где гомоморфизм групп гомотопических классов отображений индуцирован морфизмом H-пространств (10). Эта группа допускает следующее «геометрическое» описание. Если существует вложение $\mu\colon A_k \hookrightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ для некоторого l, $(k, l) = 1$, то $M_k(\mathbb{C})$-расслоение $A_k \to X$ называется *вложимым* (заметим, что из предыдущих результатов видно, что если l достаточно велико, то вложимость не зависит от выбора конкретного l, но только от самого́ расслоения A_k). Если существуют вложимые расслоения A_l, B_n, такие что $C_k \otimes A_l \cong D_m \otimes B_n$, то $M_k(\mathbb{C})$ и $M_m(\mathbb{C})$-расслоения C_k, D_m над X называются *эквивалентными*. Множество классов такой эквивалентности расслоений над данной базой X относительно операции, индуцированной тензорным произведением, является группой. Она совпадает с коядром (11). В частности, для каждой четномерной сферы S^{2n} она изоморфна $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (и 0 для нечетномерной).

Автор выражает благодарность А.С. Мищенко, Е.В. Троицкому и Томасу Шику за конструктивное обсуждение вопросов, затронутых в данной статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 07-01-00046-а, 07-01-91555-ННИО_а и 08-01-00034-а).

Библиографический список

1. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986. 543 с.
2. *Каруби М.* К-теория. Введение. М.: Мир, 1981. 360 с.
3. *Peterson F.P.* Some remarks on Chern classes // Annals of Math. 1959. V. 69. P. 414–420.
4. *Ershov A.V.* A generalization of the topological Brauer group // J. of K-theory: K-theory and its Applications to Algebra, Geometry and Topology. 2008. V. 2, Spec. Iss. 03. P. 407–444.
5. *Connes A.* Noncommutative geometry. N.Y.: Academic Press, 1994. 661 p.
6. *Ershov A.V.* Topological obstructions to embedding of a matrix algebra bundle into a trivial one // http://arxiv.org/abs/0807.3544.

УДК 512.534

ОТНОШЕНИЯ ГРИНА И ОБОБЩЁННЫЕ ОТНОШЕНИЯ ГРИНА НА НЕКОТОРЫХ ПОЛУГРУППАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И.Б. Кожухов, В.А. Ярошевич

Московский институт электронной техники,
кафедра высшей математики – 1
E-mail: Kozhuhov_I_B@mail.ru, V-Yaroshevich@ya.ru

Исследуются отношения Грина $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ на полугруппах изотонных преобразований частично упорядоченных множеств, а также обобщённые отношения Грина $\mathscr{L}^*$, $\mathscr{R}^*$ на полугруппе $B(X)$ бинарных отношений на множестве X. Доказано, что хотя полугруппа $B(X)$ не регулярна при $|X| \geqslant 3$, но в ней, как во всякой регулярной полугруппе $\mathscr{L} = \mathscr{L}^*$, $\mathscr{R} = \mathscr{R}^*$.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, полугруппа изотонных преобразований, отношение Грина на полугруппе, обобщённые отношения Грина, полугруппа бинарных отношений.

The Green's Relations and the Generalized Green's Relations on Certain Transformation Semigroups

I.B. Kozhukhov, V.A. Yaroshevich

Moscow Institute of Electronic Technology,
Chair of Higher Mathematics – 1
E-mail: Kozhuhov_I_B@mail.ru, V-Yaroshevich@ya.ru

We investigate the Green's relations $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ on the semigroups of isotone transformations of the partially ordered sets, and also the generalized Green's relations $\mathscr{L}^*$, $\mathscr{R}^*$ on the semigroup $B(X)$ of binary relations on a set X. It is proved that $\mathscr{L} = \mathscr{L}^*$, $\mathscr{R} = \mathscr{R}^*$ in the semigroup $B(X)$ though this semigroup is non-regular for $|X| \geqslant 3$.

Key words: partially ordered set, semigroup of isotone transformations, Green's relations on semigroup, generalized Green's relations, semigroup of binary relations.

В работе используются основные понятия теории полугрупп из монографии [1]. Пусть S — полугруппа, $S^1 = S \cup \{1\}$ — полугруппа S с внешне присоединённой единицей 1. Отношения левой и правой делимости в S определяются обычным образом:

$$a \leqslant_l b \;\Leftrightarrow\; S^1 a \subseteq S^1 b, \qquad a \leqslant_r b \;\Leftrightarrow\; aS^1 \subseteq bS^1.$$

Эти отношения являются квазипорядками на множестве S. Обозначим через $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ отношения Грина на полугруппе S.

