ приводятся к одной и той же величине. Поэтому получаем представителей:

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{27}$$

**IV.A.2.7.** Считаем выполненными условия $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$. Тогда инфинитезимальный оператор группы симметрий будет иметь вид

$$(\varsigma \cdot \partial) = A_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + C((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)),$$

где $|C| = |C_{10}| = |C_{11}|$. Следовательно, получаем представителей:

$$(\varsigma_7 \cdot \partial) + D((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)) \quad (D \neq 0). \tag{28}$$

**IV.A.2.8.** Считаем выполненными условия $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$. Находим простейших представителей:

$$(\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{29}$$

**IV.B.** Этот случай характеризуется условиями $C_{10} \neq 0$, $C_{11} = 0$.

**IV.B.1.** Предположим, что $C_1 \neq 0$. Если $C_{11} = 0$, то при $C_1 \neq 0$ с помощью автоморфизма (12) можно привести к одинаковым абсолютным значениям коэффициенты $C_{10}$ и $C_1$; применяя автоморфизм (4), приведем $B_1$ к нулевому значению; с помощью автоморфизма (3) к нулю можно привести коэффициент $C_3$. Следовательно, получаем простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial),$$

совпадающих с (16) при $D_1 = 0$.

**IV.B.2.** В случае $C_1 = 0$, действуя далее так же, как и при получении простейших представителей (22)–(29) и учитывая, что $|C_{10}|$ приводится к единице, если $C_{11} = 0$, в каждом из восьми случаев

**IV.B.2.1.** $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.B.2.2.** $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.B.2.3.** $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.B.2.4.** $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$;

**IV.B.2.5.** $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$;

**IV.B.2.6.** $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$;

**IV.B.2.7.** $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.B.2.8.** $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$

получим соответственно простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \qquad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \qquad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial),$$
$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_{10} \cdot \partial).$$

**IV.C.** Этот случай характеризуется условиями $C_{10} = 0$, $C_{11} \neq 0$.

**IV.C.1.** Если $C_{10} = 0$, то при $C_1 \neq 0$ приходим к инфинитезимальному оператору:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial),$$

дополняющему (19) при $D_1 = 0$.

**IV.C.2.** В случае $C_1 = 0$, действуя далее так же, как и при получении простейших представителей (22)–(29), в каждом из восьми случаев

**IV.C.2.1.** $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.C.2.2.** $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.C.2.3.** $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.C.2.4.** $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$;

**IV.C.2.5.** $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$;

**IV.C.2.6.** $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$;

**IV.C.2.7.** $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.C.2.8.** $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$

получим соответственно простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \qquad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \qquad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial),$$
$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_{11} \cdot \partial).$$

**IV.D.** Этот случай характеризуется условиями $C_{10} = 0$, $C_{11} = 0$.

**IV.D.1.** При условии $C_1 \neq 0$ можно привести к нулю коэффициент $B_1$, а с помощью автоморфизма (3) удаеться привести к нулевому значению коэффициент $C_3$; в результате приходим к однопараметрическому семейству:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial).$$

**IV.D.2.** В случае $C_1 = 0$, считая выполненными условия

**IV.D.2.1.** $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.D.2.2.** $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.D.2.3.** $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$;

**IV.D.2.4.** $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$

имеем соответственно простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial), \qquad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial), \qquad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial), \qquad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial),$$

которые соответственно дополняют: (13), (22) при $D = 0$; (14) при $D = 0$; (15) при $D = 0$; (25) при $D = 0$.

В случае $C_1 = 0$, если выполнены условия

**IV.D.2.5.** $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$;

**IV.D.2.6.** $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$;

**IV.D.2.7.** $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$

имеем соответственно простейших представителей:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial), \qquad (\varsigma_4 \cdot \partial), \qquad (\varsigma_7 \cdot \partial),$$

последний из которых дополняет (), (28) при $D = 0$.

В случае $C_1 = 0$ при выполнении

**IV.C.2.8.** $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$

получается нулевой инфинитезимальный оператор.

Перечисленные выше инфинитезимальные операторы образуют оптимальную систему $\Theta_1$ одномерных подалгебр естественной конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (3).

