

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ДИНАМИКА МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН

В.А. Ковалев

Московский городской университет управления правительства Москвы,
кафедра прикладной математики
E-mail: vlad_koval@mail.ru

В работе рассматриваются трехслойные тонкостенные конструкции. Полагается, что толщина среднего слоя значительно больше толщин внешних слоев. Средний слой рассматривается в постановке теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью (теория Миндлина – Рейсснера), внешние слои — в постановке мембранной теории. Деформирование пакета слоев определяется гипотезой ломаной нормали. Материал внешних слоев полагается изотропным термоупругим, а внутреннего слоя — изотропным термовязкоупругим. Для указанных трехслойных конструкций предлагается вариационный принцип конволютивного типа. Из вариационного принципа выводятся связанные уравнения движения и теплопроводности, а также краевые и начальные условия. Показано, что если кривизна поверхности осреднения равна нулю, то есть тонкостенная конструкция представляет собой трехслойную пластину, то уравнения движения и теплопроводности допускают решения, представленные посредством скалярных потенциалов. Рассмотрен численный пример для шарнирно закрепленной эллиптической пластины.

Ключевые слова: тонкостенные конструкции, пластины, многослойность, термовязкоупругость, вариационный принцип, конволюция, собственные колебания

Dynamics of Multilayered Thermoviscoelastic Plates

V.A. Kovalev

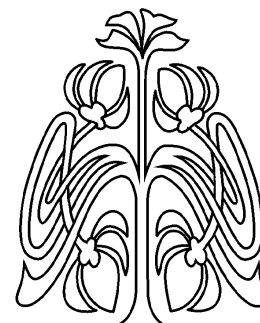
Moscow City Government University of Management Moscow,
Chair of Applied Mathematics
E-mail: vlad_koval@mail.ru

This paper deal with laminated thin-walled structures. The laminated structures considered herein consist of three layers. The following assumptions are assumed. The thickness of inner layer is considerably greater the others. The kinematic relations for the inner layer are examined in the form of Mindlin – Reissner shell theory, for the outer layers are in the form of membrane theory. The deformations of the whole layered structure are defined by the polyline hypothesis. The material of outer layers is supposed to be thermoelastic isotropic, whereas inner one is isotropic thermoviscoelastic. A variational principle for 3-layered thermoviscoelastic thin-walled structures is obtained. The variational technique is utilized to derive the equations of motion and heat conduction as well as appropriate boundary and initial conditions. In the case of plane mean surface the solutions of this equations are obtained in the terms of scalar potentials. The numerical example for the simply supported elliptic plate is shown.

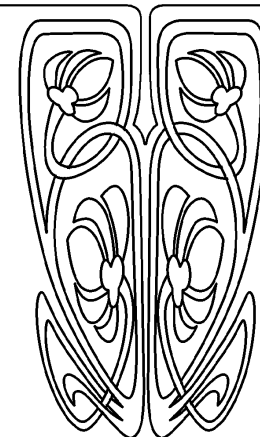
Key words: thin-walled structures, plates, laminated structures, thermoviscoelasticity, variational principle, convolution, eigenfunctions

ВВЕДЕНИЕ

Исследования собственных и вынужденных колебаний трехслойных тонкостенных конструкций имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Это связано, в частности, с тем, что тонкостенные конструкции, образуемые тонкими несущими внешними слоями и средним слоем (заполнителем) значительно большей толщины, имеют меньший вес при заданной жесткости в сравнении с однородными конструкциями. Кроме того, средний слой может выполнять дополнительные конструктивные функции, не связанные с обеспечением



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





жесткости, например теплоизоляционные. Следует также отметить, что наиболее жесткими трехслойными непологими оболочками (т.е. обладающими наибольшей жесткостью при фиксированной массе) являются оболочки с несимметричной структурой слоев.

В работе рассматриваются трехслойные тонкостенные конструкции, образованные двумя тонкими наружными слоями с различными толщинами h_2, h_3 и внутренним слоем толщиной $h_1 \gg h_2, h_3$. Предполагается, что способы соединения слоев в единый пакет гарантируют отсутствие их смещения относительно друг друга (проскальзывания). Кроме того, будем полагать, что:

- 1) перемещения оболочки малы по сравнению с толщиной конструкции;
- 2) нормальными напряжениями на площадках, касательных к поверхности осреднения, можно пренебречь;
- 3) слои тонкостенной конструкции изотропные. Внешние слои испытывают мембранное напряженно-деформированное состояние;
- 4) нормальный элемент среднего слоя после деформирования не остается перпендикулярным к поверхности осреднения, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины (кинематические гипотезы Миндлина – Рейсснера [1]).

Заметим, что в работе рассматривается общий случай несимметричной структуры пакета слоев, т.е. не предполагается, что толщины и физико-механические свойства внешних слоев одинаковы. Если же такое ограничение вводится, то будем говорить, что рассматриваются трехслойные тонкостенные конструкции с симметричной структурой пакета.

Известно, что вариационные принципы дают наиболее простой и строгий способ вывода уравнений движения и краевых условий, которые в теории пластин и оболочек могут принимать громоздкий и нетривиальный вид. В частности, первая корректная формулировка краевой задачи для однородной пластины была получена Кирхгофом с помощью вариационного принципа Лагранжа. Для формулировки начально-краевых задач динамической теории пластин и оболочек, как правило, используется принцип Остроградского – Гамильтона. Так, уравнения осесимметричного движения в перемещениях для непологой трехслойной сферической оболочки симметричной структуры были получены П. Цулковским и Х. Райzmanом на основе принципа Гамильтона. Ими же было построено точное решение задачи о вынужденных колебаниях оболочки под действием внешнего давления, внезапно приложенного на малой площадке в полюсе оболочки в форме разложения по собственным формам колебаний [2]. Уравнения движения непологой трехслойной сферической оболочки с ортотропными несущими слоями и жестким наполнителем были сформулированы в работе [3]. Для изотропных несущих слоев эти уравнения интегрировались в присоединенных функциях Лежандра. Вынужденные колебания непологой трехслойной сферической оболочки при нестационарных динамических воздействиях изучались в работе [4]. Точное решение задачи было построено методом конечных интегральных преобразований в форме спектрального разложения по функциям Лежандра. Уравнения движения трехслойных сферических оболочек с несимметричной структурой пакета слоев и краевые условия, соответствующие наиболее общему (упругому) закреплению конструкции на опорном контуре, получены из принципа Остроградского – Гамильтона в работе [5]. Однако эта методология позволяет рассматривать только консервативные задачи. Задачи термоупругости и вязкоупругости не являются таковыми. Известны многочисленные работы, основанные на пионерных исследованиях М. Био [6], И. Дьярмати [7], Г. Циглера [8], в которых вводятся вариационные уравнения взамен вариационному принципу. Но при этом теряется изящество вариационного формализма, так как уже нельзя построить функционал, который достигает стационарного значения на решениях соответствующей краевой задачи. Вместе с тем вариационные уравнения, которые часто называют несколько некорректно «принципами», позволяют сформулировать начально-краевые задачи для диссипативных тоkostenных систем. В частности, в работе [9] из вариационного уравнения Онзагера и теории скрытых переменных состояния получены уравнения движения для трехслойных вязкоупругих сферических оболочек с несимметричной структурой пакета слоев¹.

¹Следует также отметить, что вариационный принцип Остроградского – Гамильтона даже в консервативных задачах обладает существенным недостатком: при его формулировке требуется указывать начальные значения полей и их значения в некоторый фиксированный конечный момент времени, хотя начально-краевая задача предполагает, что указаны начальные значения и начальные скорости.



Возможности вариационного формализма существенно расширяются, если вместо принципа Остроградского – Гамильтона воспользоваться конволютивным вариационным принципом. Напомним, что математическая структура функционала в принципе Гамильтона порождается скалярным произведением в псевдоевклидовом пространстве – времени Минковского. Структура же конволютивного вариационного принципа задается функционалом свертки (конволюции) и потому качественно отличается от первого. Особым свойством функционала свертки является то, что соответствующие уравнения Эйлера – Лагранжа и естественные краевые условия определяют начальную или начально-краевую задачу. На этот факт впервые обратил внимание М. Гертин [10] и ввел конволютивный вариационный принцип в динамической теории упругости [11]. Позже методология построения вариационных принципов на основе абстрактных билинейных форм, обобщающая теорию Гертина, была развита Э. Тонти [12]. Оказалось, что вариационный принцип Гертина справедлив для значительно большего класса задач, чем задачи, возникающие в линейной теории упругости. Это привело к построению новых вариационных принципов уже для диссипативных задач, в частности, вариационный принцип в термоупругости был введен Г. Белли и К. Морози [13].

В настоящей работе предлагается обобщение вариационного принципа Белли на изотропные вязкоупругие среды, из которого в результате варьирования выводятся уравнения движения, естественные краевые и начальные условия для пространственного ограниченного тела [14]. Тем самым обосновывается корректность вариационной формулировки. Затем функционал преобразуется с учетом кинематических гипотез, соответствующих трехслойным вязкоупругим тонкостенным конструкциям, из которого вновь путем варьирования получаем уравнения движения, теплопроводности, краевые и начальные условия, но уже специализированные для тонкостенных конструкций.

1. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Перед формулировкой вариационного принципа введем ряд вспомогательных определений. Введем пространство вектор-функций \mathbf{L}_μ^2 , определенных в ограниченной области $V \in \mathbb{E}^3$ и интегрируемых с квадратом в этой области. Пусть скалярное произведение в \mathbf{L}_μ^2 задается следующим билинейным функционалом:

$$\mathbf{L}_\mu^2 : (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_V \mathbf{v}^T \mu \mathbf{w} dV. \quad (1)$$

Вариационные принципы механики могут быть построены на основе следующего хорошо известного утверждения [15]: если линейный оператор A с областью определения D является самосопряженным, т.е. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D$ $(A[\mathbf{u}], \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A[\mathbf{v}])$, то стационарные значения квадратичного функционала $I[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} (\mathbf{u}, A[\mathbf{u}])$, определенного в той же области D , являются решениями краевой задачи

$$\mathbf{u} \in D, \quad A[\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad (2)$$

и наоборот. В случае несамосопряженного оператора все становится значительно сложнее.