Пусть X — произвольное множество. Обозначим через $T(X)$ полугруппу преобразований множества X с умножением $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$, где $x \in X$. Если $\alpha : X \to Y$, то $\ker\alpha = \{(x, x') \in X \times X \,|\, x\alpha = x'\alpha\}$ — *ядро*, а $\operatorname{im}\alpha = \{x\alpha \,|\, \alpha \in X\}$ — *образ* отображения α. *Частичное отображение* множества X в множество Y — это обычное отображение $\alpha : X_1 \to Y$, где $X_1 \subseteq X$. Множество X_1 называется *областью определения* α и обозначается $\operatorname{dom}\alpha$. Ядро и образ частичного отображения определяются так же, как для обычного. Произведение $\alpha\beta$ двух частичных отображений определяется обычным образом. Множество $PT(X)$ всех частичных отображений множества X в себя с операцией умножения является полугруппой, содержащей $T(X)$ в качестве подполугруппы.

Полугруппу бинарных отношений на множестве X с обычным умножением бинарных отношений обозначим через $B(X)$. Пусть σ — бинарное отношение на множестве X. Для $x \in X$ положим $\sigma\langle x\rangle = \{y \,|\, (x, y) \in \sigma\}$. Тогда σ можно рассматривать как многозначное отображение $x \to \sigma\langle x\rangle$. Очевидно, $T(X)$, $PT(X)$ — подполугруппы полугруппы $B(X)$.

Элемент a полугруппы S называется *регулярным*, если $a \in aSa$. Полугруппа S регулярна, если все её элементы регулярны.

Хорошо известно, что полугруппы $T(X)$ и $PT(X)$ регулярны для любого множества X. Полугруппа $B(X)$ регулярна при $|X| \leqslant 2$ и нерегулярна при $|X| \geqslant 3$. Условия регулярности элемента $\sigma \in B(X)$ получены в [2].

Пусть X — квазиупорядоченное отношением $\leqslant$ множество. Отображение $\alpha : X \to X$ назовем *изотонным*, если

$$\forall\, x, y \in X \quad x \leqslant y \;\Rightarrow\; x\alpha \leqslant y\alpha.$$

Множество всех изотонных отображений $\alpha : X \to X$ обозначим $O(X)$. Очевидно, что $O(X)$ — подполугруппа полугруппы $T(X)$. Полугруппа $O(X)$ несёт большую информацию о строении квазиупорядоченного множества X. Так, Л.М. Глускин доказал [3], что полугруппы $O(X)$ и $O(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда квазиупорядочные множества X и Y изоморфны или антиизоморфны. Необходимые и достаточные условия регулярности полугруппы $O(X)$, где X — частично упорядоченное множество, получены А.Я. Айзенштат в [4]. Следует отметить, что изучение полугруппы $O(X)$ изотонных преобразований является частью более общей задачи — исследования полугрупп эндоморфизмов графов [5].

Строение отношений Грина на полугруппе $T(X)$ всех преобразований хорошо известно (см. [1, § 2.2]). А именно:

(i) если $\alpha, \beta \in T(X)$, то $(\alpha, \beta) \in \mathscr{R} \;\Leftrightarrow\; \ker\alpha = \ker\beta$;

(ii) если $\alpha, \beta \in T(X)$, то $(\alpha, \beta) \in \mathscr{L} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta$.

Если вместо $T(X)$ взять $O(X)$, то утверждения (i), (ii) в общем случае перестанут быть верными. Разумеется, остаются справедливыми импликации $\Rightarrow$. Выясним, в каких случаях верны импликации $\Leftarrow$.

Цепью мы будем называть произвольное линейно упорядоченное множество.

Предложение 1. *Пусть X — произвольная цепь. Тогда:*

(iii) *если $\alpha, \beta \in O(X)$, то $(\alpha, \beta) \in \mathscr{L} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta$.*

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем $\Leftarrow$. Пусть $\operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta$. Выберем в каждом классе отношения $\ker\beta$ по одному элементу. Если K — класс отношения $\ker\beta$, то выбранный в K элемент обозначим через $\widehat{K}$. Определим отображение $\gamma : \;\; X \to X$ по формуле $x\gamma = \widehat{(x\alpha)\beta^{-1}}$. Непосредственно проверяется, что $\gamma \in O(X)$ и $\gamma\beta = \alpha$. Аналогичным образом можно доказать, что $\beta = \delta\alpha$ при некотором $\delta \in O(X)$. Это влечет, что $(\alpha, \beta) \in \mathscr{L}$. $\square$