Для удобства восприятия полный список элементов, составляющих оптимальную систему $\Theta_1$, приводится в конце статьи. Затем располагается схема поиска простейших представителей, обеспечивающая наглядное представление реализованного выше алгоритма построения оптимальной системы $\Theta_1$.

Построенная оптимальная система одномерных подалгебр естественной конечномерной (размерности 12) подалгебры алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений (3) насчитывает один трехпараметрический элемент, 12 двухпараметрических, 66 однопараметрических элементов и 108 индивидуальных элементов. В этом списке знаки не согласованы и могут быть выбраны независимо. В каждом элементе списка один из базисных операторов $(\varsigma_j \cdot \partial)$ может быть замещен своим коллинеарным аналогом. При построении списка не учтены дискретные симметрии системы дифференциальных уравнений (3).

Заметим, что алгебра симметрий уравнений плоской задачи имеет размерность 7. Оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного двухпараметрического элемента, одиннадцати однопараметрических и двадцати индивидуальных элементов.

Алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5. Оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного однопараметрического элемента и двадцати двух индивидуальных элементов.

Оптимальная система $\Theta_1$ используется для редукции системы дифференциальных уравнений в частных производных (3) к системам, содержащим лишь две независимых переменных, которые, в свою очередь, могут быть подвергнуты групповому анализу также с целью их дальнейшей редукции к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Ясно, что этот процесс является достаточно трудоемким, но, при очевидном отсутствии альтернативы, единственным имеющимся в распоряжении средством развития теории пространственной задачи теории пластичности.

Свойства симметрии чрезвычайно важны при анализе нелинейных математических моделей, и здесь теоретико-групповые методы (теория групп и алгебр Ли) играют главенствующую роль. В этом плане, несмотря на то, что теория симметрий систем дифференциальных уравнений в частных производных была создана более ста лет тому назад, в математической теории пластичности в настоящее время наблюдается заметный пробел, который должен быть восполнен. Следуя по этому пути, возможно, можно будет найти новые точные решения пространственных соотношений теории пластичности.

Заключая, заметим, что дифференциальные уравнения математической теории пластичности столь сложны и многообразны, что сейчас трудно рассчитывать на их всеобъемлющее исследование только лишь средствами группового анализа.

### Библиографический список

1. *Ивлев Д.Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях// Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, № 3. С. 546–549.

2. *Радаев Ю.Н.* О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 1. С. 86–94.

3. *Радаев Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп.). Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006. 340 с.

4. *Радаев Ю.Н., Гудков В.А.* Об одной естественной конечномерной подалгебре алгебры симметрий трехмерных уравнений математической теории пластичности // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучная сер. № 5(39). 2005. С. 52–70.

5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

6. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations. N.Y.: Springer, 1986. (В русском переводе см. [7].)

7. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М: Мир, 1989. 639 с.

8. *Olver P.J.* Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge, N.Y., Melbourne: Cambridge University Press, 1995. 526 p.

9. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.

10. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ВНУТРЕННИЕ АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЙ $L^{12}$

1) $C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3 e^{3\tau},$
$B_1' = B_1 e^{\tau},\ B_2' = B_2 e^{\tau},\ B_3' = B_3 e^{\tau},$
$A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,$
$C_{10}' = C_{10},\ C_{11}' = C_{11},\ C_{12}' = C_{12};$

2) $C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3 e^{\tau},$
$B_1' = B_1,\ B_2' = B_2,\ B_3' = B_3,$
$A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,$

$C'_{10} = C_{10}e^{-\tau/2}$, $C'_{11} = C_{11}e^{-\tau/2}$, $C'_{12} = C_{12}$;

3) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3 - 3\tau C_1 - \tau C_2$,
$B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2$, $B'_3 = B_3$,
$A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2$, $A'_3 = A_3$,
$C'_{10} = C_{10}$, $C'_{11} = C_{11}$, $C'_{12} = C_{12}$;

4) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3$,
$B'_1 = B_1 - \tau C_1$, $B'_2 = B_2 + \tau A_3$, $B'_3 = B_3 - \tau A_2$,
$A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2$, $A'_3 = A_3$,
$C'_{10} = C_{10}$, $C'_{11} = C_{11}$, $C'_{12} = C_{12}$;

5) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3$,
$B'_1 = B_1 - \tau A_3$, $B'_2 = B_2 - \tau C_1$, $B'_3 = B_3 + \tau A_1$,
$A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2$, $A'_3 = A_3$,
$C'_{10} = C_{10}$, $C'_{11} = C_{11}$, $C'_{12} = C_{12}$;

6) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3$,
$B'_1 = B_1 + \tau A_2$, $B'_2 = B_2 - \tau A_1$, $B'_3 = B_3 - \tau C_1$,
$A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2$, $A'_3 = A_3$,
$C'_{10} = C_{10}$, $C'_{11} = C_{11}$, $C'_{12} = C_{12}$;

7) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3$,
$B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2 \cos\tau + B_3 \sin\tau$, $B'_3 = B_3 \cos\tau - B_2 \sin\tau$,
$A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2 \cos\tau + A_3 \sin\tau$, $A'_3 = A_3 \cos\tau - A_2 \sin\tau$,
$C'_{10} = C_{10}$, $C'_{11} = C_{11}$, $C'_{12} = C_{12}$;

8) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3$,
$B'_1 = B_1 \cos\tau - B_3 \sin\tau$, $B'_2 = B_2$, $B'_3 = B_3 \cos\tau + B_1 \sin\tau$,
$A'_1 = A_1 \cos\tau - A_3 \sin\tau$, $A'_2 = A_2$, $A'_3 = A_3 \cos\tau + A_1 \sin\tau$,
$C'_{10} = C_{10}$, $C'_{11} = C_{11}$, $C'_{12} = C_{12}$;

9) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3$,
$B'_1 = B_1 \cos\tau + B_2 \sin\tau$, $B'_2 = B_2 \cos\tau - B_1 \sin\tau$, $B'_3 = B_3$,
$A'_1 = A_1 \cos\tau + A_2 \sin\tau$, $A'_2 = A_2 \cos\tau - A_1 \sin\tau$, $A'_3 = A_3$,
$C'_{10} = C_{10}$, $C'_{11} = C_{11}$, $C'_{12} = C_{12}$;

10) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3$,
$B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2$, $B'_3 = B_3$,
$A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2$, $A'_3 = A_3$,
$C'_{10} = C_{10} + \frac{1}{2}\tau C_2 - \tau C_{12}$, $C'_{11} = C_{11}$, $C'_{12} = C_{12}$;

11) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3$,
$B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2$, $B'_3 = B_3$,
$A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2$, $A'_3 = A_3$,
$C'_{10} = C_{10}$, $C'_{11} = C_{11} + \frac{1}{2}\tau C_2 + \tau C_{12}$, $C'_{12} = C_{12}$;

12) $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_2$, $C'_3 = C_3$,
$B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2$, $B'_3 = B_3$,
$A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2$, $A'_3 = A_3$,
$C'_{10} = C_{10}e^{\tau}$, $C'_{11} = C_{11}e^{-\tau}$, $C'_{12} = C_{12}$.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА $\Theta_1$ АЛГЕБРЫ ЛИ $L^{12}$

1) $(\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_3(\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (|D_1| \neq 2|D_3|)$;
2) $(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial)$;
3) $(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial)$;
4) $(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial)$;
5) $(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial)$;
6) $(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0)$;
7) $(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0)$;
8) $(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0)$;
9) $(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial)$;
10) $(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial)$;
11) $(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial)$;
12) $(\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial) \quad (D \neq 0)$;
13) $(\varsigma_{12} \cdot \partial)$;

