



УДК 532.5:533.6.011.5

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЧИЗНЕЛЛА ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В.С. Кожанов, И.А. Чернов

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительного эксперимента в механике
E-mail: kozhanovvs@gmail.com, ChernovIA@info.sgu.ru

Обсуждается автомодельная задача о сходимости к центру сильной ударной волны. Предлагается приближенное аналитическое решение, совпадающее по форме с решением Чизнелла. Для определения автомодельных представителей скорости, плотности и квадрата скорости звука выписаны простые формулы. Показатель автомодельности находится из решения единственного алгебраического уравнения. Достижимые результаты находятся в улучшенном соответствии с точным решением классического численного метода.

Ключевые слова: одномерные течения, автомодельные течения.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование задачи о сходящейся ударной волне (УВ) занимало внимание многих ученых прошлого и современности. Во многом это связано с тем, что соответствующее явление имеет большую практическую значимость, поскольку представляет собой один из возможных способов кумуляции энергии. Среди большого числа публикаций особо следует выделить обзор [1], содержащий историю вопроса, анализ проблемы, основную библиографию и отчет о результатах, полученных в СССР.

В автомодельной постановке течение описывается системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые решаются численно. В связи с известной трудностью получения решения классическим способом возникло направление исследования проблемы — построение простых по форме приближенных аналитических решений. В настоящей статье, продолжающей ряд подобных работ [2–4], предлагается модифицированный вариант приближенного аналитического решения Чизнелла [2].

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Чтобы описать автомодельное течение жидкости с отношением удельных теплоемкостей γ за УВ в задаче о сходимости цилиндрической ($\nu = 2$) или сферической ($\nu = 3$) УВ, необходимо решить краевую задачу для системы трех ОДУ относительно трех функций $V = V(\xi)$, $G = G(\xi)$, $Z = Z(\xi)$:

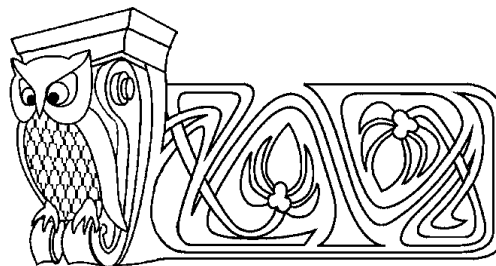
$$\xi \frac{dV}{d\xi} = \frac{\Delta_1(V, Z)}{\Delta(V, Z)}, \quad \frac{\xi}{G} \frac{dG}{d\xi} = \frac{\Delta_2(V, Z)}{\Delta(V, Z)}, \quad \xi \frac{dZ}{d\xi} = \frac{\Delta_3(V, Z)}{\Delta(V, Z)}, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -(\nu V - \varkappa)\Delta + (V - \alpha)Q(V), & \Delta_2 &= -\varkappa\Delta/(V - \alpha) - Q(V), \\ \Delta_3 &= -Z \{ [2(V - \alpha) - \varkappa]\Delta/(V - \alpha) + (\gamma - 1)Q(V) \}, \\ \Delta &= (V - \alpha)^2 - Z, & Q(V) &= (\nu - 1)V^2 + (1 - \nu\alpha - \varkappa)V + \varkappa\alpha, & \varkappa &= 2(1 - \alpha)/\gamma, \end{aligned}$$

с граничными условиями на поверхности УВ при $\xi = 1$:

$$V(1) = V_S = \frac{2\alpha}{\gamma + 1}, \quad G(1) = G_S = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad Z(1) = Z_S = \frac{2\gamma(\gamma - 1)\alpha^2}{(\gamma + 1)^2} \quad (1.2)$$



Modification for the Chisnell's Method of Approximate Analytic Solution of the Converging Shock Wave Problem

V.S. Kozhanov, I.A. Chernov

Saratov State University,
Chair of Mechanics Computational Experiment
E-mail: kozhanovvs@gmail.com, ChernovIA@info.sgu.ru

The self-similar problem about a convergence to the centre of a strong shock wave is discussed. The approximate analytical solution which has the same form as the Chisnell's solution is proposed. The simple expressions for definition of self-similar representatives of the velocity, density and square of the sound speed are written down. The self similar exponent is determined by solving the algebraic equation. The achieved results correlate better with the exact solution of the classical numerical method.

