



index for surgical treatment of intracranial aneurysms // J. of Neurosurgery. 1989. V. 45. P. 119–129.

32. Sforza D., Putman C., Cebal J. Hemodynamics of cerebral aneurysms // Annu. Rev. Fluid Mech. 2009. V. 41. P. 91–107.

33. Tateshima S. et al. Three-dimensional blood flow analysis in a wide-necked internal carotid artery-

ophthalmic artery aneurysm // J. Of Neurosurgery. 2003. V. 99. P. 526–533.

34. Torii R. et al. Fluid-structure interaction modeling of aneurismal conditions with high and normal blood pressures // Computational Mechanics. 2006. V. 38. P. 482–490.

УДК 532.5: 533.6.011.5

## РАСЧЕТ ОТРАЖЕННЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ О СХЛОПЫВАНИИ ПУСТОЙ ПОЛОСТИ

В.С. Кожанов

Саратовский государственный университет,  
кафедра вычислительного эксперимента в механике  
E-mail: kozhanovvs@gmail.com

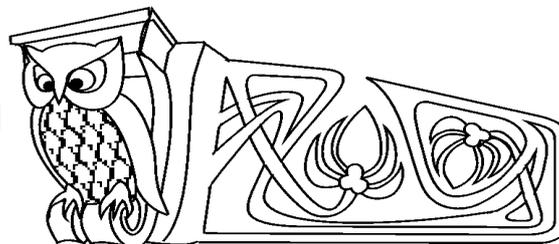
Рассматривается автомоделная задача о захлопывании пустой цилиндрической или сферической полости в сжимаемой жидкости с отношением удельных теплоемкостей  $\gamma$ . Обсуждаются два возможных варианта течения после схлопывания, связанные с поведением энтропии при переходе через отраженную ударную волну. Проведенные расчеты показывают, что основные отличия в поведении параметров течения на стадии отражения носят количественный характер. Степень сжатия отраженной ударной волны, характеризуемая отношением  $\rho_2/\rho_1$ , убывает при увеличении  $\gamma$  для обоих вариантов отражения.

**Ключевые слова:** одномерные течения, автомоделные течения, гомэнтропические течения, кавитация, пузырек, отраженная ударная волна.

### ВВЕДЕНИЕ

Существует большой класс важных и интересных задач, в которых рассматриваются разнообразные сходящиеся течения. К нему относятся, например, задача о сжатии ударной волны (УВ), задача о сжатии газа, задача о коллапсе оболочки и др. В данной работе рассмотрены одномерные автомоделные режимы схлопывания пустой полости для случаев сферической и цилиндрической симметрии в сжимаемой жидкости. Основное внимание направлено на изучение течения после схлопывания.

Интерес к классическим работам [1, 2] связан с публикацией [3]. Ее авторы заявляют об осуществлении эксперимента, в котором, возможно, наблюдались признаки термоядерных реакций внутри схлопывающихся пузырьков газа в жидкости. Выполненный эксперимент напоминает опыты по изучению сонолюминисценции. Ультразвук с частотой 19.3 кГц воздействовал на жидкий ацетон, в котором атомы водорода были замещены на атомы дейтерия. Синхронно с ультразвуком ацетон  $C_3D_6O$  облучался импульсами высокоэнергетических нейтронов, что является новым элементом по сравнению с предшествующими экспериментами. Нейтроны инициировали зарождение в жидкости очень маленьких пузырьков, которые росли до относительно больших размеров и затем интенсивно схлопывались под действием ультразвука. О термоядерных реакциях свидетельствовало появление трития и нейтронов с энергиями 2.5 МэВ, которые должны сопутствовать синтезу трития из атомов дейтерия. Результат эксперимента стал большой неожиданностью, так как, согласно расчетам, при схлопывании пузырьков не может достигаться температура более 11000 К, а для термоядерного синтеза необходима температура на 2–3 порядка выше. По этой причине многие специалисты сомневаются в корректности



### Calculation of Outgoing Shock Waves in The Empty Cavity Collapse Problem

V.S. Kozhanov

Saratov State University,  
Chair of Computational Experiment in Mechanics  
E-mail: kozhanovvs@gmail.com

The self-similar problem about a collapse of an empty cylindrical or spherical cavity in compressible fluid with adiabatic exponent  $\gamma$  is considered. Two possible variants of the flow after collapse are discussed. The variants are connected with the entropy behavior through the outgoing shock. The calculations show that the main difference in the flow quantities behavior at reflection stage have a quantitative character. Outgoing shock compression ratio, characterized by relation  $\rho_2/\rho_1$ , decreases for both variants of the reflection when  $\gamma$  is increase.

**Key words:** one-dimensional flows, self-similar flows, homentropic flows, cavitation, bubble, outgoing shock, reflected shock.



произведенных измерений. Важно отметить, что если результаты авторов [3] подтвердятся, то они будут иметь важное фундаментальное значение и могут найти практическое применение.

Одно из наиболее ранних теоретических исследований было проведено в 1917 году Рэлеем [4], который рассмотрел схлопывание пустой сферической полости. В частности, им было получено уравнение движения границы полости. Вычисленные по этой формуле значения хорошо согласовывались с экспериментальными данными, но только до тех пор, пока радиус схлопывающейся полости не становился много меньше ее начального радиуса. На этой последней стадии подробное наблюдение процесса становится крайне затруднительным, так как в это время полость очень мала, а процесс происходит чрезвычайно быстро. Уравнение, полученное Рэлеем, приводит к некоторым физически нереальным особенностям, связанным с этой быстро протекающей конечной стадией схлопывания, что свидетельствует о неприменимости его на этой стадии движения. Например, из решения уравнения следует, что давление бесконечно на конечном расстоянии от центра схлопывания, когда полость уже схлопнулась. Это связано с тем, что на последней стадии становятся существенными некоторые физические процессы, которые не учитывались Рэлеем в его теоретическом анализе. Однако он сам указал на то, что при больших скоростях жидкости, которые развиваются при схлопывании полости, следует учитывать эффект сжимаемости.

В настоящей статье исследуется течение после схлопывания, включающее возникновение отраженной УВ и распространение этой УВ навстречу набегающему на нее потоку. Рассматриваются два режима течения после схлопывания, связанные с поведением энтропии.