Заметим, что свойство самосопряженности зависит не только от структуры оператора, но и от структуры скалярного произведения (1). Можно попытаться изменить билинейный функционал, определяющий скалярное произведение (1) и ввести так называемое произведение с весом. Это в ряде случаев позволяет добиться самосопряженности заданного оператора A . Однако выбор функционала для скалярного произведения ограничен известными аксиомами, в частности аксиомой дефинитности, что существенно ограничивает выбор. Вместе с тем, как показал Э. Тонти, вариационный принцип для своей формулировки требует определения лишь некоторой билинейной формы, которая может и не удовлетворять *всем* аксиомам скалярного произведения, в частности, не быть *дефинитной*. Это существенно расширяет возможности выбора и позволяет построить новые вариационные формулировки даже в тех случаях, когда классический подход позволял сформулировать лишь вариационные уравнения.

Итак, пусть в \mathbf{L}_μ^2 определена симметричная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ и эта билинейная форма отделима, т.е. удовлетворяет соотношению

$$(\forall \mathbf{u} \in D \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3)$$



Если линейный оператор A с областью определения D является самосопряженным относительно симметричной билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D \quad \langle A[\mathbf{u}], \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A[\mathbf{v}] \rangle$, то стационарные значения квадратичного функционала $I[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}, A[\mathbf{u}] \rangle$, определенного в той же области D , являются решениями краевой задачи (2). Таким образом, возможность построения новых вариационных принципов зависит от выбора билинейной формы.

К нетривиальным результатам приводит выбор в качестве такой билинейной формы функционала свертки (конволюции). Напомним, что свертка функций $u(t), v(t)$ определяется как интеграл² [16]:

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_0^T u(T-t)v(t) dt. \quad (4)$$

Известно, что свертка обладает свойствами коммутативности

$$\langle \vartheta, \omega \rangle = \langle \omega, \vartheta \rangle, \quad (5)$$

ассоциативности

$$\langle \vartheta, \langle \omega, \varphi \rangle \rangle = \langle \langle \vartheta, \omega \rangle, \varphi \rangle, \quad (6)$$

и дистрибутивности

$$\langle \vartheta, (\omega + \varphi) \rangle = \langle \vartheta, \omega \rangle + \langle \vartheta, \varphi \rangle. \quad (7)$$

Соотношения (5)–(7) проверяются непосредственным вычислением соответствующих интегралов. В силу теоремы Титчмарша [16] имеет место импликация

$$\vartheta \neq 0 \wedge \omega \neq 0 \Rightarrow \langle \vartheta, \omega \rangle \neq 0,$$

а так называемое свойство отделимости

$$\forall \vartheta \quad \langle \vartheta, \omega \rangle = 0 \Rightarrow \omega \equiv 0 \quad (8)$$

представляет собой аналог основной леммы классического операционного исчисления. Отметим, что из определения функционала свертки (4) и правила интегрирования по частям вытекает следующее соотношение:

$$\langle \dot{u}, v \rangle = \langle u, \dot{v} \rangle + u(T)v(0) - u(0)v(T). \quad (9)$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по времени. Это соотношение принципиально отличается от аналогичного соотношения для евклидова скалярного произведения, которое имеет вид

$$\langle \dot{u}, v \rangle = - \langle u, \dot{v} \rangle + u(T)v(T) - u(0)v(0),$$

а именно билинейные формы в левой и правой частях равенства (9) имеют один и тот же знак. Можно сказать, что этот факт определяет особые свойства конволютивных функционалов, поскольку при однородных начальных данных оператор дифференцирования любого (в том числе первого) порядка оказывается самосопряженным относительно конволюции (напомним, что, например, уравнение теплопроводности содержит первую производную температуры по времени, а уравнение движения вязкоупругой среды дифференциального типа содержит производные по времени произвольных порядков).

В целях упрощения записи мы используем следующие обозначения для свертки векторнозначных и тензорнозначных функций: $\langle \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \rangle = \int_0^T \mathbf{u}(T-t) \cdot \mathbf{v}(t) dt$, $\langle \mathbf{A}(t) : \mathbf{B}(t) \rangle = \int_0^T \mathbf{A}(T-t) : \mathbf{B}(t) dt$ и т.д. Символ \mathbf{E} во всем тексте работы обозначает единичный тензор.

При использовании конволюции для построения функционала целесообразно в качестве базовых переменных³ использовать скорость \mathbf{v} и приращение температуры θ . При этом тензор деформаций ϵ

²Отметим, что в настоящей работе переменные T, t, τ определяют моменты времени, причем переменной T обозначается текущее время, а переменными t и τ обозначаются прошедшие моменты.

³Под базовыми переменными мы понимаем независимые функции, по которым производится варьирование (аналог обобщенных координат в аналитической динамике).



может быть представлен выражением

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_0^t (\nabla \otimes \mathbf{v}(\tau) + (\nabla \otimes \mathbf{v}(\tau))^*) d\tau. \quad (10)$$

Приращение температуры θ определяется относительно отсчетной температуры ϑ , т.е. текущая абсолютная температура определяется суммой $\vartheta + \theta$.

Можно доказать, что интегродифференциальные операторы, порождаемые уравнениями движения и теплопроводности термовязкоупругой среды, оказываются самосопряженными по отношению к конволютивной билинейной форме. Этот факт позволяет сразу сформулировать вариационный принцип для термовязкоупругого пространственного тела [14]. Мы, однако, выберем несколько иной ход рассуждений и *a priori* сформулируем функционал, обобщающий известный функционал Белли для термоупругой среды, а затем покажем непосредственным вычислением, что уравнения Эйлера – Лагранжа, естественные краевые и начальные условия определяют начально-краевую задачу для термовязкоупругого ограниченного тела.

Итак, формулируем вариационный принцип (для термоупругой среды дифференциального типа порядка N) следующим образом:

$$\delta \mathcal{F} = 0,$$

где варьируемый функционал имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{v}, \theta] = \int_V \left(\mathcal{L}_{\text{mech}} + \mathcal{L}_{\text{therm}} + \mathcal{L}_{\text{inter}} - \frac{\rho}{2} \mathbf{v}(T) \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{c}{2\vartheta} \theta(T) \theta_0 - \right. \\ \left. - \sum_{k=2}^N \sum_{n=1}^{k-1} \left[\mu_k D^{k-n} \boldsymbol{\varepsilon}(T) : \boldsymbol{\varepsilon}_0^n + \frac{\lambda_k}{2} D^{k-n} \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(T) \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^n \right] \right) dV. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь \mathbf{v}_0 , θ_0 определяют начальные значения скорости и температуры, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^1 = \mathbf{def}[\mathbf{v}_0]$, а $\boldsymbol{\varepsilon}_0^2, \boldsymbol{\varepsilon}_0^3, \dots$ — деформации начальных полей ускорений и деформации начальных значений старших производных по времени полей скоростей. Разумеется, последнее слагаемое в выражении (11) отлично от нуля только при $N \geq 2$.

Разберем структуру и физический смысл остальных компонентов выражения для плотности функционала (11). В выражении (11) плотность $\mathcal{L}_{\text{mech}}$ соответствует чисто механическому деформированию и может быть представлена посредством следующего соотношения:

$$\mathcal{L}_{\text{mech}} = \frac{1}{2} (\rho \langle \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \rangle - 2\rho \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \rangle + 2 \langle \mathcal{M}[\boldsymbol{\varepsilon}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \langle \mathcal{L}[\mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}], \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle), \quad (12)$$

где ρ — плотность, \mathbf{K} — массовые силы, \mathcal{M} , \mathcal{L} — интегродифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \sum_{k=-N}^N \mu_k D^k \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathcal{L}[e] = \sum_{k=-N}^N \lambda_k D^k e, \quad e = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \\ D^0 z(t) = z(t), \quad D^k z(t) = \begin{cases} \frac{1}{(-k-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{-k-1} z(\tau) d\tau, & k < 0, \\ \frac{d^k}{dt^k} z(t), & k > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что из соотношений (13) в частных случаях вытекают известные законы состояния для линейной вязкой среды типа Фойгта, а именно

$$N = 1, \quad \mu_{-1} = \lambda_{-1} = 0, \quad \mathcal{M}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon} + \mu_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathcal{L}[e] = \lambda_0 e + \lambda_1 \dot{e},$$

для среды типа Максвелла:

$$N = 1, \quad \mu_1 = \lambda_1 = 0, \quad \mathcal{M}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mu_{-1} \int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\tau + \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathcal{L}[e] = \lambda_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau + \lambda_0 e,$$

для трехмодульной среды типа Кельвина:

$$N = 1, \quad \mathcal{M}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mu_{-1} \int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\tau + \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon} + \mu_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathcal{L}[e] = \lambda_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau + \lambda_0 e + \lambda_1 \dot{e}.$$

Здесь λ_0, μ_0 — упругие модули Ламе, а λ_k, μ_k (для индексов k , отличных от нуля) — модули, определяющие вязкие свойства среды. Если положить $N = 0$, то выражение (12) преобразуется к соответствующему выражению, введенному Г. Белли и К. Морози для термоупругой среды [13].

Плотность $\mathcal{L}_{\text{therm}}$ соответствует процессу теплопроводности и определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{therm}} = \frac{1}{2\vartheta} \left(2 \langle \varpi, \theta \rangle - c \langle \theta, \dot{\theta} \rangle - k \langle \nabla \theta \cdot \nabla \theta \rangle \right), \quad (14)$$

где k — теплопроводность, c — удельная теплоемкость среды.

Наконец, плотность $\mathcal{L}_{\text{inter}}$ характеризует эффект связанности тепловых и механических полей:

$$\mathcal{L}_{\text{inter}} = -\beta \langle \theta, \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle. \quad (15)$$

Здесь β — термомеханический модуль, который для изотропной среды может быть вычислен из соотношения $\beta = \alpha(3\lambda_0 + 2\mu_0)$, где α — коэффициент теплового расширения.