Key words: one-dimensional flows, self-similar flows.



и вдали от УВ при $\xi \rightarrow \infty$:

$$V(\infty) = 0, \quad Z(\infty) = 0. \quad (1.3)$$

Основные и автомодельные переменные связаны соотношениями

$$u = rt^{-1}V(\xi), \quad \rho = \rho_0 G(\xi), \quad c^2 = r^2 t^{-2} Z(\xi), \quad \xi = A_0^{-1} r (-t)^{-\alpha}, \quad A_0 = \text{const},$$

где время t и координата r – независимые размерные переменные, ξ – независимая автомодельная переменная, а V , G и Z – автомодельные представители скорости жидкой частицы u , плотности ρ и квадрата скорости звука c^2 соответственно.

Так как независимая переменная ξ входит в (1.1) лишь как коэффициент при производных, а искомая переменная G не встречается в функциях Δ , Δ_i ($i = 1, \dots, 3$), то система (1.1) может быть сведена к одному ОДУ

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \quad (1.4)$$

и двум квадратурам

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dV} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dV} = \frac{\Delta}{\Delta_1}. \quad (1.5)$$

Решение поставленной задачи будет аналитическим, если функции V , G и Z будут аналитическими во всей области течения, в том числе и на предельной характеристике, которая ограничивает область влияния течения за УВ на УВ. В рассматриваемой задаче предельная характеристика представляет собой звуковую волну, приходящую в центр схлопывания вместе с УВ. Аналитичность на предельной характеристике достигается подбором показателя автомодельности α , к определению которого сводится первый этап решения. На плоскости OVZ данное требование означает, что интегральная кривая ОДУ (1.4), соединяющая точки $S(V_S, Z_S)$ и $O(0, 0)$, должна проходить правильным образом [1] через особую точку $A(V_A, Z_A)$ этого уравнения с координатами

$$V_A = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(\nu - 1)\varkappa\alpha}}{2(\nu - 1)}, \quad Z_A = (V_A - \alpha)^2, \quad \text{где } b = 1 - \nu\alpha - \varkappa.$$

При этом точки S и O отвечают соответственно условиям (1.2) и (1.3), а точка A является образом предельной характеристики.

2. МЕТОД ЧИЗНЕЛЛА

Метод Чизнелла по своей структуре напоминает метод последовательных приближений, в котором автор задает некоторое начальное приближение для решения уравнения (1.4) и затем получает первое приближение. Уравнение (1.4) и квадратуры (1.5) разрешены относительно производных и содержат в своих правых частях функцию $Z(V)$. Для успешного интегрирования (1.4), (1.5) необходимо выбрать начальное приближение для $Z(V)$. Автор принимает во внимание поведение интегральной кривой уравнения (1.4), описывающей решение на плоскости OVZ . Выделяются следующие особенности функции $Z = Z(V)$:

1. Вблизи начала координат O интегральная кривая может быть аппроксимирована параболой вида $Z = A_2 V^2$;
2. При $V \rightarrow \infty$ функция $Z = Z(V)$ остается конечной;
3. В точке пересечения $A(V_A, Z_A)$ интегральной кривой с параболой $\Delta = 0$ функция $Z = Z(V)$ принимает значение $(V_A - \alpha)^2$.