1. Энтропия при переходе через отраженную УВ возрастает скачком до некоторого конечного значения и далее остается постоянной во всей области течения за УВ;
2. Энтропия при переходе через отраженную УВ не меняется и во всей области течения за УВ остается равной своему первоначальному значению.

Модель течения после схлопывания, учитывающую первый/второй варианты поведения энтропии будем называть первой/второй моделью отражения.

Предполагается, что объекты, имеющие отношение к первой/второй модели отражения, наделены соответственно индексами I и II.

Хантер в своей статье [1] описал и построил автомодельное решение для течения после схлопывания в случае сферической симметрии для единственного значения  $\gamma = 7$ . При этом он использовал вторую модель отражения, предполагая, что между плотностью  $\rho$  и давлением  $p$  справедливо единственное соотношение во всей области течения.

В работах [5, 6] при расчете стадии отражения используется другой подход. Полагается, что отраженная УВ обеспечивает скачкообразный рост энтропии. В отчете [5] расчет выполнен при значении  $\gamma = 3$  для случая сферически симметричного потока. Стоит отметить, что авторы [5] наряду со значением положения ударного перехода, дают некоторые гидродинамические характеристики УВ: коэффициент сжатия и отношение энтропий.

Статью Лазаруса [6] саму по себе можно считать новаторской, так как она представляет собой успешную попытку объединить в рамках одной постановки две задачи со сходящимися течениями: задачу о схождении УВ и задачу о схлопывании полости. В работе [6] расширяются результаты, данные в работе [5], на случай двух симметрий (цилиндрической и сферической) и большого числа значений показателя адиабаты  $\gamma$ . Однако среди параметров, характеризующих течение после схлопывания, фигурирует *только* положение отраженной УВ.

Целью данной работы является уточнение и обобщение результатов [1, 5, 6], касающихся течения после схлопывания. Основное внимание направлено на расчет таких гидродинамических параметров, характеризующих отраженную УВ и поток за ней, как коэффициент сжатия, перепад давлений, отношение энтропий, число Маха за УВ. Проводится сравнение зависимостей (от  $\gamma$ ) перечисленных параметров для двух моделей отражения. Результаты представлены для случая сферически симметричного течения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Чтобы описать процесс схлопывания пустой цилиндрической ( $\nu = 2$ ) или сферической ( $\nu = 3$ ) полости в среде с отношением удельных теплоемкостей  $\gamma$ , необходимо решить уравнения неразрывности



и сохранения количества движения:

$$\frac{\partial c^2}{\partial t} + u \frac{\partial c^2}{\partial r} + (\gamma - 1)c^2 \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{u}{r} \right] = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{\partial c^2}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $r$  — координата,  $u = u(r, t)$  — скорость частицы жидкости,  $c^2 = c^2(r, t)$  — квадрат скорости звука.

Уравнение сохранения энтропии не используется, так как движение среды является *гомэнтропической*. Свойство гомэнтропии означает, что энтропийная функция

$$s = \frac{p}{\rho^\gamma} \quad (2)$$

сохраняет свое значение не только вдоль траектории частицы, но и во всей области течения (для всех траекторий).

Плотность среды  $\rho = \rho(r, t)$  связана с квадратом скорости звука уравнением

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}. \quad (3)$$

Граничные условия на границе полости имеют вид

$$\text{при } r = R_c: \quad u = \dot{R}_c, \quad c^2 = 1, \quad (4)$$

где  $r = R_c(t)$  — уравнение движения границы.

На рис. 1 изображена плоскость  $rt$ , которая представляет собой картину рассматриваемого двухстадийного процесса схлопывания-отражения в окрестности центра фокусировки.

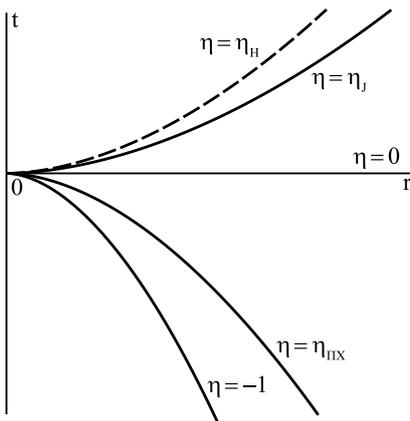


Рис. 1. Плоскость  $rt$

Задача допускает автомодельное решение, которое будем искать в форме

$$u = -Anr^{1-1/n}F(\eta), \quad c^2 = A^2n^2r^{2-2/n}G(\eta), \quad (5)$$

$$\eta = At/r^{1/n}, \quad A = \text{const.}$$

Здесь  $\eta$  — независимая автомодельная переменная, а  $F = F(\eta)$  и  $G = G(\eta)$  — автомодельные представители (по  $r$ ) скорости частицы жидкости  $u$  и квадрата скорости звука  $c^2$  соответственно,  $n$  — показатель автомодельности. Они описывают поведение  $u$  и  $c^2$  при фиксированном  $r$  в зависимости от  $t$ .

Подставляя (5) в (1) и разрешая полученные уравнения относительно производных, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно функций  $F$  и  $G$ :

$$\frac{dF}{d\eta} = \frac{1}{(\gamma - 1)\eta} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad \frac{dG}{d\eta} = \frac{G}{1 + \eta F} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \quad (6)$$

$$\Delta_1 = (\gamma - 1)(\nu n - 1)F\Delta_0 - \Delta_5, \quad \Delta_2 = -2(1 - n)F\Delta_0 + \Delta_5, \quad \Delta_0 = (1 + \eta F)^2 - \eta^2 G,$$

$$\Delta_5 = (\gamma - 1)(1 + \eta F) [(\nu - 1)n\eta F + \nu n - 1] F + 2(1 - n)\eta G.$$

Граничное условие (4) в автомодельных переменных принимает вид

$$\text{при } \eta = -1: \quad F(-1) = 1, \quad G(-1) = 0. \quad (7)$$

Требование ограниченности  $u$  и  $c^2$  при  $r \rightarrow +\infty$  налагает на  $F$  и  $G$  условие [1]

$$\text{при } \eta = 0: \quad (-\eta)^{1-n}F(\eta) = 0, \quad (-\eta)^{2-2n}G(\eta) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, чтобы получить решение автомодельной задачи о схлопывании пустой полости для стадии схлопывания, необходимо решить краевую задачу для системы ОДУ (6) с граничными условиями (7) на границе полости и (8) на бесконечности.