Для вывода уравнений движения и теплопроводности осуществим варьирование функционала \mathcal{F} . Формальное вычисление вариации дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} = & \int_V \frac{1}{2} \rho \langle \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \rangle + \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{v} \cdot \delta \dot{\mathbf{v}} \rangle - \rho \langle \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{v} \rangle + \\ & + \sum_{k=-N}^N \left(\mu_k \langle D^k \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \mu_k \langle D^k \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \frac{\lambda_k}{2} \langle D^k \mathbf{E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \frac{\lambda_k}{2} \langle D^k \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \right) + \\ & + \frac{1}{\vartheta} \langle \varpi, \delta \theta \rangle - \frac{c}{2\vartheta} \langle \delta \theta, \dot{\theta} \rangle - \frac{c}{2\vartheta} \langle \theta, \delta \dot{\theta} \rangle - \frac{k}{\vartheta} \langle \delta \nabla \theta \cdot \nabla \theta \rangle - \beta \langle \delta \theta, \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \beta \langle \theta, \mathbf{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \\ & - \frac{\rho}{2} \delta \mathbf{v}(T) \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{c}{2\vartheta} \delta \theta(T) \theta_0 - \sum_{k=2}^N \sum_{n=1}^{k-1} \left[\mu_k D^{k-n} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) : \boldsymbol{\varepsilon}_0^n + \frac{\lambda_k}{2} D^{k-n} \mathbf{E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^n \right] dV. \end{aligned}$$

Будем полагать, что варьирование осуществляется на классе функций, значения которых в момент времени $t = 0$ фиксированы. Тогда $\delta \mathbf{v}(0) = 0$, и поскольку и функционал свертки симметричен, то посредством интегрирования по частям $\langle \mathbf{v} \cdot \delta \dot{\mathbf{v}} \rangle = \langle \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}(0) \cdot \delta \mathbf{v}(T) - \mathbf{v}(T) \cdot \delta \mathbf{v}(0)$ слагаемое, содержащее вариацию производной по времени от скорости, может быть преобразовано к выражению, в которое входит только вариация базовой переменной: $\langle \mathbf{v} \cdot \delta \dot{\mathbf{v}} \rangle = \langle \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \rangle + \mathbf{v}(0) \cdot \delta \mathbf{v}(T)$. Аналогичные преобразования позволяют исключить вариацию скорости изменения приращения температуры: $\langle \theta, \delta \dot{\theta} \rangle = \langle \dot{\theta}, \delta \theta \rangle + \theta(0) \cdot \delta \theta(T)$. Члены, содержащие вариации деформаций (напомним, что базовыми переменными являются скорости, следовательно, в окончательном виде функционала следует оставить только вариации скоростей деформаций), также преобразуются путем интегрирования по частям: $\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \langle \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \delta \boldsymbol{\varepsilon}(0) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(T) - \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(0)$, однако в силу определения (10) деформации в начальный момент времени равны нулю, т.е. $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \delta \boldsymbol{\varepsilon}(0) = 0$ и, следовательно, $\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \langle \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$.

Точно такие же рассуждения могут быть проведены для слагаемых, содержащих вариации интегралов деформации по времени $\langle \delta D^k \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \langle \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : D^k \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$, $k < 0$, а для слагаемых, содержащих производные деформации по времени порядка выше первого, справедливы соотношения:

$$\langle \delta D^k \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \langle \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : D^k \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \sum_{n=1}^{k-1} D^{k-n} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) : D^n \boldsymbol{\varepsilon}(0), \quad k > 1.$$

Таким образом, вариация функционала принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} = & \int_V \left\{ \rho \langle \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \rangle + \rho \langle \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{v} \rangle + \sum_{k=-N}^N \left(\mu_k \langle D^k \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \frac{\lambda_k}{2} \langle D^k \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \right) \right\} + \\ & + \langle \varpi, \delta \theta \rangle - \frac{c}{2} \langle \delta \theta, \dot{\theta} \rangle - k \langle \delta \nabla \theta \cdot \nabla \theta \rangle - \beta \langle \delta \theta, \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \beta \langle \theta, \mathbf{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \frac{\rho}{2} \delta \mathbf{v}(T) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) - \end{aligned}$$



$$-\frac{c}{2\vartheta}\delta\theta(T)(\theta - \theta_0) + \sum_{k=2}^N \sum_{n=1}^{k-1} \left(\mu_k D^{k-n} \delta\boldsymbol{\varepsilon}(T) + \frac{\lambda_k}{2} D^{k-n} \mathbf{E} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}(T) \mathbf{E} \right) : (D^n \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^n) \Big\} dV. \quad (16)$$

Последующие преобразования выражения (16) позволяют исключить вариации производных скорости перемещений по пространственным переменным и вытекают из дивергентной теоремы Остроградского – Гаусса. Приведем преобразования некоторых слагаемых (16):

$$\begin{aligned} \int_V \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle dV &= \int_V \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \nabla \otimes \mathbf{v} \rangle dV = \oint_A \langle (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta \mathbf{v} \rangle dA - \int_V \langle (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta \mathbf{v} \rangle dV, \\ \int_V \langle \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle dV &= \int_V \langle \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle dV = \oint_A \langle \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} \rangle dA - \int_V \langle (\nabla \otimes \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta \mathbf{v} \rangle dV. \end{aligned}$$

Аналогичные преобразования для пространственных производных температуры приводят к выражениям:

$$\int_V \langle \nabla \theta \cdot \delta \nabla \theta \rangle dV = \oint_A \langle \mathbf{n} \cdot \nabla \theta, \delta \theta \rangle dA - \int_V \langle \nabla \cdot \nabla \theta, \delta \theta \rangle dV.$$

Наконец, слагаемое, определяющее связность тепловых и деформационных полей, трансформируется к виду

$$\int_V \langle \theta, \mathbf{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle dV = \int_V \langle \theta, \delta \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle dV = \oint_A \langle \theta, \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} \rangle dA - \int_V \langle \nabla \theta \cdot \delta \mathbf{v} \rangle dV.$$

Окончательно варьируемый функционал может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \int_V \left\{ \left\langle \left(\rho \dot{\mathbf{v}} - \rho \mathbf{K} - \nabla \cdot \left[\sum_{k=-N}^N (2\mu_k D^k \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_k \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} : D^k \boldsymbol{\varepsilon}) - \beta \mathbf{E} \theta \right] \right) \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle + \right. \\ &+ \left\langle \left(\frac{\varpi}{\vartheta} - \frac{c}{\vartheta} \dot{\theta} + \frac{k}{\vartheta} \nabla \cdot \nabla \theta - \beta \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right), \delta \theta \right\rangle + \frac{\rho}{2} \delta \mathbf{v}(T) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) - \frac{c}{2\vartheta} \delta \theta(T) (\theta - \theta_0) + \\ &+ \sum_{k=2}^N \sum_{n=1}^{k-1} \left(\mu_k D^{k-n} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) + \frac{\lambda_k}{2} D^{k-n} \mathbf{E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) \mathbf{E} \right) : (D^n \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^n) \Big\} dV + \\ &+ \oint_A \left\{ \left\langle \mathbf{n} \cdot \left[\sum_{k=-N}^N (2\mu_k D^k \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_k \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} : D^k \boldsymbol{\varepsilon}) - \beta \mathbf{E} \theta \right] \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle + \langle \mathbf{n} \cdot \nabla \theta, \delta \theta \rangle \right\} dA. \end{aligned}$$

В силу произвольности вариаций базисных функций (здесь используется аналог основной леммы вариационного исчисления, которая вытекает из свойства отделимости билинейной формы (3)), необходимые и достаточные условия стационарности функционала определяются соответствующими уравнениями Эйлера – Лагранжа:

$$\begin{aligned} \rho \dot{\mathbf{v}} - \rho \mathbf{K} - \nabla \cdot \left[\sum_{k=-N}^N (2\mu_k D^k \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_k \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} : D^k \boldsymbol{\varepsilon}) - \beta \mathbf{E} \theta \right] &= \mathbf{0}, \\ \varpi - c \dot{\theta} + k \nabla \cdot \nabla \theta - \vartheta \beta \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= 0 \end{aligned}$$

и естественными начальными условиями, которые определяют начальные значения скоростей, приращений температуры, начальных значений деформации поля ускорений и старших производных деформаций по времени, т.е. $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$, $\theta|_{t=0} = \theta_0$, $D^n \boldsymbol{\varepsilon}|_{t=0} = \boldsymbol{\varepsilon}_0^n$, ($n = 2, 3, \dots$), а также краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \left[\sum_{k=-N}^N (2\mu_k D^k \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_k \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} : D^k \boldsymbol{\varepsilon}) - \beta \mathbf{E} \theta \right] \Big|_{A_1} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}|_{A_2} = \mathbf{0}, \quad A_1 \cup A_2 = A, \\ \mathbf{n} \cdot [\nabla \theta] |_{A_3} &= 0, \quad \theta|_{A_4} = 0, \quad A_3 \cup A_4 = A. \end{aligned}$$

Здесь A — граничная поверхность тела.



Уравнения движения и теплопроводности могут быть записаны в базовых переменных \mathbf{v} и θ :

$$\rho \dot{\mathbf{v}} - \rho \mathbf{K} - \int_0^T \sum_{k=-N}^N [\mu_k \nabla \cdot \nabla D^k \mathbf{v} + (\lambda_k + \mu_k) \nabla \otimes \nabla \cdot D^k \mathbf{v}] dt + \beta \nabla \theta = \mathbf{0},$$

$$\varpi - c \dot{\theta} + k \nabla \cdot \nabla \theta - \beta \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

При этом краевые условия принимают вид

$$\mathbf{n} \cdot \left[\int_0^T \sum_{k=-N}^N \left\{ \mu_k \left(\nabla \otimes D^k \mathbf{v} + (\nabla \otimes D^k \mathbf{v})^* \right) + \lambda_k \nabla \cdot D^k \mathbf{v} \right\} dt - \beta \mathbf{E} \theta \right] \Big|_{A_1} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{v}|_{A_2} = \mathbf{0}, \quad A_1 \cup A_2 = A, \quad \mathbf{n} \cdot [\nabla \theta]|_{A_2} = 0, \quad \theta|_{A_4} = 0, \quad A_3 \cup A_4 = A.$$

Если ввести перемещения $\mathbf{u} = \int_0^t \mathbf{v} + \mathbf{u}_0$, то при нормировке $\mathbf{u}_0 = 0$ (которая всегда возможна, если тело деформировалось из естественного состояния) уравнения движения и теплопроводности принимают классический вид:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho \mathbf{K} - \sum_{k=-N}^N [\mu_k \nabla \cdot \nabla D^k \mathbf{u} + (\lambda_k + \mu_k) \nabla \otimes \nabla \cdot D^k \mathbf{u}] + \beta \nabla \theta = \mathbf{0},$$

$$\varpi - c \dot{\theta} + k \nabla \cdot \nabla \theta - \vartheta \beta \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Полученные дифференциальные уравнения, начальные и краевые условия полностью определяют начально-краевую задачу для изотропной термовязкоупругой среды дифференциального типа.