Предложение 2. *Пусть X — конечная цепь. Тогда:*

(iv) *если $\alpha, \beta \in O(X)$, то $(\alpha, \beta) \in \mathscr{R} \;\Leftrightarrow\; \ker\alpha = \ker\beta$.*

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем $\Leftarrow$. Пусть X — конечная цепь и $\ker\alpha = \ker\beta$ для некоторых $\alpha, \beta \in O(X)$. Так как α — изотонное отображение, то классы отношения $\ker\alpha$ являются интервалами цепи X. Пусть эти классы таковы: $K_1, K_2, \ldots, K_m$, причем $x < y$ при всех $x \in K_i$,

$y \in K_j$, $i < j$. Тогда $\alpha = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_m \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{pmatrix}$. Построим отображение $\varphi: \{x_1, \dots, x_m\} \to \{y_1, \dots, y_m\}$, положив $x_i\varphi = y_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, и продолжим φ до изотонного отображения $\gamma: X \to X$ следующим образом:

$$x\gamma = \begin{cases} y_1 & \text{при } x \leqslant x_1; \\ y_i & \text{при } x_{i-1} < x \leqslant x_i,\ 2 \leqslant i \leqslant m; \\ y_m & \text{при } x_m < x. \end{cases}$$

Тогда получим $\alpha\gamma = \beta$. Аналогичным образом можно построить $\delta \in O(X)$, такое что $\beta\delta = \alpha$. Отсюда получаем $(\alpha, \beta) \in \mathscr{R}$. $\square$

Построим теперь цепь X и элементы $\alpha, \beta \in O(X)$, такие что $\ker\alpha = \ker\beta$, но $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{R}$ в $O(X)$, т.е. приведём пример, опровергающий утверждение (iv).

Пример 1. В качестве цепи X возьмем множество $X = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}' = \{1, 2, 3, \dots,\ 1', 2', 3', \dots\}$ с порядком $1 < 2 < 3 < \dots < 1' < 2' < 3' < \dots$ Положим $i\alpha = 1'$ для $i \in \mathbb{N}$, $i'\alpha = (i+1)'$ для $i' \in \mathbb{N}'$; $i\beta = 1$ для $i \in \mathbb{N}$, $i'\beta = i + 1$ для $i' \in \mathbb{N}'$. Очевидно, $\alpha, \beta \in O(X)$ и $\ker\alpha = \ker\beta$. Докажем, что не существует такого $\gamma \in O(X)$, что $\beta\gamma = \alpha$. Предположим, что такое γ существует. Тогда $i'\beta\gamma = i'\alpha$, т.е. $(i+1)\gamma = (i+1)'$. Имеем $i + 1 < 1'$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $(i+1)\gamma \leq 1'\gamma$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем: $(i+1)' \leq 1'\gamma$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Но такого элемента a, который удовлетворял бы неравенству $a \geq (i+1)'$ при всех $i \in \mathbb{N}$, в цепи X нет. Мы доказали, что $\alpha \neq \beta\gamma$ ни при каком $\gamma \in O(X)$. Следовательно, $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{R}$. $\square$

Наконец, построим примеры конечных частично упорядоченных множеств, для которых неверны утверждения (iii) и (iv).

Построим конечное частично упорядоченное множество X и элементы $\alpha, \beta \in O(X)$, такие что $\mathrm{im}\alpha = \mathrm{im}\beta$, но $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{L}$ в $O(X)$.

Пример 2. Пусть $X = \{x, x', y, y', z, z', u\}$ — множество с отношением частичного порядка, заданным двумя нетривиальными соотношениями: $y < y'$ и $z < z'$ (остальные пары различных элементов несравнимы). Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} x & x' & y & y' & z & z' & u \\ y & y' & u & u & u & u & u \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} x & x' & y & y' & z & z' & u \\ u & u & u & u & y & y' & u \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\alpha, \beta \in O(X)$. Пусть существует такое $\gamma \in O(X)$, что $\gamma\alpha = \beta$. Имеем $y = z\beta = z\gamma\alpha$. Поэтому $z\gamma = x$. Аналогично получаем, что $z'\gamma = x'$. Так как $z < z'$, но $x \nleq x'$, то $\gamma \notin O(X)$. Полученное противоречие показывает, что $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{L}$. $\square$

Построим конечное частично упорядоченное множество X и элементы $\alpha, \beta \in O(X)$, такие что $\ker\alpha = \ker\beta$, но $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{R}$ в $O(X)$.