Решение поставленной задачи будет аналитическим, если функции  $F$  и  $G$  будут аналитическими во всей области течения, в том числе и на предельной характеристике, которая ограничивает область влияния течения на границу полости (свободную поверхность). В рассматриваемой задаче предельная характеристика представляет собой звуковую волну, приходящую в центр схлопывания вместе с границей полости. Аналитичность на предельной характеристике достигается подбором показателя автомодельности  $n$ , к определению которого сводится первый этап решения.

Исследование задачи на фазовой плоскости переменных  $V = -\eta F(\eta)$ ,  $Z = \eta^2 G(\eta)$  (рис. 2) сводится к изучению поведения интегральных кривых одного нелинейного ОДУ

$$\frac{dZ}{dV} = (\gamma - 1)Z \frac{\bar{\Delta}_2}{\bar{\Delta}_1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1 &= [(\gamma - 1)\nu n V - 2(1 - n)] \bar{\Delta}_0 + (1 - V)\bar{\Delta}_5, & \bar{\Delta}_2 &= 2n\bar{\Delta}_0 + \bar{\Delta}_5, & \bar{\Delta}_0 &= (1 - V)^2 - Z, \\ \bar{\Delta}_5 &= (\gamma - 1)(\nu - 1)nV^2 - [(\gamma - 1)(\nu n - 1) + 2(1 - n)]V + 2(1 - n). \end{aligned}$$

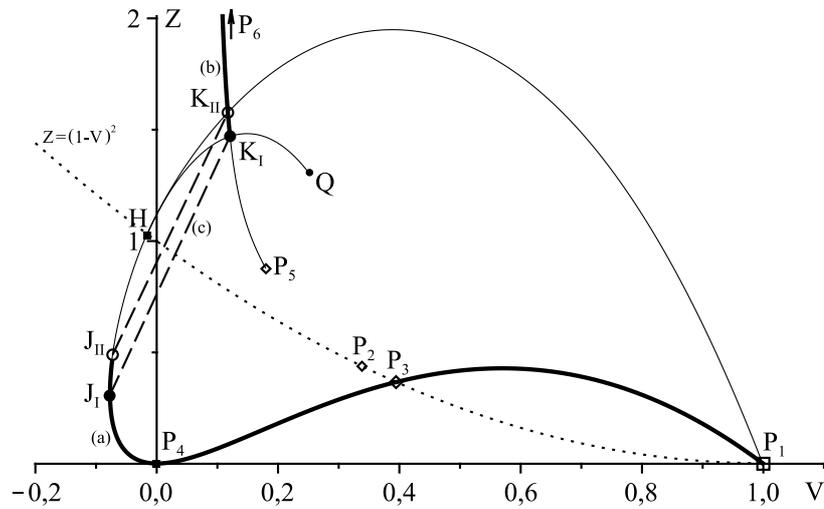


Рис. 2. Фазовая плоскость  $VZ$

Уравнение (9) в общем случае имеет шесть особых точек в конечной части плоскости. Перечислим их:

- 1) точка  $P_1$ :  $V = 1$ ,  $Z = 0$ ;
- 2) точка  $P_4$ :  $V = 0$ ,  $Z = 0$ ;
- 3) точка  $P_5$ :  $V = \frac{2}{(a+2)n}$ ,  $Z = \frac{(\gamma-1)a}{(a+2)^2 n^2}$ , где  $a = (\gamma-1)\nu$ ;
- 4-5) точки  $P_2$  и  $P_3$ :

$$\begin{aligned} V &= \left( -B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4B_2 B_0} \right) / (2B_2), & Z &= (1 - V)^2, \\ B_1 &= b + 2d, & B_2 &= b + (\gamma - 1)d, & B_0 &= 2d, & b &= (\gamma - 1)(\nu n - 1), & d &= 1 - n. \end{aligned}$$

Эти точки являются образами предельной характеристики. Присвоим обозначение  $P_2$  точке с меньшим значением переменной  $V$ ;

- 6) точка с координатами  $V = 1/n$ ,  $Z = 0$ . Эта точка не участвует в решении.

Кроме того, для построения решения на стадии отражения существенную роль играет бесконечно удаленная особая точка

$$P_6: \quad V = \frac{2(1-n)}{(\gamma-1)\nu n}, \quad Z = +\infty. \quad (10)$$

Подробный качественный анализ ОДУ (9) и перечисленных особых точек выполнен в работах [2, 6].

Граничным условиям (7), (8) отвечают соответственно точки фазовой плоскости  $P_1$  и  $P_4$ .

В настоящей работе рассматривается решение задачи, когда полость обладает цилиндрической или сферической симметрией для двух [2, 6] интервалов значений показателя адиабаты:  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$



и  $\gamma_2 < \gamma$ . В этих диапазонах существует так называемое *физическое* решение задачи. Это решение характеризуется тем, что при требуемом значении показателя автомодельности  $n$  интегральная кривая уравнения (9), соединяющая точки  $P_1$  и  $P_4$ , проходит через узел  $P_3$ , если  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ , или узел  $P_2$ , если  $\gamma_2 < \gamma$ , вдоль *уса отдельного направления*.

Величины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются трансцендентными числами и определяются численно. Их значения

Таблица 1 приведены в табл. 1.

Значения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  для двух симметрий течения

$\nu$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
2	2.9776	16.8693
3	2.4056	8.4635

Для каждого конкретного набора параметров  $(\nu, \gamma)$  показатель  $n$  выбирается из некоторого промежутка  $[n_{\min}, n_{\max}]$ . В этом случае точки  $P_2$  и  $P_3$  будут узлами. При  $n_{\min} = n_{\max}$  точки  $P_2$  и  $P_3$  совпадают.