2. ТЕРМОУПРУГИЕ ТОНКОСТЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Приступим теперь к построению вариационного принципа для тонкостенных конструкций. Кинематические соотношения определяются гипотезами теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью (теорией Миндлина – Рейсснера) [17]. Для идентификации точек тонкостенной конструкции введем подходящие⁴ криволинейные координаты α, β, ζ . Символами $\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}^\beta, \mathbf{e}^\zeta$ обозначим соответствующие базисные векторы. Тонкостенную конструкцию будем рассматривать как трехмерное тело, ограниченное поверхностями $\zeta = C_1, \zeta = C_2, C_2 > C_1$. Будем полагать, что расстояние между поверхностями (толщина конструкции) $h = C_2 - C_1$ является малым параметром по отношению к ее общим размерам.

Согласно принятым кинематическим гипотезам скорость \mathbf{v} и приращение температуры θ могут быть представлены в форме разложений первого порядка по переменной ζ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \zeta \mathbf{v}, \quad \theta = \alpha + \zeta \mathbf{b}, \tag{17}$$

где функция двух поверхностных переменных $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha, \beta)$ определяет трансляционную скорость смещения нормали, а функция $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\alpha, \beta)$ — скорость ее поворота. Кроме того, согласно теории Миндлина – Рейсснера, потребуем выполнения следующего дополнительного кинематического условия⁵ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^\zeta = 0$. Из указанных кинематических соотношений вытекает разложение для тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \mathbf{def} \mathbf{v}(\tau) d\tau, \quad \mathbf{def} \mathbf{v} = \mathbf{def} \mathbf{u} + \zeta \mathbf{def} \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}). \tag{18}$$

⁴Здесь, конечно, «подходящие» координатные системы легко угадываются лишь в простых случаях. Например, для цилиндрических или сферических оболочек естественно выбрать цилиндрическую и сферическую систему координат, для пластин — одну из систем цилиндрического типа, например, кругового, эллиптического или гиперболического цилиндра, в зависимости от формы границы пластины. Однако уже для эллипсоидальных оболочек ситуация значительно усложняется, поскольку координатные поверхности эллиптической координатной системы не эквидистантны и не могут быть использованы для определения граничных поверхностей оболочки постоянной толщины.

⁵Это условие выражает тот факт, что в разложении скорости \mathbf{v} по ζ не учитывается член $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta} \cdot \mathbf{e}^\zeta$, что приводит к известной асимптотической некорректности теории Миндлина – Рейсснера. Вместе с тем погрешности, вносимые пренебрежением этого члена, в большинстве случаев оказываются малыми, что оправдывает такое упрощение. Конечно, для специальных (высокочастотных) нагрузок необходимо рассматривать полное разложение [18], либо вводить модифицированные кинематические гипотезы.



След тензора деформаций, очевидно, может быть найден по формуле $\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \{ \nabla \cdot \mathbf{u} + \zeta \nabla \cdot \mathbf{v} \} d\tau$. Отметим, что в силу принятых кинематических гипотез компонента $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ тензора деформаций обращается в нуль $\varepsilon_{\zeta\zeta} = \mathbf{e}^\zeta \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^\zeta = 0$, т.е. в рамках принятых гипотез обжатие по толщине отсутствует [18] (этот факт можно сформулировать иначе: нормаль при деформировании не изменяет свою длину [17]).

Помимо кинематических гипотез, в теории Миндлина – Рейсснера вводятся статические гипотезы. Хотя в дальнейшем изложения мы не используем непосредственно компоненты напряжений (поскольку все построения опираются на вариационный принцип, и учет статических гипотез осуществляется за счет соответствующего изменения плотности варьируемого функционала), для пояснения здесь введем обозначение для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Полагаем, что в случае трехмерного напряженного состояния напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ связаны с тензором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и приращением температуры θ следующим законом состояния: $\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta)$. В теории Миндлина – Рейсснера постулируется отсутствие нормальных напряжений на площадках, касательных к поверхности осреднения, т.е. $\sigma_{\zeta\zeta} = 0$, и корректируются значения касательных напряжений $\sigma_{\alpha\zeta} = \varkappa \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathfrak{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) \cdot \mathbf{e}^\zeta$, $\sigma_{\beta\zeta} = \varkappa \mathbf{e}^\beta \cdot \mathfrak{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) \cdot \mathbf{e}^\zeta$, где \varkappa – коэффициент поперечного сдвига⁶ [19]

$$\varkappa = \frac{3}{2} - \frac{3}{10(1+\nu)} - \frac{3\nu}{4(1+\nu)}. \quad (19)$$

Поскольку в настоящей работе для вывода уравнений используется вариационный принцип, нет нужды непосредственно вводить статические гипотезы, однако для того чтобы получаемая теория оказалась согласованной с теорией Миндлина – Рейсснера, необходимо модифицировать выражение для плотности $\mathcal{L}_{\text{mech}}$ (14) следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\text{mech}} = \frac{1}{2} (\rho \langle \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \rangle - 2\rho \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \rangle + 2 \langle \mathcal{M}[\boldsymbol{\varepsilon}] : \mathbf{G} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \langle \mathcal{L}[\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}], \mathbf{E}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle), \quad (20)$$

где тензор четвертого ранга \mathbf{G} вводится для поправки напряжений сдвига, вводимой в теорию Миндлина – Рейсснера. Тензор \mathbf{G} может быть представлен диадным разложением:

$$\mathbf{G} = \mathbf{1} + (\varkappa - 1) \left(\mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0^{(2143)} \right), \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\beta \otimes \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{e}^\beta \otimes \mathbf{e}^\zeta. \quad (21)$$

Здесь $\mathbf{1}$ – тензорная единица (тензор четвертого ранга, отображающий любой тензор второго ранга в себя), $\mathbf{G}_0^{(2143)}$ – изомер тензорной единицы, соответствующий диадной перестановке⁷ $(1234) \mapsto (2413)$.

Таким образом, конволютивный функционал для тонкостенных конструкций записывается в виде (11), в котором формулировка плотности $\mathcal{L}_{\text{mech}}$ принимается в форме (20), а тензоры деформаций, скорости и приращения температуры представляются в виде разложений по степеням ζ (17), (18). Это позволяет записать сам функционал (11) в форме разложения по ζ и затем осуществить интегрирование получаемого таким образом выражения по переменной ζ [20]. Для этой цели осуществим промежуточные вычисления, учитывая, что $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{defu} + \zeta \text{defv} + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v})$. Имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{G} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \int_0^t \left\{ \text{defu} + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) \right\} d\tau : \mathbf{G} : \left(\text{defu} + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) \right) + \\ &+ \zeta \int_0^t \text{defv} d\tau : \mathbf{G} : \left(\text{defu} + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) \right) + \zeta \int_0^t \left\{ \text{defu} + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) \right\} d\tau : \mathbf{G} : \text{defv} + \\ &+ \zeta^2 \int_0^t \text{defv} d\tau : \mathbf{G} : \text{defv}. \end{aligned}$$

⁶Для определения коэффициента поперечного сдвига, помимо формулы (19), имеются другие предложения. Так, согласно Э. Рейсснеру, $\varkappa = 5/6$, согласно Р. Миндлину, $\varkappa = \pi^2/12$.

⁷Например, выражение $\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{G} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ в компонентной записи может быть представлено следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{G} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon^{\alpha\alpha} \dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \varepsilon^{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{\beta\alpha} \dot{\varepsilon}_{\beta\alpha} + \varepsilon^{\beta\beta} \dot{\varepsilon}_{\beta\beta} + \varkappa \left(\varepsilon^{\alpha\zeta} \dot{\varepsilon}_{\alpha\zeta} + \varepsilon^{\zeta\alpha} \dot{\varepsilon}_{\zeta\alpha} + \varepsilon^{\beta\zeta} \dot{\varepsilon}_{\beta\zeta} + \varepsilon^{\zeta\beta} \dot{\varepsilon}_{\zeta\beta} \right).$$

Полученное соотношение можно упростить. Действительно, в силу специальной структуры тензора \mathbf{G} имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{defu} \, d\tau : \mathbf{G} : \mathbf{defv} &= \int_0^t \mathbf{defu} \, d\tau : \mathbf{defv}, & \int_0^t \mathbf{defv} \, d\tau : \mathbf{G} : \mathbf{defv} &= \int_0^t \mathbf{defv} \, d\tau : \mathbf{defv}, \\ \int_0^t \mathbf{defu} \, d\tau : \mathbf{G} : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) &= \varkappa \int_0^t \mathbf{defu} \, d\tau : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}), \\ \int_0^t (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) : \mathbf{G} : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) &= 2\varkappa \int_0^t \mathbf{v} \, d\tau \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к следующему разложению:

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbf{G} : \dot{\varepsilon} &= \int_0^t \mathbf{defu} \, d\tau : \mathbf{G} : \mathbf{defu} + \frac{\varkappa}{2} \left(\int_0^t \mathbf{defu} \, d\tau : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) + \int_0^t (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) \, d\tau : \mathbf{defu} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \mathbf{v} \, d\tau \cdot \mathbf{v} \right) + \zeta \left(\int_0^t \mathbf{defv} \, d\tau : \mathbf{defu} + \int_0^t \mathbf{defu} \, d\tau : \mathbf{defv} \right) + \zeta^2 \int_0^t \mathbf{defv} \, d\tau : \mathbf{defv}. \end{aligned}$$

Аналогичные преобразования позволяют получить разложения для члена $\mathbf{E} : \varepsilon \mathbf{E} : \dot{\varepsilon}$, т.е.

$$\mathbf{E} : \varepsilon \mathbf{E} : \dot{\varepsilon} = \int_0^t \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\tau \nabla \cdot \mathbf{u} + \zeta \left(\int_0^t \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau \nabla \cdot \mathbf{u} + \int_0^t \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\tau \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \zeta^2 \int_0^t \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Наконец слагаемые, соответствующие инерциальным и массовым силам, допускают разложение

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \zeta (\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}) + \zeta^2 \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} + \zeta \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}.$$