14) $(\varsigma_1\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)+D_1((\varsigma_2\cdot\partial)+\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial))+D_2(\varsigma_7\cdot\partial)\quad(D_1\neq 0)$;
15) $(\varsigma_1\cdot\partial)+D_1((\varsigma_2\cdot\partial)+\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial))+D_2(\varsigma_7\cdot\partial)\quad(D_1\neq 0)$
(дополняет (1) при $D_3=\frac{1}{2}D_1$);
16) $(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)+\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
17) $(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)+\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
18) $2(\varsigma_2\cdot\partial)+D((\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial))+(\varsigma_{12}\cdot\partial)\quad(D\neq 0)$;
19) $2(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)+(\varsigma_{12}\cdot\partial)$;
20) $2(\varsigma_2\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)+(\varsigma_{12}\cdot\partial)\quad(D\neq 0)$;
21) $2(\varsigma_2\cdot\partial)+(\varsigma_{12}\cdot\partial)$
(дополняет (18), (20) при $D=0$);
22) $(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)-\frac{3}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
23) $(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_3\cdot\partial)-\frac{3}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
24) $(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)-\frac{3}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
25) $-\frac{2}{3}(\varsigma_1\cdot\partial)+2(\varsigma_2\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)+(\varsigma_{12}\cdot\partial)$;
26) $(\varsigma_1\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)+D_1((\varsigma_2\cdot\partial)-\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial))+D_2(\varsigma_7\cdot\partial)\quad(D_1\neq 0)$;
27) $(\varsigma_1\cdot\partial)+D_1((\varsigma_2\cdot\partial)-\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial))+D_2(\varsigma_7\cdot\partial)\quad(D_1\neq 0)$
(дополняет (1) при $D_3=-\frac{1}{2}D_1$);
28) $(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)-\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
29) $(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)-\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
30) $-2(\varsigma_2\cdot\partial)+D((\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial))+(\varsigma_{12}\cdot\partial)\quad(D\neq 0)$;
31) $-2(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)+(\varsigma_{12}\cdot\partial)$;
32) $-2(\varsigma_2\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)+(\varsigma_{12}\cdot\partial)\quad(D\neq 0)$;
33) $-2(\varsigma_2\cdot\partial)+(\varsigma_{12}\cdot\partial)$
(дополняет (30), (32) при $D=0$);
34) $(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)+\frac{3}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
35) $(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_3\cdot\partial)+\frac{3}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
36) $(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)+\frac{3}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$;
37) $\frac{2}{3}(\varsigma_1\cdot\partial)-2(\varsigma_2\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)+(\varsigma_{12}\cdot\partial)$;
38) $(\varsigma_1\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
39) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)+D((\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial))\quad(D\neq 0)$;
40) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
41) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
42) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)+D((\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial))\quad(D\neq 0)$;
43) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
44) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
45) $(\varsigma_7\cdot\partial)+D((\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial))\quad(D\neq 0)$;
46) $(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
47) $(\varsigma_1\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$
(дополняет (14) при $D_1=0$);
48) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$;
49) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$;
50) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$;
51) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$;
52) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$;
53) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$;
54) $(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$;
55) $(\varsigma_{10}\cdot\partial)$;
56) $(\varsigma_1\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$
(дополняет (26) при $D_1=0$);
57) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
58) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
59) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
60) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
61) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
62) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
63) $(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;
64) $(\varsigma_{11}\cdot\partial)$;

65) $(\varsigma_1 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial)$;
66) $(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial)$
(дополняет (6), (39) при $D = 0$);
67) $(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial)$
(дополняет (7) при $D = 0$);
68) $(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial)$
(дополняет (8) при $D = 0$);
69) $(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial)$
(дополняет (42) при $D = 0$);
70) $(\varsigma_3 \cdot \partial)$;
71) $(\varsigma_4 \cdot \partial)$;
72) $(\varsigma_7 \cdot \partial)$
(дополняет (12), (45) при $D = 0$);

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ $\Theta_1$ АЛГЕБРЫ ЛИ $L^{12}$