Метод определения показателя автомодельности заключается в отыскании интегральной кривой уравнения (9), которая при искомом  $n$  выйдет нужным образом из особой точки  $P_3$  (если  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ ) или  $P_2$  (если  $\gamma_2 < \gamma$ ) и попадет в особую точку  $P_1$ , т.е. будет второй сепаратрисой седла  $P_1$  и, следовательно, решением. Чтобы определить нужный показатель автомодельности будем численно интегрировать уравнение (9), выбирая  $n$  из интервала приемлемых значений  $[n_{\min}, n_{\max}]$ , соответствующих заданному набору параметров  $(\nu, \gamma)$ . Координаты особой точки, из которой выходит интегральная кривая, брать в качестве начальных условий интегрирования нельзя. В малой окрестности особой точки решение можно представить в виде ряда

$$Z = Z^* + r_i \delta^i, \quad V = V^* + \delta, \quad \delta \ll 1, \quad (11)$$

где  $(V^*, Z^*)$  — координаты одной из особых точек  $P_2, P_3$  (той, которая участвует в решении).

Определив коэффициенты  $r_i$  и задав  $\delta$ , получаем начальные условия интегрирования.

Обозначим  $n_c$  некоторое текущее значение показателя автомодельности. Установлено, что если  $n < n_c < n_{\max}$ , то получаемая интегральная кривая проходит слева от искомой интегральной кривой. Если же  $n_{\min} < n_c < n$ , то получаемая интегральная кривая отклоняется вправо. Эти закономерности служат ориентирами при поиске требуемого  $n$ .

Вычисления необязательно вести на фазовой плоскости  $VZ$ . Описанный метод можно перенести на систему ОДУ (6) и исследовать поведение ее решения в зависимости от  $n$ . Для системы ОДУ (6) определение искомого значения  $n$  означает возможность аналитического прохода функций  $F, G$  через предельную характеристику (образами которой являются особые точки  $P_2$  и  $P_3$  на плоскости  $VZ$ ). Условие на границе полости  $\eta = -1$  при этом также выполняется (это соответствует приходу интегральной кривой в седло  $P_1$  на плоскости  $VZ$ ). Аналогично, чтобы определить нужный показатель автомодельности, будем численно интегрировать систему ОДУ (6), выбирая  $n$  из интервала приемлемых значений  $[n_{\min}, n_{\max}]$ , соответствующих заданному набору параметров  $(\nu, \gamma)$ . Начальные условия находятся из тех же соображений, что и (11).

## 2. ТЕЧЕНИЕ ПОСЛЕ СХЛОПЫВАНИЯ

В настоящей работе рассматриваются две модели отражения. Для обеих моделей справедливо описание, которое представлено ниже.

Стадия схлопывания завершается фокусировкой полости в центре в момент времени  $t = 0$ . Распределения скорости, квадрата скорости звука, плотности и давления по координате в этот момент имеют вид

$$u(r, 0) \simeq r^{-\frac{1-n}{n}}, \quad c^2(r, 0) \simeq r^{-\frac{2(1-n)}{n}}, \quad \rho(r, 0) \simeq r^{-\frac{2(1-n)}{(\gamma-1)n}}, \quad p(r, 0) \simeq r^{-\frac{2(1-n)\gamma}{(\gamma-1)n}}. \quad (12)$$

Решение, описывающее схлопывание и действительное для  $t \leq 0$ , можно продолжить и на положительные значения времени  $t > 0$ , то есть из области отрицательных в область положительных  $\eta$ . На стадии схлопывания была проинтегрирована система (6) для  $F$  и  $G$  в интервале  $-1 \leq \eta \leq 0$ . Поскольку  $F$  и  $G$  конечны при  $\eta = 0$  и уравнения системы (6) не имеют особенности в этой точке, интегрирование можно продолжить и в область положительных значений  $\eta$ . При продолжении решения в область  $\eta > 0$  возникает особенность при некотором  $\eta = \eta_H$ , так как при этом выполняется



равенство  $\Delta_0 = 0$ . Эту особенность, которая соответствует предельной линии, выходящей из центра  $O$  на плоскости  $rt$ , следует устранить. Для этого необходимо ввести разрыв в величинах  $F$  и  $G$  при некотором значении  $\eta = \eta_J$ , меньшем значения  $\eta_H$ . Физически это означает, что в точке  $r = 0, t = 0$  образуется отраженная УВ, которая распространяется от центра навстречу набегающему на нее потоку. Поток впереди УВ является гладким продолжением течения, найденного на стадии схлопывания. Следовательно, значение показателя автомодельности  $n$  в автомодельном решении, описывающем течение за отраженной УВ, должно быть тем же самым, что и в решении до момента фокусировки, чтобы обеспечить то же самое поведение (12) при  $t = 0$ . Таким образом, закон распространения отраженной УВ имеет вид  $\eta_J r^{1/n} = At$ . Формально интегральная кривая ОДУ (9) на плоскости  $VZ$  проходит через начало координат и продолжается в область  $V < 0, Z > 0$  до тех пор, пока она не пересечет параболу  $Z = (1 - V)^2$  в точке  $H$ , отвечающей значению  $\eta_H$ . Этот интеграл теряет физический смысл за точкой  $H$ , так как функции  $F$  и  $G$  должны быть однозначными функциями  $\eta$ . Поскольку отраженная УВ выходит из точки  $O$  на плоскости  $rt$ , не существует ни одной характеристики, которая выходила бы из точки  $O$ , и поэтому выражение  $\Delta_0$  меняет знак при  $\eta = \eta_J$ , испытывая при этом разрыв. Соответственно этому интегральная кривая на плоскости  $VZ$  перескакивает через параболу  $Z = (1 - V)^2$ , также претерпевая разрыв.

Значение  $\eta_J$  будем называть *положением ударного перехода*. Для каждой из двух рассматриваемых моделей отражения при одном и том же наборе параметров  $(\nu, \gamma)$  это положение различно. Различие связано с тем, что для моделей отражения используются разные соотношения на УВ, которые обусловлены, в свою очередь, выбором поведения энтропии на УВ.

На плоскости  $VZ$  точка  $J$ , отвечающая значению  $\eta_J$ , характеризует автомодельные представители, которые принадлежат течению непосредственно *перед* УВ.

Найдем вид течения в области  $\eta_J \leq \eta \leq +\infty$  за отраженной УВ. Эта область имеет нулевые размеры при  $t = 0$ . Течение за отраженной УВ, как отмечено ранее, является автомодельным с прежним показателем автомодельности. Решение удобно искать в той же форме (5), что и на стадии схлопывания. При этом остается справедливой система ОДУ (4).