В результате подстановки полученных соотношений в формулу (20) и перегруппировки слагаемых приходим к следующему разложению плотности $\mathcal{L}_{\text{mech}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mech}} &= \frac{\rho}{2} \langle \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} \rangle - \rho \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \rangle + \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\mathbf{defu}] \, d\tau : \mathbf{G} : \mathbf{defu} \right\rangle + \frac{\varkappa}{2} \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\mathbf{defu}] \, d\tau : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) \right\rangle + \\ &\quad + \frac{\varkappa}{2} \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}] \, d\tau : \mathbf{defu} \right\rangle + \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\mathbf{v}] \, d\tau \cdot \mathbf{v} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \int_0^t \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}] \, d\tau, \nabla \cdot \mathbf{u} \right\rangle + \\ &\quad + \zeta \left\{ \frac{\rho}{2} (\langle \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}} \rangle + \langle \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \rangle) - \rho \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \rangle + \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\mathbf{defv}] \, d\tau : \mathbf{defu} \right\rangle + \left\langle \mathbf{defv} : \int_0^t \mathcal{M}[\mathbf{defu}] \, d\tau \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left\langle \int_0^t \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}] \, d\tau, \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \nabla \cdot \mathbf{u}, \int_0^t \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] \, d\tau \right\rangle \right\} + \\ &\quad + \zeta^2 \left\{ \frac{\rho}{2} \left\langle \int_0^t \mathbf{v} \, d\tau \cdot \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\mathbf{defv}] \, d\tau : \mathbf{defv} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \int_0^t \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] \, d\tau, \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Для представления плотности $\mathcal{L}_{\text{therm}}$ в форме разложения по ζ предварительно преобразуем следующие выражения:

$$\langle \varpi, \theta \rangle = \langle \varpi, \mathbf{a} \rangle + \zeta \langle \varpi, \mathbf{b} \rangle, \quad \langle \theta, \dot{\theta} \rangle = \langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle + \zeta (\langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{b}} \rangle + \langle \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{b} \rangle) + \zeta^2 \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}} \rangle.$$



Поскольку градиент температуры допускает разложение $\nabla\theta = \nabla(\mathbf{a} + \zeta\mathbf{b}) = \nabla\mathbf{a} + \zeta\nabla\mathbf{b} + e^\zeta\mathbf{b}$, то его конволютивный квадрат может быть представлен в виде

$$\langle \nabla\theta \cdot \nabla\theta \rangle = \langle \nabla\mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{a} \rangle + 2\zeta \langle (\nabla\mathbf{a} + e^\zeta\mathbf{b}) \cdot \nabla\mathbf{b} \rangle + \zeta^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle,$$

а так как в силу принятых гипотез $e^\zeta \cdot \nabla\mathbf{b} = 0$, то $\langle \nabla\theta \cdot \nabla\theta \rangle = \langle \nabla\mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{a} \rangle + 2\zeta \langle \nabla\mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{b} \rangle + \zeta^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$. Таким образом, имеем разложение для плотности $\mathcal{L}_{\text{therm}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{therm}} = & \langle \varpi, \mathbf{a} \rangle - \frac{c}{2} \langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle - \frac{k}{2} \langle \nabla\mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{a} \rangle + \zeta \left\{ \langle \varpi, \mathbf{b} \rangle - \frac{c}{2} \langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{b}} \rangle - \frac{c}{2} \langle \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{b} \rangle - k \langle \nabla\mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{b} \rangle \right\} - \\ & - \zeta^2 \left\{ \frac{c}{2} \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}} \rangle + \frac{k}{2} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Наконец, плотность $\mathcal{L}_{\text{inter}}$ может быть сформулирована следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\text{inter}} = -\beta \langle (\mathbf{a} + \zeta\mathbf{b}), (\nabla \cdot \mathbf{u} + \zeta \cdot \mathbf{v}) \rangle = -\beta \langle \mathbf{a}, \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle - \zeta\beta \langle \langle \mathbf{b}, \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{a}, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \rangle - \zeta^2\beta \langle \mathbf{b}, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle.$$

Здесь и далее для краткости будем полагать, что начальные ускорения (и другие старшие производные по времени) равны нулю. Учет ненулевых начальных значений этих полей приводит к дополнительным слагаемым, вид которых подобен соответствующим членам функционала (11).

В результате подстановки полученных выражений в соотношение для функционала (11), приходим к интегралу по объему V от многочлена третьей степени по переменной ζ . Это позволяет осуществить редукцию функционала, вычисляя интеграл по переменной ζ явно. Громоздкость результата зависит от выбора поверхности осреднения. Выберем поверхность так, чтобы она была эквидистантна лицевым поверхностям. Тогда члены с нечетными степенями ζ исчезнут. Таким образом, функционал (11) после интегрирования по координате ζ принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{red}} = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{h\rho}{2} \langle \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} \rangle - h\rho \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \rangle + h \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\text{defu}] d\tau : \mathbf{G} : \text{defu} \right\rangle + \right. \\ & + \frac{\varkappa}{2} \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\text{defu}] d\tau : (\mathbf{v} \otimes e^\zeta + e^\zeta \otimes \mathbf{v}) \right\rangle + \frac{\varkappa}{2} \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\mathbf{v} \otimes e^\zeta + e^\zeta \otimes \mathbf{v}] d\tau : \text{defu} \right\rangle + \\ & + \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\mathbf{v}] d\tau \cdot \mathbf{v} \right\rangle + \frac{h}{2} \left\langle \int_0^t \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}] d\tau, \nabla \cdot \mathbf{u} \right\rangle + h \langle \varpi, \mathbf{a} \rangle - \frac{hc}{2} \langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle - \frac{hk}{2} \langle \nabla\mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{a} \rangle - h\beta \langle \mathbf{a}, \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle + \\ & + \frac{h^3\rho}{24} \langle \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \rangle + \frac{h^3}{12} \left\langle \int_0^t \mathcal{M}[\text{defv}] d\tau : \text{defv} \right\rangle + \frac{h^3}{24} \left\langle \int_0^t \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] d\tau, \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle - \frac{h^3c}{24} \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}} \rangle + \\ & + \left. \frac{h^3k}{24} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - \frac{h^3\beta}{12} \langle \mathbf{b}, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle - \frac{h\rho}{2} \mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{u}_0 - \frac{h^3\rho}{24} \mathbf{v}(T) \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{hc}{2} \mathbf{a}(T) \mathbf{a}_0 + \frac{h^3c}{24} \mathbf{b}(T) \mathbf{b}_0 \right\} dA. \quad (22) \end{aligned}$$

Итак, вариационная формулировка для термовязкоупругих тонкостенных конструкций определяется функционалом (22).

В результате варьирования функционала (22) и используя дивергентную теорему Остроградско-Гаусса в отношении пространственных переменных и интегрирование по частям в отношении переменной t , приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}_{\text{red}} = & \oint_{\Gamma} \mathcal{N} \cdot \left\{ \left\langle \left(\int_0^t h [2\mathcal{M}[\text{defu}] : \mathbf{G} + \varkappa \mathcal{M}[\mathbf{v} \otimes e^\zeta + e^\zeta \otimes \mathbf{v}] + \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}] \mathcal{E}] d\tau - h\beta \mathbf{a} \mathcal{E} \right) \cdot \delta\mathbf{u} \right\rangle + \right. \\ & + \left\langle \left(\int_0^t \frac{h^3}{12} [2\mathcal{M}[\text{defv}] + \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] \mathcal{E}] d\tau - \frac{h^3\beta}{12} \mathbf{b} \mathcal{E} \right) \cdot \delta\mathbf{v} \right\rangle - \langle hk \nabla\mathbf{a}, \delta\mathbf{a} \rangle - \langle hk \nabla\mathbf{b}, \delta\mathbf{b} \rangle \left. \right\} d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \left\langle h \left(\rho [\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}] - \int_0^t [2\nabla \cdot \mathcal{M}[\text{defu}] : \mathbf{G} + \varkappa \nabla \cdot \mathcal{M}[\mathbf{v} \otimes e^\zeta + e^\zeta \otimes \mathbf{v}] + \nabla \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}]] d\tau + \beta \nabla\mathbf{a} \right) \cdot \delta\mathbf{u} \right\rangle + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\langle \left(\frac{h^3 \rho}{12} \dot{\mathbf{v}} + \int_0^t \left[2h\chi \mathcal{M}[\mathbf{defu}] \cdot \mathbf{e}^\zeta + 2h\mu \mathbf{v} - \frac{h^3}{6} \nabla \cdot \mathcal{M}[\mathbf{defv}] - \frac{h^3}{12} \nabla \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] \right] d\tau + \frac{h^3 \beta}{12} \nabla \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle + \\
 & + \langle (h\varpi - hc\dot{\mathbf{a}} + hk\nabla^2 \mathbf{a} - h\beta \nabla \cdot \mathbf{u}), \delta \mathbf{a} \rangle + \left\langle \left(-\frac{h^3 c}{12} \dot{\mathbf{b}} + \frac{h^3 k}{12} \nabla^2 \mathbf{b} - \frac{h^3 \beta}{12} \nabla \cdot \mathbf{v} \right), \delta \mathbf{b} \right\rangle - \\
 & - \frac{h\rho}{2} \delta \mathbf{u}(T) \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0)) - \frac{h^3 \rho}{24} \delta \mathbf{v}(T) \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(0)) + \frac{hc}{2} \delta \mathbf{a}(T) (\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}(0)) + \frac{h^3 c}{24} \delta \mathbf{b}(T) (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}(0)) \Big\} dA.
 \end{aligned}$$

В силу свойства отделимости конволюции (3) получаем уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 h\rho [\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}] - \int_0^t h [2\nabla \cdot \mathcal{M}[\mathbf{defu}] : \mathbf{G} + \chi \nabla \cdot \mathcal{M}[\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}] + \nabla \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}]] d\tau + h\beta \nabla \mathbf{a} &= \mathbf{0}, \\
 \frac{h^3 \rho}{12} \dot{\mathbf{v}} + \int_0^t \left[2h\chi \mathcal{M}[\mathbf{defu} \cdot \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{v}] - \frac{h^3}{6} \nabla \cdot \mathcal{M}[\mathbf{defv}] - \frac{h^3}{12} \nabla \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] \right] d\tau + \frac{h^3 \beta}{12} \nabla \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \\
 h\varpi - hc\dot{\mathbf{a}} + hk\nabla^2 \mathbf{a} - h\beta \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\
 -\frac{h^3 c}{12} \dot{\mathbf{b}} + \frac{h^3 k}{12} \nabla^2 \mathbf{b} - \frac{h^3 \beta}{12} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0,
 \end{aligned} \tag{23}$$

естественные краевые условия ($\mathcal{E} = \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}^\beta \otimes \mathbf{e}_\beta$):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} \cdot \left(\int_0^t h [2\mathcal{M}[\mathbf{defu}] : \mathbf{G} + \chi \mathcal{M}[\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}] + \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}]] \mathcal{E} d\tau - h\beta \mathbf{a} \mathcal{E} \right) \Big|_\Gamma &= \mathbf{0}, \\
 \mathcal{N} \cdot \left(\int_0^t \frac{h^3}{12} [2\mathcal{M}[\mathbf{defv}] + \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}]] \mathcal{E} d\tau - \frac{h^3 \beta}{12} \mathbf{b} \mathcal{E} \right) \Big|_\Gamma &= \mathbf{0}, \quad \mathcal{N} \cdot \nabla \mathbf{a} \Big|_\Gamma = 0, \quad \mathcal{N} \cdot \nabla \mathbf{b} \Big|_\Gamma = 0
 \end{aligned}$$

и начальные условия

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{a}|_{t=0} = \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}|_{t=0} = \mathbf{b}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{v}}|_{t=0} = \mathbf{0}, \dots$$

Подчеркнем, что, в отличие от классических вариационных принципов (таких как принцип Остроградского – Гамильтона) начальные условия, так же как и краевые, непосредственно вытекают из вариационной постановки.