Пример 3. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — множество с отношением частичного порядка, заданным следующими нетривиальными соотношениями: $1 < 6$, $2 < 4$, $1 < 4$, $2 < 5$, $3 < 6$, $3 < 5$ и $1 < 5$ (остальные пары различных элементов несравнимы). Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\alpha, \beta \in O(X)$. Пусть существует такое $\delta \in O(X)$, что $\alpha\delta = \beta$. Тогда $3\alpha\delta = 3\beta$, $3\beta = 2$, $3\alpha = 2$. Отсюда $2\delta = 2$. Аналогично $4\alpha\delta = 4\beta$, $4\beta = 6$, $4\alpha = 4$. Отсюда $4\delta = 6$. Такое δ не сохраняет соотношение $2 < 4$. Полученное противоречие показывает, что $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{R}$. $\square$

Отметим, что отношения Грина на полугруппах $O(X)$, где X — цепь, изучались также в работе [6], а для конечных квазиупорядоченных множеств X специального вида — в работе [7].

Перейдём теперь к обобщённым отношениям Грина на полугруппе S. Для элементов $a, b \in S$ положим $a \leqslant_l^* b$, если и только, если $a \leqslant_l b$ в некоторой надполугруппе $T \supseteq S$; $(a, b) \in \mathscr{L}^*$, если и только, если $(a, b) \in \mathscr{L}$ в некоторой надполугруппе $T \supseteq S$.

Отношения $\leqslant_r^*$, $\mathscr{R}^*$ определяются двойственным образом. Известна внутренняя характеризация отношений $\leqslant_l^*, \leqslant_r^*, \mathscr{L}^*, \mathscr{R}^*$.

Теорема 1 ([8, гл. 10, п. 1.6; 9]). *Пусть S — произвольная полугруппа и $a, b \in S$. Тогда эквивалентны условия: (a) $a \leqslant_l^* b$; (b) $\forall\, x, y \in S^1$ $(bx = by \ \Rightarrow\ ax = ay)$.*

Аналогичное утверждение верно для отношения $\leqslant_r^*$.

Нетрудно проверить, что для любых $a, b \in S$ справедливо соотношение $a \leqslant_l b \Rightarrow a \leqslant_l^* b$.

Для любой полугруппы S отношение $\leqslant_l^*$ является квазипорядком, но при доказательстве транзитивности этого отношения могут встретиться трудности следующего характера. Пусть $a \leqslant_l^* b$ и $b \leqslant_l^* c$. Тогда $a \leqslant_l b$ в некоторой надполугруппе $T_1 \supseteq S$, а $b \leqslant_l c$ — в надполугруппе $T_2 \supseteq S$. Если бы можно было найти одну надполугруппу $T \supseteq S$, в которой $a \leqslant_l b$ и $b \leqslant_l c$, то мы получили бы требуемое: $a \leqslant_l b$ в T. Такая надполугруппа была найдена. Для отношения $\leqslant_l^*$ в качестве такой «общей» надполугруппы можно взять полугруппу $T(S^1)^{op}$, двойственную к $T(S^1)$. Докажем, что на самом деле в качестве «общей» надполугруппы можно взять любую регулярную надполугруппу полугруппы S. А именно имеет место

Теорема 2. *Пусть S — произвольная полугруппа и A — регулярная надполугруппа полугруппы S. Тогда для элементов $a, b \in S$ эквивалентны условия: (a) $a \leqslant_l^* b$; (b) $a \leqslant_l b$ в A.*

Доказательство. В доказательстве этой теоремы мы будем считать, что $S^1 = S \cup \{1\}$ — полугруппа, которая получается из S присоединением внешним образом единицы, даже если в S уже была единица. Аналогично этому $A^1 = A \cup \{1\}$, $1 \notin A$. Кроме того, будем считать, что единицы в S^1 и A^1 совпадают. Тогда S, S^1, A — подполугруппы полугруппы A^1.

Пусть $a \leqslant_l^* b$ для некоторых $a, b \in S$. Естественные вложения $S \to A \to A^1$ продолжим до вложения $A^1 \to PT(A^1)^{op}$, определив для каждого $u \in A^1$ отображение $\varphi_u : S^1 \to A^1$ по формуле: $\varphi_u(x) = ux$ при всех $x \in S^1$. Так как $a \leqslant_l^* b$, то по теореме 1 при всех $x, y \in S^1$ выполняется условие $bx = by \ \Rightarrow\ ax = ay$. Построим отображение $\psi : bS^1 \to aS^1$, полагая $\psi(bx) = ax$ при $x \in S^1$. В силу условия (b) теоремы 1 ψ определено корректно и $\psi \in PT(A^1)$. Ясно, что $\varphi_a = \psi\varphi_b$. Отождествляя a с φ_a, b с φ_b, мы получим, что $a \in PT(A^1) \cdot b$. Это означает, что в полугруппе A имеет место соотношение $a \leqslant_l^* b$. Но A — регулярная полугруппа, поэтому $a \leqslant_l b$ в A. □