В статье [1] показано, что для течения за отраженной УВ существует единственно верная возможность: полость остается захлопнутой при  $t > 0$ . Это обстоятельство определяет граничные условия при  $\eta \rightarrow +\infty$ , то есть в центре схлопывания. Скорость частицы  $u$  должна быть равна нулю, то есть  $u(0, t > 0) = 0$ , а квадрат скорости звука  $c^2(0, t > 0)$  должен принимать положительное значение. Следовательно, граничные условия для функций  $F$  и  $G$  имеют вид

$$\text{при } \eta \rightarrow +\infty : \quad F(+\infty) = 0, \quad G(+\infty) = \text{const.} \quad (13)$$

Таким образом, для того, чтобы получить автомодельное решение в области за отраженной УВ, необходимо проинтегрировать систему (6) для функции  $F$  и  $G$  с граничными условиями при  $\eta = \eta_J$  на отраженной УВ и (13) в центре схлопывания.

На плоскости  $VZ$  течение за отраженной УВ описывается интегральной кривой ОДУ (9), выходящей из бесконечно удаленной особой точки типа седло  $P_6$  и заканчивающейся в некоторой точке  $K$ , лежащей внутри области  $Z > (1 - V)^2$ . Точка  $K$ , как и точка  $J$ , отвечает значению  $\eta_J$ , однако характеризует автомодельные представители, которые принадлежат течению непосредственно *за* УВ, т.е. точки  $J$  и  $K$  являются образами берегов отраженной УВ.

Окончательно, полное решение для течения после схлопывания на плоскости  $VZ$  состоит из (a) — участка  $P_4J$  кривой, прошедшей через начало координат и лежащей целиком в области  $Z < (1 - V)^2$ , (b) — кривой, соединяющей точку  $P_6$  с точкой  $K$  и лежащей целиком в области  $Z > (1 - V)^2$ , (c) — ударного перехода, соединяющего части (a) и (b) в соответствии с соотношениями на УВ.

Следует отметить, что для разных моделей отражения при отображении течения после схлопывания на плоскость  $VZ$  используются участки одних и тех же интегральных кривых. Отличие состоит в том, что точки  $J$  и  $K$  имеют на соответствующих кривых разное местоположение. Это следствие того, что разные модели отражения имеют для общего набора параметров  $(\nu, \gamma)$  разные положения ударного перехода  $\eta_J$ .

Определим вид соотношений при переходе через УВ. Для каждой из двух рассматриваемых моделей отражения эти соотношения различны и учитывают заложенное в модель поведение энтропии.



Обозначим параметры течения перед фронтом УВ индексом 1, а за фронтом — индексом 2. Тогда уравнения сохранения массы и количества движения для УВ можно записать в виде

$$\rho_2(u_2 - D) = \rho_1(u_1 - D), \quad \rho_2 [c_2^2 + \gamma(u_2 - D)^2] = \rho_1 [c_1^2 + \gamma(u_1 - D)^2]. \quad (14)$$

Если рассматривается первая модель отражения, когда энтропия возрастает скачком на УВ, уравнения (14) необходимо дополнить уравнением сохранения энергии на УВ

$$2c_2^2 + (\gamma - 1)(u_2 - D)^2 = 2c_1^2 + (\gamma - 1)(u_1 - D)^2. \quad (15)$$

Если же предполагается, что энтропия при переходе через УВ не меняется, то есть во всем течении справедливо единственное соотношение между давлением  $p$  и плотностью  $\rho$  (вторая модель отражения), то к уравнениям (14) нужно добавить соотношение (2).

В уравнениях (14) и (15)  $D$  — скорость распространения УВ. Учитывая (5), выразим скорость  $D$  в автомодельных переменных

$$D = \frac{dr}{dt} = n \frac{r}{t} = knr^{1-1/n}\eta^{-1}.$$

Автомодельные представления уравнений (14), (15) и соотношения (2) имеют соответственно вид

$$R_2(1 + \eta F_2) = R_1(1 + \eta F_1), \quad R_2(\eta^2 G_2 + \gamma(1 + \eta F_2)^2) = R_1(\eta^2 G_1 + \gamma(1 + \eta F_1)^2); \quad (16)$$

$$2\eta^2 G_2 + (\gamma - 1)(1 + \eta F_2)^2 = 2\eta^2 G_1 + (\gamma - 1)(1 + \eta F_1)^2; \quad (17)$$

$$R = (\eta^2 G)^{1/(\gamma-1)}. \quad (18)$$

При получении (18) было использовано выражение (3).

Таким образом, для определения значений параметров течения за УВ, когда известны значения параметров перед УВ, можно составить два набора условий. В случае первой модели отражения необходимо использовать уравнения (16) и (17), а в случае второй модели отражения — уравнения (16) с учетом (18). Течение для всего двухстадийного процесса схлопывания-отражения определяется решением системы двух ОДУ (6). Поэтому для осуществления ударного перехода через отраженную УВ достаточно только двух соотношений, которые должны связывать значения  $F$  и  $G$  перед и за УВ. С помощью преобразований получаем

$$1 + \eta F_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}(1 + \eta F_1)^2 + \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{\eta^2 G_1}{1 + \eta F_1}, \quad G_2 = G_1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{(1 + \eta F_1)^2 - (1 + \eta F_2)^2}{\eta^2}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_2^{1/(\gamma-1)}(1 + \eta F_2) &= G_1^{1/(\gamma-1)}(1 + \eta F_1), \\ G_2^{1/(\gamma-1)}(\eta^2 G_2 + \gamma(1 + \eta F_2)^2) &= G_1^{1/(\gamma-1)}(\eta^2 G_1 + \gamma(1 + \eta F_1)^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Системы уравнений (19) и (20) представляют собой окончательные варианты условий на отраженной УВ для первой и второй моделей отражения соответственно. Соотношения (19) и (20) должны выполняться при  $\eta = \eta_J$ . При этом важно еще раз отметить, что положение ударного перехода  $\eta_J$  различно для каждой из рассматриваемых моделей течения после схлопывания.