С учетом указанных особенностей предлагается начальное приближение (приближение Чизнелла):

$$Z_T(V) = \lambda V^2, \quad \lambda = \left(\frac{\alpha}{V_A} - 1 \right)^2. \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в систему (1.4), (1.5) упрощает последнюю и дает возможность ее проинтегрировать. Решение упрощенной системы (1.4), (1.5), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), имеет вид [2]



$$\xi = \left(\frac{V_S}{V}\right)^\alpha \left(\frac{V+q}{V_S+q}\right)^F, \quad \frac{G}{G_S} = \left(\frac{V-\alpha}{V_S-\alpha}\right)^\eta \left(\frac{V+q}{V_S+q}\right)^D,$$

$$\frac{Z}{Z_S} = \left(\frac{V}{V_S}\right)^2 \left(\frac{V_S-\alpha}{V-\alpha}\right)^\eta \left(\frac{V+q}{V_S+q}\right)^B, \quad \eta = \frac{\varkappa}{\nu\alpha - \varkappa}, \quad (2.2)$$

$$q = -\frac{\alpha}{(1-\nu\lambda)V_A}, \quad F = \alpha - \frac{1-\lambda}{1-\nu\lambda}, \quad D = \frac{\nu-1}{1-\nu\lambda} - \eta, \quad B = \eta + \frac{(\nu-1)(2\lambda+\gamma-1)}{1-\nu\lambda}.$$

Для приближенного вычисления значения показателя автомодельности α получается нелинейное алгебраическое уравнение:

$$Z_S \left(\frac{V_A}{V_S}\right)^2 \frac{(V_S-\alpha)^\eta}{(V_A-\alpha)^{\eta+2}} \left(\frac{V_A+q}{V_S+q}\right)^B - 1 = 0. \quad (2.3)$$

Таким образом, система (2.2), представляющая простую аналитическую зависимость для определения поля течения, вместе с уравнением (2.3), обеспечивающим достаточно высокую точность определения α , составляют приближенное решение Чизнелла автомодельной задачи о сходящейся УВ.

3. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА

Предлагаемый вариант модификации заключается в замене приближения Чизнелла (2.1) на более общую функцию $Z_{TM}(V)$:

$$Z_{TM}(V) = LV^2 + MV, \quad (3.1)$$

$$L = l \left(\frac{\alpha}{V_A} - 1\right)^2 - (1-l) \left(\frac{\alpha}{V_A} - 1\right) + m, \quad M = (1-l) \left(\frac{\alpha}{V_A} - 1\right) \alpha - mV_A.$$

Этот выбор обусловлен следующими факторами:

1. Пробная функция $Z_{TM}(V)$ обладает особенностями 2–3, как и (2.1).
2. При ее использовании приближенное решение Чизнелла (2.2), (2.3) сохраняет свою форму, за исключением того что λ необходимо заменить параметром L . При этом выполняется особенность 1 из (2.1).
3. Она содержит два дополнительных параметра l и m , подбирая которые можно добиться того, что значение показателя автомодельности, определяемое решением нелинейного алгебраического уравнения (2.3) (с учетом замены λ на L), будет в точности равно значению α , полученному при решении исходной автомодельной задачи.

Стоит отметить, что функция (3.1) совпадает с функцией Чизнелла при $l = 1$, $m = 0$.

С целью упрощения демонстрации модификации положим свободный параметр l равным единице, то есть будем рассматривать функцию вида

$$Z_{TM}(V) = LV^2 + MV, \quad L = \left(\frac{\alpha}{V_A} - 1\right)^2 + m = \lambda + m, \quad M = -mV_A.$$

Подбором параметра m , зависящего от γ , при вычислении α достигается точный результат. Однако вычислительная сложность определения точного значения m для каждого конкретного значения показателя адиабаты γ сравнима со сложностью определения показателя автомодельности классическим методом. Компромиссом между точностью и простотой вычисления α в данном случае может стать построение приближенной зависимости $m^* = m^*(\gamma)$.

Ниже представлены результаты расчетов для случая, когда особая точка $A(V_A, Z_A)$ является седлом. Для $\nu = 2$ это значения γ из интервала (1, 1.9092), а для $\nu = 3$ – из интервала (1, 1.8698).