3. ТРЕХСЛОЙНЫЕ ТОНКОСТЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Для вывода уравнений движения и теплопроводности трехслойных тонкостенных конструкций принимаем следующие допущения. Толщина среднего слоя h_1 значительно превосходит толщины внешних слоев (h_2, h_3). Средний слой рассматривается в постановке теории Миндлина – Рейсснера, внешние слои рассматриваются в постановке мембранной теории. Деформирование всего пакета слоев удовлетворяет гипотезе ломаной нормали.

Принимая во внимание указанные гипотезы, представим скорости и температуру внутреннего (1) и внешних слоев (2,3) в форме следующих разложений:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}^1 &= \mathbf{u} + \zeta \mathbf{v}, & \mathbf{v}^2 &= \mathbf{u} - h_- \mathbf{v}, & \mathbf{v}^3 &= \mathbf{u} + h_+ \mathbf{v}, & \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^\zeta &= 0; \\
 \theta^1 &= \mathbf{a} + \zeta \mathbf{b}, & \theta^2 &= \mathbf{a} - h_- \mathbf{b}, & \theta^3 &= \mathbf{a} + h_+ \mathbf{b}.
 \end{aligned}$$

Здесь h_+, h_- — расстояния от поверхности осреднения до внешних лицевых поверхностей тонкостенной конструкции.

Разложения тензора деформаций по переменной ζ , соответствующие внешним и внутреннему слоям, могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}^k &= \int_0^t \mathbf{defv}^k(\tau) d\tau, & \mathbf{defv}^1 &= \mathbf{defu} + \zeta \mathbf{defv} + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}), \\
 \mathbf{defv}^{2,3} &= \mathbf{defu} \mp h_\mp \mathbf{defv}.
 \end{aligned} \tag{24}$$



Принимая во внимание соотношения (24), приходим к следующему выражению для плотности $\mathcal{L}_{\text{mech}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mech}} = & \frac{1}{2} \left(\rho^1 \langle \mathbf{v}^1 \cdot \dot{\mathbf{v}}^1 \rangle - 2\rho^1 \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}^1 \rangle + 2\mu^1 \langle \boldsymbol{\varepsilon}^1 : \mathbf{G} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 \rangle + \lambda^1 \langle \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^1, \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 \rangle + \right. \\ & + \rho^2 \langle \mathbf{v}^1 \cdot \dot{\mathbf{v}}^2 \rangle - 2\rho^2 \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}^2 \rangle + 2\mu^2 \langle \boldsymbol{\varepsilon}^2 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^2, \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \rangle + \\ & \left. + \rho^3 \langle \mathbf{v}^3 \cdot \dot{\mathbf{v}}^3 \rangle - 2\rho^3 \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}^3 \rangle + 2\mu^3 \langle \boldsymbol{\varepsilon}^3 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^3 \rangle + \lambda^3 \langle \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^3, \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^3 \rangle \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Подобные разложения получаются для плотностей $\mathcal{L}_{\text{therm}}$ и $\mathcal{L}_{\text{inter}}$ (верхний индекс в обозначениях материальных констант соответствует номеру слоя). Выражение для функционала (22), соответствующие уравнения Эйлера – Лагранжа, краевые и начальные условия аналогичны соотношениям, полученным в предыдущем разделе.

4. ПЛАСТИНЫ

Если кривизна поверхности осреднения равна нулю (т.е. тонкостенная конструкция представляет собой пластину), то вариационная формулировка и соответствующие ей уравнения движения и теплопроводности существенно упрощаются. Действительно, поскольку базисный вектор \mathbf{e}^ζ не зависит от координат, то оказывается справедливым соотношение $\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\zeta \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{e}^\zeta$. Если, кроме того, принимать во внимание только поперечное нагружение, задаваемое функцией $q = q(\alpha, \beta)$, $\mathbf{K} = \frac{a}{h\rho} \mathbf{e}^\zeta$, и только неравномерный нагрев, т.е. полагать, что $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{b} \neq 0$; $\theta = \vartheta + \zeta \mathbf{b}$, то, как легко убедиться, имеют место равенства:

$$\mathbf{u} = w \mathbf{e}^\zeta, \quad 2\nabla \cdot \text{defu} : \mathbf{G} = \varkappa (\nabla^2 w) \mathbf{e}^\zeta, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad 2 \text{defu} \cdot \mathbf{e}^\zeta = \nabla w,$$

а полная система уравнений (23) редуцируется к следующей системе четырех уравнений

$$\begin{aligned} h\rho \dot{w} - q - h\varkappa \int_0^t \mathcal{M} [\nabla^2 w + \nabla \cdot \mathbf{v}] d\tau = 0, \\ \frac{h^3 \rho}{12} \dot{\mathbf{v}} + \int_0^t \left[h\varkappa \mathcal{M} [\nabla w + \mathbf{v}] - \frac{h^3}{6} \nabla \cdot \mathcal{M} [\text{defv}] - \frac{h^3}{12} \nabla \mathcal{L} [\nabla \cdot \mathbf{v}] \right] d\tau + \frac{h^3 \beta}{12} \nabla \mathbf{b} = 0, \\ \frac{h^3 k}{12} \nabla^2 \mathbf{b} - \frac{h^3 c}{12} \dot{\mathbf{b}} - \frac{h^3 \beta}{12} \nabla \cdot \mathbf{v} + \omega = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Краевые условия при этом принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \cdot \left(\int_0^t \mathcal{M} [\nabla w + \mathbf{v}] d\tau \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad w|_{\Gamma_2} = 0; \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \\ \mathcal{N} \cdot \left(\int_0^t [2\mathcal{M} [\text{defv}] + \mathcal{L} [\nabla \cdot \mathbf{v}] \boldsymbol{\varepsilon}] d\tau - \beta \mathbf{b} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Big|_{\Gamma_3} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_4} = 0; \quad \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma, \\ \mathcal{N} \cdot \nabla \mathbf{b}|_{\Gamma_5} = 0, \quad \mathbf{b}|_{\Gamma_6} = 0; \quad \Gamma_5 \cup \Gamma_6 = \Gamma. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь \mathcal{N} — внешняя единичная нормаль к границе, которая представляет собой кусочно-гладкую кривую, лежащую в плоскости осреднения ($\mathcal{N} \cdot \mathbf{e}^\zeta = 0$). Укажем канонические способы опирания. Если $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \emptyset$, $\Gamma_2 = \Gamma_4 = \Gamma$, то краевые условия соответствуют жесткому закреплению пластины на опорном контуре, если $\Gamma_1 = \Gamma_4 = \emptyset$, $\Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma$, то они соответствуют шарнирному опиранию, если $\Gamma_5 = \emptyset$, $\Gamma_6 = \Gamma$, граница изотермическая, если $\Gamma_6 = \emptyset$, $\Gamma_5 = \Gamma$, граница теплоизолированная.

Отметим, что второе уравнение системы (26) может быть записано в следующей эквивалентной форме

$$\frac{h^3 \rho}{12} \dot{\mathbf{v}} + \int_0^t \left[h\varkappa \mathcal{M} [\nabla w + \mathbf{v}] - \frac{h^3}{12} \mathcal{M} [\nabla^2 \mathbf{v}] - \frac{h^3}{12} (\mathcal{M} + \mathcal{L}) [\nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{v}] \right] d\tau + \frac{h^3 \beta}{12} \nabla \mathbf{b} = 0.$$

Следует также отметить, что если в уравнениях (26) и краевых условиях (27) положить $N = 0$ (т.е. считать отличными от нуля только упругие модули Ламе) и $\beta = 0$ (т.е. пренебрегать эффектом связанности тепловых и деформационных полей), то они преобразуются к известным уравнениям теории пластин с конечной сдвиговой жесткостью (теории Миндлина – Рейсснера)⁸.

Для анализа полученных уравнений их целесообразно представить в безразмерной форме. Для этой цели введем безразмерные пространственные координаты и время $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{R}$, $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{R}$, $\tilde{t} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \frac{t}{R}$, а также безразмерные скорости и приращение температуры $\tilde{w} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} w$, $\tilde{\mathbf{v}} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \mathbf{v}$, $\tilde{\mathbf{b}} = \frac{bh}{\vartheta}$. Здесь R – характерный размер пластины.