Максимальную вычислительную сложность задачи представляет определение значения показателя автомодельности  $n$ , которое проводится на первом этапе решения. Основные вычисления при построении решения после схлопывания связаны с нахождением положения ударного перехода  $\eta_J$ , но эти вычисления имеют меньшую трудоемкость.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Основной целью настоящей статьи является сравнение двух моделей отражения, учитывающих различное поведение энтропии при переходе через УВ. Решение, описывающее течение до момента фокусировки, при этом остается одним и тем же.

Расчеты проведены для случая сферически симметричного течения ( $\nu = 3$ ). Исследованы все диапазоны значений показателя  $\gamma$ , для которых возможно построение аналитического решения. Результаты расчетов представлены в виде графиков.



На рис. 3 представлены распределения автомодельных представителей скорости, плотности, квадрата скорости звука и энтропийной функции на обеих стадиях течения для двух значений показателя адиабаты:  $\gamma = 3$  и  $\gamma = 7$ . Автомодельные представители обладают разным поведением для первой и второй модели отражения (рис. 3, кривые I и II соответственно). Однако эти различия в большей степени носят количественный характер.

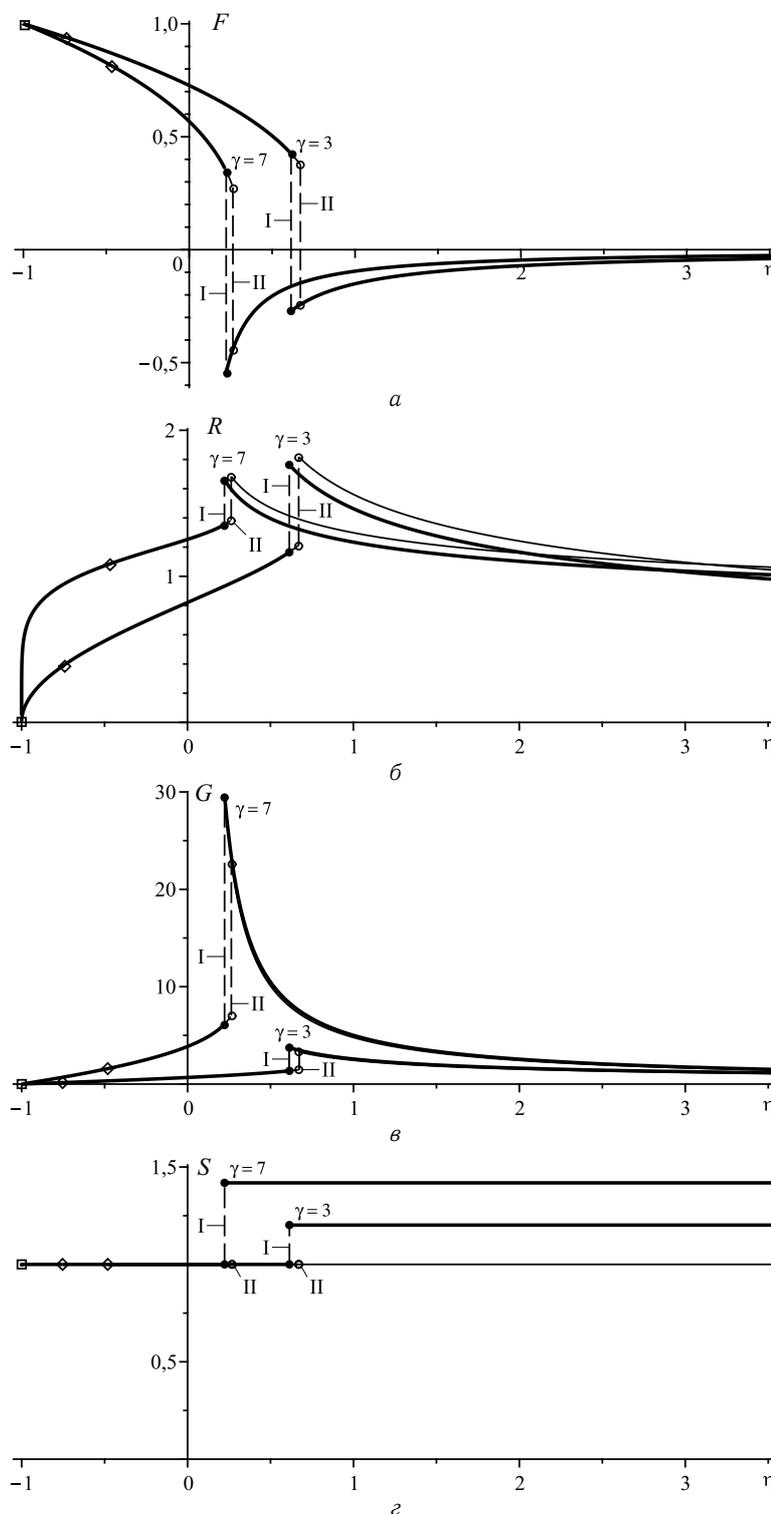


Рис. 3. Распределение автомодельного представителя для двух значений  $\gamma$  в случае сферической симметрии: а — скорости частицы  $u$ ; б — плотности  $\rho$ ; в — квадрата скорости звука  $c^2$ ; г — энтропийной функции  $s$



Следует отметить, что приводимые автомодельные функции при изменении независимой автомодельной переменной  $\eta$  от  $-1$  до  $+\infty$  описывают поведение соответствующего размерного параметра от времени  $t$  при фиксированном значении координаты  $r$ .