Приближенные зависимости $m^* = m^*(\gamma)$ для цилиндрически и сферически симметричной УВ на установленных интервалах значений предлагаются соответственно в виде дробей

$$m^* = \frac{1.199120382\gamma^3 - 5.171869219\gamma^2 + 7.100023713\gamma - 3.124935193}{6.541863903\gamma^3 - 9.885263855\gamma^2 + 14.012323675\gamma - 9.312901503}, \quad (3.2)$$



$$m^* = \frac{1.464857537\gamma^3 - 6.166787640\gamma^2 + 8.329615338\gamma - 3.625092501}{9.649876905\gamma^3 - 26.960850085\gamma^2 + 32.979852058\gamma - 14.628528093} \quad (3.3)$$

Опишем технику построения аппроксимационных формул. Для оценки точности получаемых приближений был сформирован набор контрольных точек $P_i(\bar{\gamma}_i, \bar{\alpha}_i)$. Интервал $(1, \gamma_n)$ ($\gamma_n = 1.9092$ для $\nu = 2$ и $\gamma_n = 1.8698$ для $\nu = 3$) разбивался на семь непересекающихся интервалов с учетом особенностей поведения функции $m = m(\gamma)$. В каждом интервале выбиралось по одному базовому значению γ_k и вычислялись соответствующие им точные значения m_k , т.е. формировался набор точек $Q_k(\gamma_k, m_k)$. По точкам Q_k с применением интерполяционных формул Тиле [5] строилась функция $m^* = m^*(\gamma)$, приближенно описывающая точную зависимость $m = m(\gamma)$. Затем вычислялась сумма модулей относительных ошибок

$$\varepsilon^* = \sum_i \frac{|\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i^*|}{\bar{\alpha}_i},$$

где $\bar{\alpha}_i^*$ — значения показателя автомодельности, вычисленные в точках $\bar{\gamma}_i$ по модифицированному методу Чизнелла, в котором параметр m определялся по построенной приближенной формуле.

После этого была осуществлена серия попыток, в каждой из которых сначала базовым значениям γ_k давались некоторые вариации, а затем выполнялись действия описанной выше техники, завершавшиеся вычислением ε^* . Попытки повторялись до момента, когда значение величины ε^* достигло удовлетворительного минимума (порядка $0.5 \cdot 10^{-7}$).

Окончательные наборы точек Q_k , по которым были построены аппроксимационные формулы (3.2) и (3.3), сведены в табл. 1.

Таблица 1

Наборы значений γ_k, m_k для построения аппроксимационных формул

k	$\nu = 2$		$\nu = 3$	
	γ_k	m_k	γ_k	m_k
1	1.0509	0.0078636967	1.0572	0.0128833922
2	1.0879	0.0083152797	1.0962	0.0136436874
3	1.2966	0.0000011031	1.1978	0.0078705063
4	1.3752	-0.0028139320	1.3656	-0.0042283072
5	1.6108	-0.0064087003	1.5643	-0.0098524422
6	1.7700	-0.0053588629	1.6199	-0.0096322112
7	1.8396	-0.0042526245	1.7623	-0.0064084722

В табл. 2 и 3 (для $\nu = 2$ и $\nu = 3$ соответственно) приведены значения показателя автомодельности α , вычисленные как по оригинальному методу Чизнелла (α_1), так и по предлагаемой модификации (α_2) для нескольких значений γ .

Таблица 2

Сравнение значений показателей автомодельности для цилиндрической УВ

γ	α	α_1	α_2
1.1	0.8852480723	0.8852825823	0.8852480654
1.2	0.8611630239	0.8611745653	0.8611630239
9/7	0.8480493392	0.8480501854	0.8480493394
1.3	0.8462231749	0.8462229326	0.8462231749
7/5	0.8353231920	0.8353189815	0.8353231921
1.5	0.8267475092	0.8267430954	0.8267475097
1.6	0.8196996238	0.8196964235	0.8196996238
5/3	0.8156249014	0.8156226780	0.8156249013
1.7	0.8137404282	0.8137386666	0.8137404281
1.8	0.8085999338	0.8085992942	0.8085999338
1.9	0.8040990811	0.8040990522	0.8040990811

Примечание. Цифры меньшего размера указывают на различие между приближенным и точным значениями α .