1–13: $C_2 \pm 2C_{12} \neq 0$,
1–3: $3C_1 + C_2 \neq 0$,
1: $C_1 \neq 0$,
2: $C_1 = 0,\ C_2 \neq 0,\ B_1 \neq 0$,
3: $C_1 = 0,\ C_2 \neq 0,\ B_1 = 0$;
4–13: $3C_1 + C_2 = 0$,
4: $C_1 \neq 0,\ C_3 \neq 0$,
5: $C_1 \neq 0,\ C_3 = 0$,
6: $C_1 = 0,\ C_3 \neq 0,\ B_1 \neq 0,\ A_1 \neq 0$,
7: $C_1 = 0,\ C_3 \neq 0,\ B_1 = 0,\ A_1 \neq 0$,
8: $C_1 = 0,\ C_3 = 0,\ B_1 \neq 0,\ A_1 \neq 0$,
9: $C_1 = 0,\ C_3 \neq 0,\ B_1 \neq 0,\ A_1 = 0$,
10: $C_1 = 0,\ C_3 \neq 0,\ B_1 = 0,\ A_1 = 0$,
11: $C_1 = 0,\ C_3 = 0,\ B_1 \neq 0,\ A_1 = 0$,
12: $C_1 = 0,\ C_3 = 0,\ B_1 = 0,\ A_1 \neq 0$,
13: $C_1 = 0,\ C_3 = 0,\ B_1 = 0,\ A_1 = 0$;
14–25: $C_2 - 2C_{12} = 0,\ C_2 + 2C_{12} \neq 0$,
14–21: $3C_1 + C_2 \neq 0$,
14: $C_1 \neq 0,\ C_{10} \neq 0$,
15: $C_1 \neq 0,\ C_{10} = 0$,
16: $C_1 = 0,\ C_{10} \neq 0,\ B_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0$,
17: $C_1 = 0,\ C_{10} \neq 0,\ B_1 = 0,\ C_2 \neq 0$
18: $C_1 = 0,\ C_{10} = 0,\ B_1 \neq 0,\ A_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0$,
19: $C_1 = 0,\ C_{10} = 0,\ B_1 \neq 0,\ A_1 = 0,\ C_2 \neq 0$,
20: $C_1 = 0,\ C_{10} = 0,\ B_1 = 0,\ A_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0$,
21: $C_1 = 0,\ C_{10} = 0,\ B_1 = 0,\ A_1 = 0,\ C_2 \neq 0$;
22–25: $3C_1 + C_2 = 0$,
22: $C_1 \neq 0,\ C_3 \neq 0,\ C_{10} \neq 0$,
23: $C_1 \neq 0,\ C_3 \neq 0,\ C_{10} = 0$,
24: $C_1 \neq 0,\ C_3 = 0,\ C_{10} \neq 0$,
25: $C_1 \neq 0,\ C_3 = 0,\ C_{10} = 0$;
26–37: $C_2 + 2C_{12} = 0,\ C_2 - 2C_{12} \neq 0$,
26–33: $3C_1 + C_2 \neq 0$,
26: $C_1 \neq 0,\ C_{11} \neq 0$,
27: $C_1 \neq 0,\ C_{11} = 0$,
28: $C_1 = 0,\ C_{11} \neq 0,\ B_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0$,
29: $C_1 = 0,\ C_{11} \neq 0,\ B_1 = 0,\ C_2 \neq 0$,
30: $C_1 = 0,\ C_{11} = 0,\ B_1 \neq 0,\ A_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0$,
31: $C_1 = 0,\ C_{11} = 0,\ B_1 \neq 0,\ A_1 = 0,\ C_2 \neq 0$,
32: $C_1 = 0,\ C_{11} = 0,\ B_1 = 0,\ A_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0$,
33: $C_1 = 0,\ C_{11} = 0,\ B_1 = 0,\ A_1 = 0,\ C_2 \neq 0$;

34–37: $3C_1 + C_2 = 0$,

34: $C_1 \neq 0$, $C_3 \neq 0$, $C_{11} \neq 0$,

35: $C_1 \neq 0$, $C_3 \neq 0$, $C_{11} = 0$,

36: $C_1 \neq 0$, $C_3 = 0$, $C_{11} \neq 0$,

37: $C_1 \neq 0$, $C_3 = 0$, $C_{11} = 0$;

38–72: $C_2 = 0$, $C_{12} = 0$,

38–46: $C_{10} \neq 0$, $C_{11} \neq 0$,

38: $C_1 \neq 0$,

39: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$,

40: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$,

41: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$,

42: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$,

43: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$,

44: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$,

45: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$,

45: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$,

47–55: $C_{10} \neq 0$, $C_{11} = 0$,

47: $C_1 \neq 0$,

48: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$,

49: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$,

50: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$,

51: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$,

52: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$,

53: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$,

54: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$,

55: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$,

56–64: $C_{10} = 0$, $C_{11} \neq 0$,

56: $C_1 \neq 0$,

57: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$,

58: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$,

59: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$,

60: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$,

61: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$,

62: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$,

63: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$,

64: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$,

65–72: $C_{10} = 0$, $C_{11} = 0$,

65: $C_1 \neq 0$,

66: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$,

67: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$,

68: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$,

69: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$,

70: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$, $B_1 = 0$, $A_1 = 0$,

71: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 = 0$,

72: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$.

Номера соответствуют строкам в списке элементов оптимальной системы $\Theta_1$.