Значения автомодельных представителей  $F$  и  $G$  на берегах отраженной УВ для четырех значений  $\gamma$  ( $\nu = 3$ ) сведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры	Модель	Точка	$\eta$ ( $\eta_J$ )	$F$	$G$
$\gamma = 3.0$ $n = 0.70856126$	I	$J_I$	0.613874	0.425515	1.35655
	I	$K_I$	0.613874	-0.271603	3.73506
	II	$J_{II}$	0.670408	0.375532	1.47137
	II	$K_{II}$	0.670408	-0.245560	3.30371
$\gamma = 7.0$ $n = 0.55521127$	I	$J_I$	0.222869	0.348165	6.15235
	I	$K_I$	0.222869	-0.542505	29.6114
	II	$J_{II}$	0.263572	0.275848	7.04475
	II	$K_{II}$	0.263572	-0.445235	22.6999
$\gamma = 20.0$ $n = 0.47708490$	I	$J_I$	0.0755734	0.342964	28.9678
	I	$K_I$	0.0755734	-0.746679	298.737
	II	$J_{II}$	0.106180	0.256646	35.7991
	II	$K_{II}$	0.106180	-0.498699	167.747
$\gamma = 200$ $n = 0.42443812$	I	$J_I$	0.00714694	0.314150	890.776
	I	$K_I$	0.00714694	-1.01801	37890.2
	II	$J_{II}$	0.0159785	0.242132	1207.77
	II	$K_{II}$	0.0159785	-0.391378	9075.54

На рис. 4–5 показаны кривые, характеризующие зависимости (от  $\gamma$ ) положения ударного перехода  $\eta_J$ , коэффициента сжатия  $\rho_2/\rho_1$ , перепада давления  $p_2/p_1$ , отношения энтропий  $s_2/s_1$  и числа Маха за отраженной УВ  $u_2/c_2$  для двух рассматриваемых моделей отражения (кривые I и II).

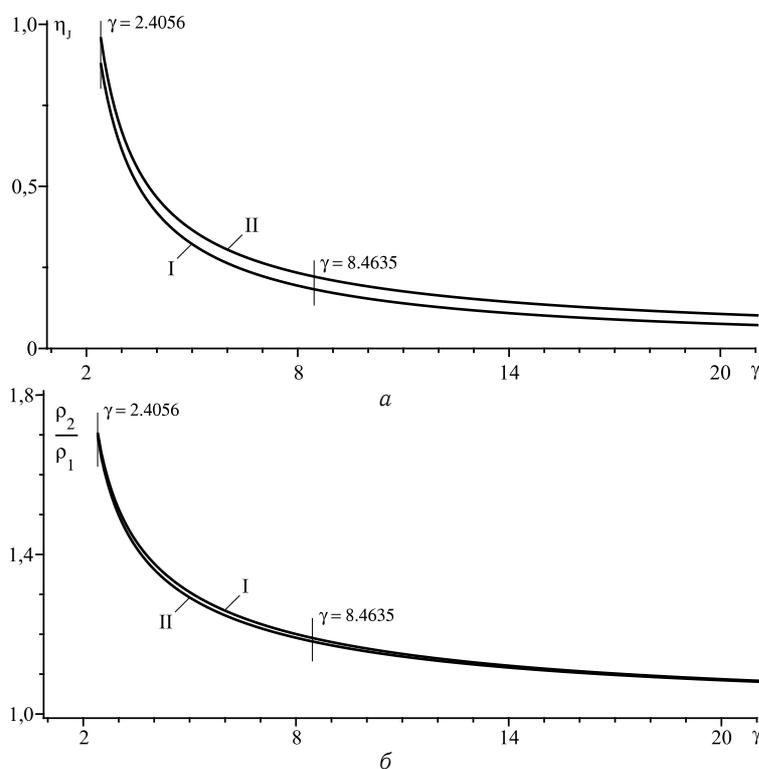


Рис. 4. Изменения (в зависимости от  $\gamma$ )  $a$  — положения ударного перехода  $\eta_J$ ,  $b$  — коэффициента сжатия

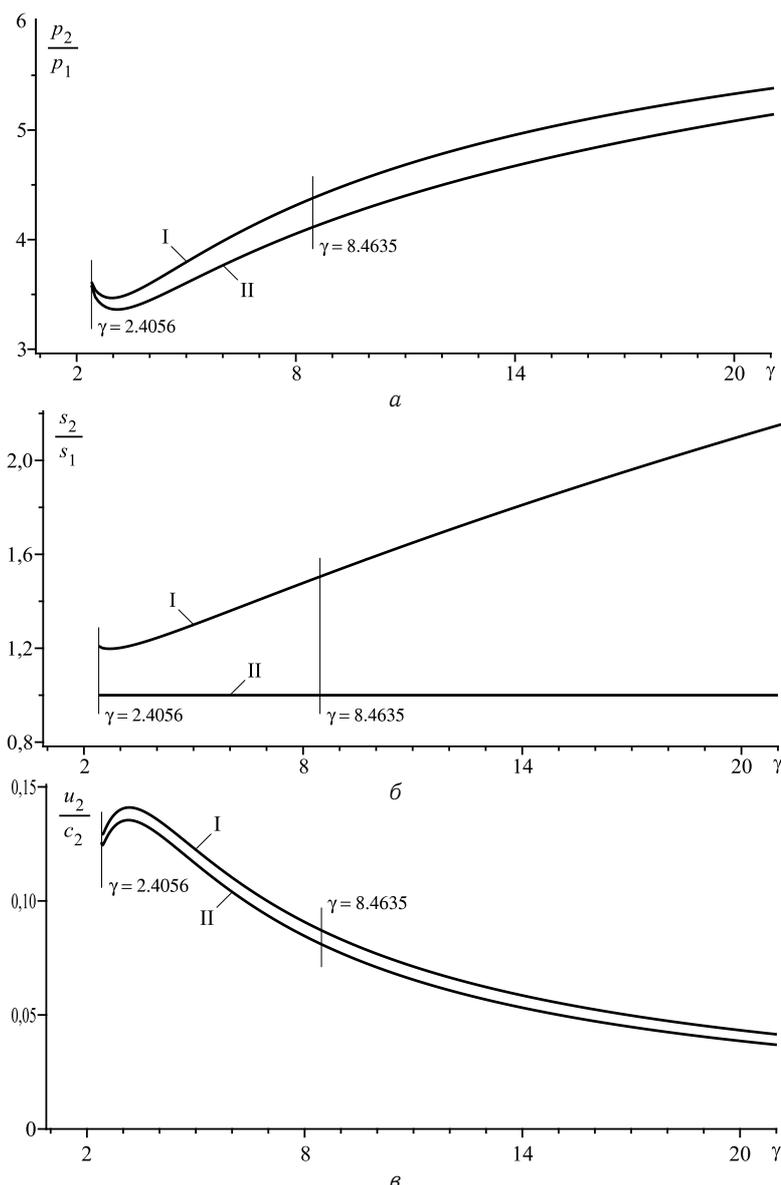


Рис. 5. Изменения (в зависимости от  $\gamma$ ) а — перепада давлений, б — отношения энтропий, в — числа Маха после перехода через УВ

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Каждое из решений двухпараметрического семейства  $(\nu, \gamma)$ , описывающее схлопывание полости и справедливое для  $t < 0$ , может быть закончено для  $t > 0$ . При этом решение для положительных моментов времени зависит от того, каков закон изменения энтропий на отраженной УВ. Однако основные отличия в поведении газодинамических параметров носят больше количественный, чем качественный характер.

Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.

## Библиографический список

1. Хантер К. О захлопывании пустой полости в воде // Механика: Периодический сб. переводов иностр. ст. 1961. № 3 (67). С. 77–100.
2. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // УМН. 1963. Т. 18, вып. 2 (110). С. 3–23.
3. Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S. et al. Evidence for Nuclear Emissions During Acoustic Cavitation // Science. 2002. V. 295, № 5561. P. 1868–1873.
4. Lord Rayleigh. On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity // Phil. Mag. 1917. V. 34, № 200. P. 94–98.



5. Richtmyer R.D., Lazarus R.B. Singularity Fitting in Hydrodynamical Calculations II. Los Alamos Sc. Lab. Report LA-6108-MS, 1975. 19 p.

6. Lazarus R.B. Self-Similar Solutions for Converging Shocks and Collapsing Cavities // SIAM J. Numer. Anal. 1981. V. 18, iss. 2. P. 316–371.

УДК 539.3

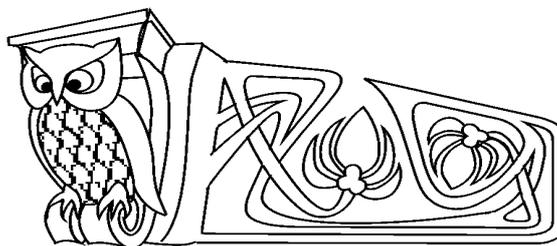
## ИЗГИБ СОСТАВНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

В.И. Копнина, Е.Ю. Крылова\*

Саратовский государственный университет, кафедра математической теории упругости и биомеханики; \*Саратовский государственный технический университет, кафедра математика и моделирование E-mail: kat.krylova@bk.ru

В статье методом комплексных потенциалов С.Г. Лехницкого исследуется напряженно-деформированное состояние тонкой плиты при изгибе. Плита составлена из двух эллиптических колец, вложенных друг в друга без натяга. Материал колец анизотропный и разный.

**Ключевые слова:** тонкая эллиптическая плита, анизотропный, изгиб, комплексный потенциал Лехницкого.



**Bend of Composite Anisotropic Slab Under Normal Loading**

V.I. Koptina, E.Yu. Krylova\*

Saratov State University, Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics; \*Saratov State Technical University, Chair of Mathematics and Modelling E-mail: kat.krylova@bk.ru

In this contribution, deflected mode of a thin slab under bending is investigated by the Lehnicky method of complex potential. The slab is composed of two elliptical rings; they are embedded in each other without tension. Material of the rings is anisotropic and different.

**Key words:** elliptical thin slab, , anisotropic, bend, complex potential by Lehnicky.

Рассмотрим упругое равновесие анизотропной эллиптической плиты, ослабленной эллиптическим отверстием, которое подкреплено кольцом из другого анизотропного материала. Толщина кольца равна толщине плиты  $h$ , ширина достаточная, чтобы к кольцу можно было применить теорию изгиба плит.

Плита изгибается поперечной нагрузкой интенсивности  $q(x, y)$ . Будем считать, что внешний контур плиты и внутренний контур кольца жёстко защемлены, причем внешний контур плиты имеет возможность под действием изгибающей нагрузки опускаться.

Обозначим внешний контур плиты [кольца]  $L_0^{(0)}$  [ $L_0^{(1)}$ ], внутренний контур плиты [кольца] —  $L_1^{(0)}$  [ $\ell$ ]; полуоси контурных эллипсов —  $a_n^{(\nu)}, b_n^{(\nu)}$  ( $n = \nu = 0, 1$ ). Здесь и далее величины, характеризующие упругое состояние плиты, имеют индекс (0) сверху, а кольца — (1).

Задачу об изгибе такой плиты можно привести [2] к определению комплексных потенциалов С.Г. Лехницкого  $W_j^{(\nu)}(Z_j^{(\nu)})$  (здесь и далее  $j = 1, 2$ ) из граничных и контактных условий [3]:

$$2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 W_j^{(\nu)'}(t_j^{(\nu)}) = -\frac{\partial W_0^{(\nu)}}{\partial x},$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \mu_j^{(\nu)} W_j^{(\nu)'}(t_j^{(\nu)}) = -\frac{\partial W_0^{(\nu)}}{\partial y} \quad \text{на } L^{(0)}(\nu = 0), \quad \ell(\nu = 1); \quad (1)$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \left[ d_{jk}^{(0)} W_j^{(0)'}(t_j^{(0)}) - d_{jk}^{(1)} W_j^{(1)'}(t_j^{(1)}) \right] = f_k \quad (k = \overline{1, 4}) \quad \text{на } L_1^{(0)} \left[ L_0^{(1)} \right], \quad (2)$$

где  $d_{j1}^{(\nu)} = 1$ ,  $d_{j2}^{(\nu)} = \mu_j^{(\nu)}$ ,  $d_{j3}^{(\nu)} = \frac{P_j^{(\nu)}}{\mu_j^{(\nu)}}$ ,  $d_{j4}^{(\nu)} = q_j^{(\nu)}$ ;  $f_1 = -\frac{\partial W_0^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial W_0^{(1)}}{\partial x}$ ,  $f_2 = -\frac{\partial W_0^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial W_0^{(1)}}{\partial y}$ ,  $f_3 = -Cx + C_1$ ,  $f_4 = \frac{1}{6}q(x, y) \left( \nu_2^{(0)} - \nu_2^{(1)} \right) x + Cy + C_2$ . Здесь  $t_j^{(\nu)}$  — аффиксы точек на контурах соответствующих эллипсов, расположенных в областях изменения  $Z_j^{(\nu)}$ , которые получаются из области, занятой срединной плоскостью составной плиты, при помощи известных аффинных преобразований [2];