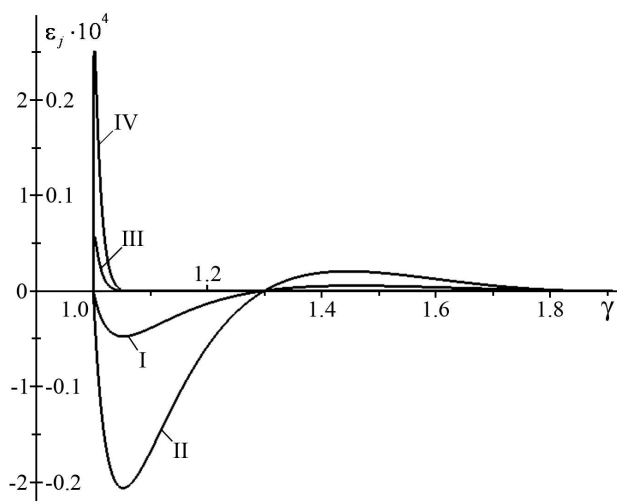
Таблица 3

Сравнение значений показателей автомодельности для сферической УВ

γ	α	α_1	α_2
1.1	0.7959697783	0.7961041193	0.7959697758
1.2	0.7571418148	0.7571858675	0.7571418141
9/7	0.7365975008	0.7366012865	0.7365974878
1.3	0.7337767349	0.7337765649	0.7337767234
7/5	0.7171745015	0.7171607264	0.7171745056
1.5	0.7044280717	0.7044145907	0.7044280746
1.6	0.6941895155	0.6941808339	0.6941895152
5/3	0.6883768229	0.6883714921	0.6883768239
1.7	0.6857165215	0.6857126448	0.6857165229
1.8	0.6785536857	0.6785528439	0.6785536840

Примечание. Цифры меньшего размера указывают на различие между приближенным и точным значениями α .

Графики относительных погрешностей $\varepsilon_j = (\alpha - \alpha_j)/\alpha$ ($j = 1, 2$) вычисления значений показателя автомодельности с помощью обсуждаемых приближенных методов показаны на рисунке. Ось ординат надлена двойной разметкой. Относительную погрешность метода Чизнелла (кривые I и II соответственно для $\nu = 2$ и $\nu = 3$) необходимо соотносить со шкалой слева от оси ординат, а относительную погрешность модифицированного метода Чизнелла (кривые III и IV соответственно для $\nu = 2$ и $\nu = 3$) — со шкалой справа.



Погрешность определялась по сравнению со значением α , вычисляемым классическим способом.

В наибольшей степени эффективность модификации проявляется на интервалах значений γ (1.1, 1.9092) для $\nu = 2$ и (1.1, 1.8698) для $\nu = 3$. В этих интервалах максимальная относительная погрешность вычисления α_2 не превышает $0.117 \cdot 10^{-7}$ и $0.186 \cdot 10^{-7}$ соответственно (см. табл. 2, 3). Относительная погрешность вычисления α_2 для $\gamma \in (1, 1.1]$ для обеих симметрий видна на рисунке.

С другими способами приближенного аналитического решения задачи о сходящейся УВ можно ознакомиться в [3, 4]. В [6] представлено модифицированное решение работы [3], основанное на идее, которая описана в этой статье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку в предлагаемой модификации использовались интерполяционные зависимости при описании коэффициента $m = m(\gamma)$, то это определило ограничение на размер интервала $\gamma \in (1, \gamma_n)$. Желание расширить его связано с повышением порядка интерполяции. Есть и другая, более существенная трудность: неединственность α при значениях $\gamma > \gamma_n$, о чем подробно рассказано в [1].

Библиографический список

1. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // УМН. 1963. Т. 18, вып. 2 (110). С. 3–23.
2. Chisnell R.F. An analytic description of converging shock waves // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 354. P. 357–375.
3. Сапунков Я.Г. Приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 145–147.
4. Grinenko A., Gurovich V.Tz., Krasik Ya.E. Semiana-



lytical solution of the problem of converging shock waves // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99. A. 124503.

5. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. М.: Наука, 1983. 314 с.

6. Кожанов В.С. Модификация метода Сапункова решения задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 126–128.

УДК 539.3

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ В РЯД ПО МОДАМ

Л.Ю.Коссович¹, В.А.Юрко², И.В.Кириллова³

Саратовский государственный университет,

¹кафедра математической теории упругости и биомеханики,

²кафедра математической физики и вычислительной математики,

³Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем

E-mail: ¹rector@sgu.ru, ²yurkova@info.sgu.ru, ³nano-bio@sgu.ru

Рассматриваются колебания полосы в рамках плоской задачи теории упругости. Приведено описание мод колебаний. Изучены свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи для их амплитуд. Построена функция Грина, являющаяся ядром обратного оператора краевой задачи. Доказаны полнота собственных функций и теоремы о разложении, позволяющие решать задачи для полубесконечных или конечных пластин при произвольных видах граничных условий.

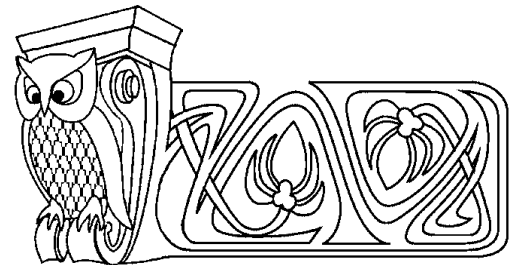
Ключевые слова: теория упругости, волновые процессы, моды колебаний, собственные значения, собственные функции, асимптотика.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамического напряженно-деформированного состояния бесконечных, полубесконечных и конечных пластин в рамках трёхмерной теории упругости имеет важное значение как для непосредственно практических целей, так и в качестве модельного примера, необходимого для поиска путей анализа колебаний и волновых процессов в оболочечных конструкциях произвольной геометрии. Подробный анализ свойств волновых процессов и используемых приближённых теорий проведен в работах [1–3]. Указанный анализ послужил основой для разработки асимптотической теории колебаний и нестационарных волн в тонких оболочках [4–6].

В нестационарных задачах для бесконечной или полубесконечной полосы основным аналитическим методом исследования является использование двухкратных интегральных преобразований – Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. При этом в краевых задачах в случае заданных торцевых воздействий применение интегрального преобразования Фурье ограничено теми случаями граничных условий [1, 2], когда интегральным преобразованиям требуется только информация об искомым величинах на границах. В работе [7] была предложена методика для случаев, когда в поперечном сечении заданы либо перемещения, либо напряжения. Рассматривались два парных интегральных уравнения для торцевых неизвестных (перемещений или напряжений).

Отметим, что на первом этапе обращение двойных интегральных изображений производится с помощью теории вычетов, и решение в конечном итоге представляется в виде разложения по несобственным интегралам от мод колебаний. Таким образом, разложение по модам нужно уметь строить в общем случае граничных условий, а для этого требуется исследовать свойства задач на собственные функции и собственные значения. Эта задача и решается в представленной работе. Она имеет не только прикладное значение для исследования нестационарных волн, но и самостоятельное для изучения собственных и вынужденных колебаний пластины.



Mode-Series Expansion of Solutions of Elasticity Problems for a Strip

L.Yu. Kossovich¹, V.A. Yurko², I.V. Kirillova³

Saratov State University,

¹Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics;

²Chair of Mathematical Physics and Numerical Analysis;

³Educational-Research Institute of Nanostructures and Biosystems

E-mail: ¹rector@sgu.ru, ²yurkova@sgu.ru, ³nano-bio@sgu.ru

Oscillations of a strip are considered as a plane problem of elasticity theory. Description of oscillation modes is provided. Properties of eigenvalues and eigenfunctions are studied for a boundary value problem for their amplitudes. Green's function is constructed as a kernel of the inverse operator. Completeness and expansion theorems are proved which allow one to solve problems for finite and infinite membranes under arbitrary boundary conditions.

Key words: elasticity theory, wave propagation, oscillation modes, eigenvalues, eigenfunctions.