В безразмерных переменных уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{w} - \tilde{q} - \mathcal{M} \int_0^{\tilde{t}} \left[\tilde{\nabla}^2 \tilde{w} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right] d\tau &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\mathbf{v}} + \int_0^{\tilde{t}} \left[\mathcal{B} (\tilde{\nabla} \tilde{w} + \tilde{\mathbf{v}}) - \mathcal{C} \tilde{\nabla} \otimes \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \mathcal{M} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} \right] d\tau + \mathcal{D} \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{b}} &= \mathbf{0}, \\ \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{b}} - \mathcal{E} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\mathbf{b}} - \mathcal{F} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь введены безразмерная нагрузка \tilde{q} и безразмерная удельная мощность источников тепла $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{q} = \frac{R}{\mu_0 h} q, \quad \tilde{\omega} = \frac{12R^2}{h\vartheta k} \omega.$$

Краевые условия могут быть записаны в безразмерной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}} \cdot \left(\int_0^{\tilde{t}} \mathcal{M} [\tilde{\nabla} \tilde{w} + \tilde{\mathbf{v}}] d\tau \right) \Big|_{\tilde{\Gamma}_1} &= \mathbf{0}, \quad \tilde{w} = |_{\tilde{\Gamma}_2} = 0; \quad \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 = \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{\mathcal{N}} \cdot \left(\int_0^{\tilde{t}} [2\mathcal{M} \text{def} \tilde{\mathbf{v}} + \mathcal{L} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathcal{E}}] d\tau - \tilde{\beta} \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathcal{E}} \right) \Big|_{\tilde{\Gamma}_3} &= \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = |_{\tilde{\Gamma}_4} = \mathbf{0}; \quad \tilde{\Gamma}_3 \cup \tilde{\Gamma}_4 = \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{\mathcal{N}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{b}} \Big|_{\tilde{\Gamma}_5} &= 0, \quad \tilde{\mathbf{b}} \Big|_{\tilde{\Gamma}_6} = 0; \quad \tilde{\Gamma}_5 \cup \tilde{\Gamma}_6 = \tilde{\Gamma}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\Gamma}_k$, $k = 1, 2, \dots, 6$ – части образа $\tilde{\Gamma}$ границы пластины в плоскости безразмерных координат $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$; $\tilde{\mathcal{N}}$ – внешняя единичная нормаль к $\tilde{\Gamma}$.

В уравнениях (28) введены безразмерные параметры:

$$\mathcal{A} = 1/\varkappa, \quad \mathcal{D} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha\vartheta R}{\mu h}, \quad \mathcal{E} = \frac{Rc\sqrt{\mu}}{k\sqrt{\rho}}, \quad \mathcal{F} = \frac{h(3\lambda + 2\mu)\alpha\sqrt{\mu}}{k\sqrt{\rho}},$$

и операторы с безразмерными коэффициентами:

$$\mathcal{M} = \sum_{k=-N}^N \frac{\mu_k}{\mu_0} D^k, \quad \mathcal{B} = \frac{12\varkappa R^2}{h^2} \mathcal{M}, \quad \mathcal{C} = \sum_{k=-N}^N \frac{\lambda_k + \mu_k}{\mu_0} D^k, \quad \mathcal{L} = \sum_{k=-N}^N \frac{\lambda_k}{\lambda_0} D^k.$$

Если рассматривать термоупругие пластины (положить $N = 0$), то записанные выше операторы трансформируются в постоянные коэффициенты

$$\mathcal{M} = 1, \quad \mathcal{B} = \frac{12\varkappa R^2}{h^2}, \quad \mathcal{C} = \sum_{k=-N}^N \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\mu_0}, \quad \mathcal{L} = 1.$$

⁸Вместе с тем основные уравнения теории пластин с конечной сдвиговой жесткостью были получены Я.С. Уфляндом в 1948 г., т.е. существенно раньше работ Миндлина и Рейсснера (Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12, вып. 3).



Далее рассматриваем только безразмерные уравнения и для сокращения записи надстрочный знак тильды будем опускать.

Уравнения (28) могут быть сведены к каноническим уравнениям волнового типа, если ввести два скалярных потенциала $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\alpha, \beta)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\alpha, \beta)$, связав их с выражением для перемещений посредством соотношений:

$$w = (\mathcal{C} + \mathcal{M})\nabla^2 \dot{\mathcal{G}} - \mathcal{B}\dot{\mathcal{G}} - \ddot{\mathcal{G}}, \quad \mathbf{v} = \mathcal{S} \cdot \nabla \dot{\mathcal{U}} + \mathcal{B}\nabla \dot{\mathcal{G}}. \quad (29)$$

Здесь \mathcal{S} тензор, такой что⁹ $\nabla \cdot \mathcal{S} \cdot \nabla = \mathbf{0}$. Подстановка выражений (29) в уравнения движения и теплопроводности приводит к системе уравнений относительно потенциалов, которая, очевидно, является линейной системой с постоянными коэффициентами, сформулированной в терминах оператора Лапласа (разумеется, сам оператор Лапласа может содержать переменные коэффициенты). Преимущество подобной формулировки начально-краевой задачи состоит в том, что порождающие ее уравнения формально имеют постоянные коэффициенты, и потому ее решение сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений и канонической краевой задачи для волнового уравнения, решения которой для канонических областей хорошо известны и записываются в терминах табулированных специальных функций.

Решение неоднородной краевой задачи (соответствующее вынужденным колебаниям пластины) может быть получено, например, в форме разложений по биортогональной системе собственных функций [20, 21]. В настоящей работе рассмотрим наиболее простой пример решения однородной задачи, которая соответствует собственным колебаниям.

Пусть рассматривается эллиптическая пластина. В качестве координатной системы выберем координаты эллиптического цилиндра $\{\phi, \varphi, \zeta\}$, которые связаны с декартовыми координатами $\{x, y, z\}$ следующими соотношениями: $x = \cosh \phi \cos \varphi$, $y = \sinh \phi \sin \varphi$, $z = \zeta$.

Уравнение Гельмгольца в эллиптических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \mathcal{V} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \mathcal{V} + (\sinh^2 \phi + \sin^2 \varphi) \zeta \mathcal{V} = 0. \quad (30)$$

Решения уравнения (30), обращаемые в нуль на эллиптической границе, могут быть представлены формулами

$$\mathcal{V} = C(q, \zeta/4, i\phi) C(q, \zeta/4, \varphi), \quad i = \sqrt{-1},$$

где $C(a, q; z)$ — функции Матье; a — характеристическое значение, q — параметр функции Матье. Параметры ζ находятся как корни трансцендентного уравнения

$$C(q[n, \zeta/4], \zeta/4, i) = 0.$$

Используя построенные решения как решения уравнения, порождающего систему для потенциалов, не составляет труда найти собственные значения и соответствующие собственные вектор-функции, которые, как показывает непосредственное вычисление, соответствуют шарнирному опиранию пластины на опорном контуре.

Вычисления производились для эллиптической шарнирно закрепленной пластины из алюминия ($\rho = 2699 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $c = 900 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $k = 210 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\lambda_0 = 64.29 \text{ ГПа}$, $\mu_0 = 25 \text{ ГПа}$, $\mu_1 = 25 \times 10^{-3} \text{ ГПа}$ с, $\alpha = 24 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{К}^{-1}$). Соотношение длин полуосей принималось равным 3/2. Отношение толщины к длине большей полуоси принималось равным 1/10. Масштаб тела определялся множителем $R = 10^{-5} \text{ м}$. В таблице приведены первые 16 собственных значений. Частоты собственных колебаний (в Гц) могут быть вычислены как произведения мнимых частей соответствующих собственных значений на размерный множитель 9.69×10^7 . Отрицательные действительные части характеризуют затухание собственных колебаний, вызванных собственной и термической диссипацией.

⁹В ряде координатных систем (прямоугольной, кругового цилиндра, эллиптического цилиндра и т.д.) тензор \mathcal{S} может быть представлен следующим диадным разложением:

$$\mathcal{S} = \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta - \mathbf{e}^\beta \otimes \mathbf{e}_\alpha.$$



$n \setminus m$	1	2	3	4
1	-0.0000367+0.202 i	-0.000505+1.14 i	-0.00196+2.78 i	-0.00477+4.90 i
2	-0.000118+0.440 i	-0.000816+1.57 i	-0.00262+3.35 i	-0.00585+5.57 i
3	-0.000281+0.779 i	-0.00125+2.07 i	-0.00343+3.98 i	-0.00708+6.28 i
4	-0.000546+1.20 i	-0.00183+2.664 i	-0.00440+4.66 i	-0.00848+7.03 i

На рис. 1, 2 изображены действительные части компонент соответствующих собственных вектор-функций, отвечающих поперечным перемещениям (моды на рисунках, так же как и в таблице, нумеруются парами чисел (n, m)). Система собственных функций не является ортогональной, но совместно с собственными функциями сопряженной задачи образует биортогональный базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом, что позволяет представить решение соответствующей неоднородной начально-краевой задачи в форме спектральных разложений [21].

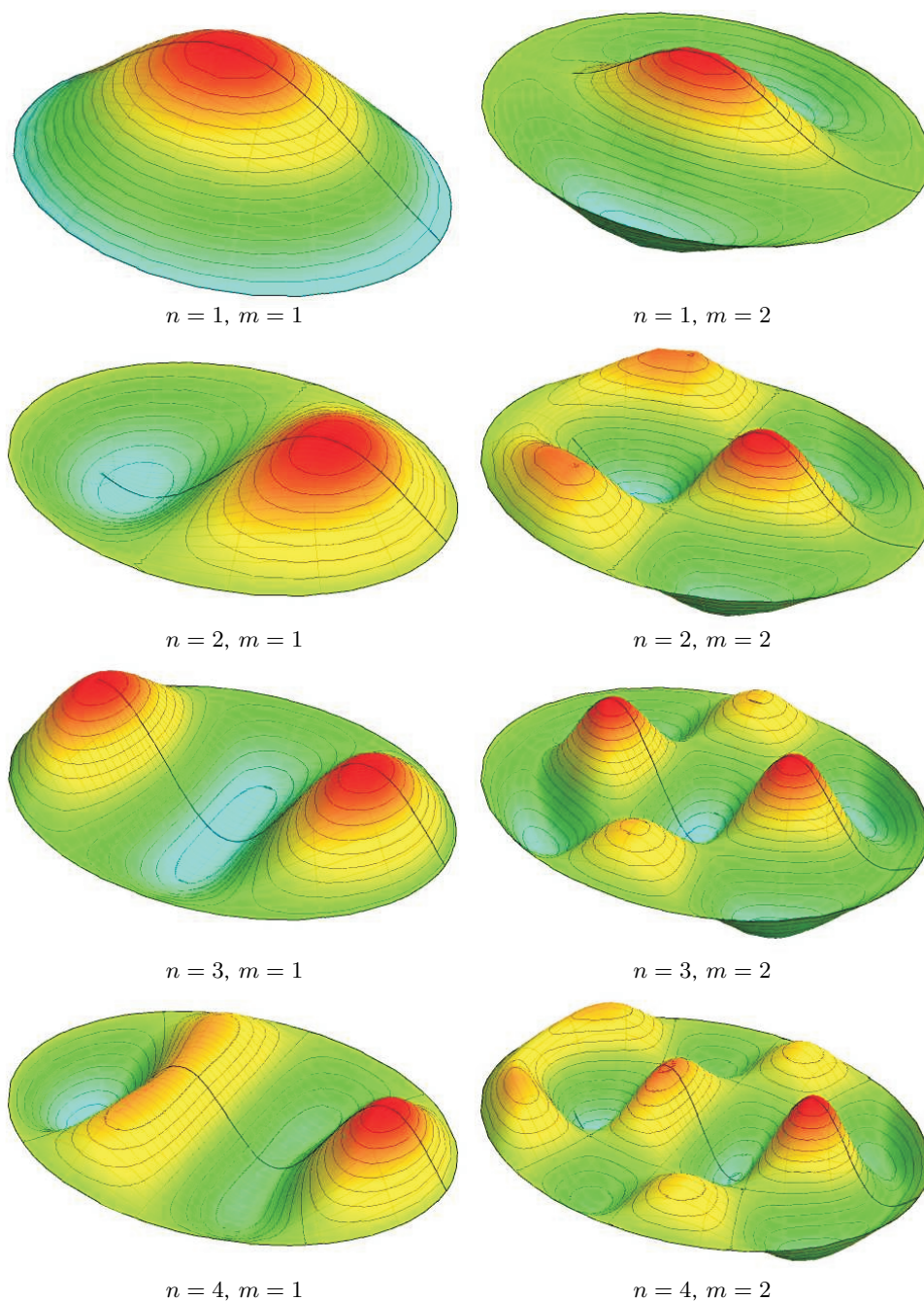


Рис. 1. Собственные формы колебаний эллиптической пластины при $m = 1, 2$

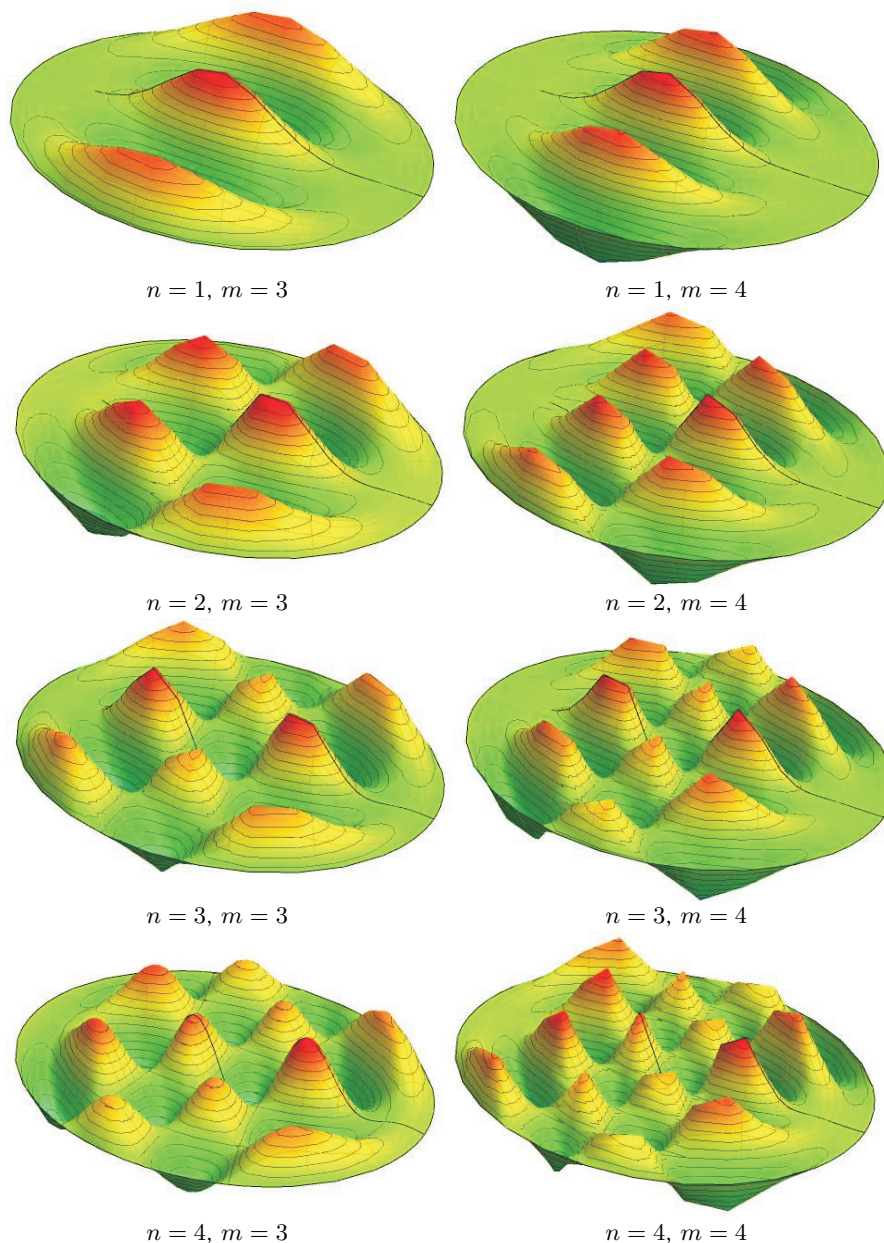


Рис. 2. Собственные формы колебаний эллиптической пластины при $m = 3, 4$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-08-01180а).

Библиографический список

1. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. P. 31–38.

2. Culkovski P.M., Reismann H. The spherical sandwich shell under axisymmetric static and dynamic loading // J. Sound and Vibration. 1971. V. 14, № 2. P. 229–240.

3. Лизарев А.Д., Ростанина Н.Б. Уравнения свободных колебаний непологих трехслойных сферических оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 4. С. 142–148.

4. Сеницкий Ю.Э. Нестационарная задача динамики для трехслойной непологой сферической оболочки// Строительная механика и расчет сооружений. 1990. № 6. С. 55–61.

5. Сеницкий Ю.Э., Лычев С.А. Динамика трёхслойных сферических оболочек несимметричной структуры// Тр. XVIII Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 1997. Т. 1. С. 47–52.

6. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975. 210 с.

7. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.

8. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966. 136 с.



9. *Лычев С.А., Сайфутдинов Ю.Н.* Уравнения движения трехслойной вязкоупругой сферической оболочки // Вест. Самар. гос. ун-та. Естественно-научная сер. 2005. № 6(40). С. 70–88.
10. *Gurtin M.E.* Variational principles for linear initial-value problems // *Quart. Appl. Math.* 1964. № 22. P. 252–256.
11. *Gurtin M.E.* Variational principles for linear elastodynamics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 1964. V. 16, № 1. P. 34–50.
12. *Tonti E.* On the variational formulation for linear initial value problems // *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* 1973. V. 95, № 1. P. 231–259.
13. *Belli G., Morosi C.* A variational principle for the dynamic problem of linear coupled thermoelasticity // *Meccanica.* 1974. V. 9, № 4. P. 239–243.
14. *Manzhurov A.V., Lychev S.A.* Mathematical modeling of growth processes in nature and engineering: A variational approach // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2009. V. 181, 012018. 8 pp.
15. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
16. *Микушинский Я.* Операторное исчисление. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. 366 с.
17. *Пелех Б.Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наукова думка, 1973. 248 с.
18. *Кильчевский Н.А.* Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 253 с.
19. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек (Механика твердых деформируемых тел, т. 5). М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
20. *Kovalev V.A., Lychev S.A.* Nonstationary vibrations of 3-layered thermoviscoelastic thin-walled structures // *Proceedings of the XXXVII Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics».* St.Peterburg, 2009. P. 380–388.
21. *Kovalev V., Lychev S.* Nonsymmetric finite integral transformations and their application in thermoviscoelasticity // *Proceedings MATHMOD-09, Vienna. ARGESIM Reports № 35.* Vienna, 2009. P. 2604–2607.

УДК 621.165:539.4

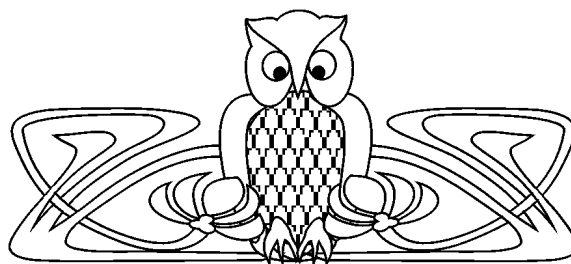
ОБОСНОВАНИЕ ВАРИАНТОВ РЕМОНТНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НАСАДНЫХ ДИСКОВ ТУРБИНЫ ПО ПАРАМЕТРАМ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

В.Н. Шлянников, Р.Р. Яруллин

Исследовательский центр проблем энергетики Казанского
научного центра РАН
E-mail: shlyannikov@mail.ru, yarullin_r@mail.ru

Рассмотрено напряженно-деформированное состояние (НДС) насадного диска ротора турбины ВТ-50 для эксплуатационных условий нагружения при воздействии контурной нагрузки и натяга от посадки диска на вал. В результате численного расчета в трехмерной упруго-пластической постановке определены основные высоконагруженные зоны диска. По параметрам НДС дана сравнительная оценка вариантов изменения геометрии диска за счет удаления поврежденного материала в области продольного шпоночного паз.

Ключевые слова: диск турбины, шпоночный паз, ремонтные технологии, напряженно-деформированное состояние, остаточная долговечность.



Repair Technology Basis of Turbine Disks by Using Stress-Strain State Parameters

V.N. Shlyannikov, R.R. Yarullin

Research Center of Power Engineering Problems of the Kazan
Science Center RAS
E-mail: shlyannikov@mail.ru, yarullin_r@mail.ru

Stress-strain state of power steam turbine disks under operation conditions including both contour and tighten loadings is considered. Full-size elastic-plastic stress-strain state analysis of turbine disk for different variants of considering key geometries is represented. As a result of numerical calculations three critical zones of turbine disk are defined. Proposed design modifications and repair technology to existing in-service power steam turbine disks by removing of damaged material volume are analyzed and substantiated on a stress state parameters basis.

Key words: turbine disk, key slot, repair technology, stress-strain state, lifetime.

Насадные диски сборного ротора паровой турбины являются сложными объемными телами, имеющими конструктивные концентраторы напряжений в виде шпоночных пазов, разгрузочных и крепежных отверстий, радиусных сопряжений и по своему назначению и условиям эксплуатации являются наиболее напряженными и ответственными элементами теплогенерирующего оборудования [1, 2]. В настоящее время значительная часть роторов паровых турбин близка к исчерпанию паркового ре-