Так как $\mathscr{L}^* = \leqslant_l^* \bigcap (\leqslant_l^*)^{-1}$, то из теорем 1 и 2 мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть S — полугруппа и A — регулярная надполугруппа S. Тогда для элементов $a, b \in S$ следующие условия эквивалентны: (a) $(a, b) \in \mathscr{L}^*$; (b) $(a, b) \in \mathscr{L}$ в полугруппе A.*

Теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3, справедливы для отношений $\leqslant_r^*$ и $\mathscr{R}^*$.

Для доказательства следующей теоремы нам потребуется лемма.

Лемма 1. *Пусть $S = B(X)$ — полугруппа бинарных отношений на множестве X и $\sigma, \tau \in S$. Для $x \in X$ положим*

$$Y_x = \{y \,|\, \forall\ t\ (y, t) \in \sigma \ \Rightarrow\ (x, t) \in \tau\}. \tag{1}$$

Тогда $\tau \in S\sigma$ в том и только том случае, если выполнено условие

$$\forall\ x\ \ \forall\ z\ \ ((x, z) \in \tau \ \Rightarrow\ \exists\ y \in Y_x\ \ ((y, z) \in \sigma)). \tag{2}$$

Доказательство следует из результатов работы В.В. Вагнера [10, формулы (1.34), (1.38) и комментарии к ним].

Теорема 4. *Пусть X — множество, $B(X)$ — полугруппа бинарных отношений на X. Тогда в этой полугруппе при любых $\sigma, \tau \in B(X)$ выполняется условие $\tau \leqslant_l^* \sigma \ \Rightarrow\ \tau \leqslant_l \sigma$.*

Доказательство. Пусть $\tau \nleqslant_l \sigma$. Нам надо доказать, что $\tau \nleqslant_l^* \sigma$. Так как $\tau \nleqslant_l \sigma$, то из леммы 1 мы получаем, что существуют $x_0, z_0 \in X$, такие что $(x_0, z_0) \in \tau$ и

$$(y, z_0) \notin \sigma \text{ при всех } y \in Y_{x_0}. \tag{3}$$

Положим $\rho = (X \backslash \tau\langle x_0 \rangle) \times X$, $\rho' = \rho \cup (\{z_0\} \times X)$. Очевидно, что $\tau\rho' \neq \tau\rho$, так как $x_0 \notin \mathrm{dom}\tau\rho$, но $x_0 \in \mathrm{dom}\tau\rho'$.

Докажем, что $\sigma\rho = \sigma\rho'$. Так как $\sigma\rho \subseteq \sigma\rho'$, то достаточно доказать, что $\sigma\rho' \subseteq \sigma\rho$. Пусть $(u, v) \in \sigma\rho'$. Тогда $(u, w) \in \sigma$, $(w, v) \in \rho'$ при некотором $w \in X$. Если $(w, v) \in \rho$, то $(u, v) \in \sigma\rho$. Поэтому далее будем предполагать, что $(w, v) \in \rho' \backslash \rho$. Отсюда получаем, что $w = z_0$. Итак, $(u, z_0) \in \sigma$, поэтому ввиду (3) мы можем заключить, что $u \notin Y_{x_0}$. Следовательно, ввиду (1) найдется $t \in X$, такое что $(u, t) \in \sigma$,

$(x_0, t) \notin \tau$. Это влечет, что $(t, t') \in \rho$ при любом $t' \in X$. В частности, $(t, v) \in \rho$. Так как $(u, t) \in \sigma$ и $(t, v) \in \rho$, то $(u, v) \in \sigma\rho$.

Мы доказали, что $\sigma\rho = \sigma\rho'$, но $\tau\rho \neq \tau\rho'$. В силу теоремы 1 это означает, что $\tau \nleqslant_l^* \sigma$. $\square$

Следствие из теоремы 4 и двойственной к ней. *В полугруппе* $B(X)$ *бинарных отношений на множестве* X *справедливы равенства* $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}$ *и* $\mathscr{R}^* = \mathscr{R}$.

Авторы благодарят рецензента, сделавшего ряд ценных замечаний, позволивших существенно улучшить текст статьи.

Библиографический список

1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. 1. 285 с.
2. *Зарецкий К.А.* Полугруппа бинарных отношений // Мат. сб. 1963. Т. 61 (103), № 3. С. 291–305.
3. *Глускин Л.М.* Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. 1961. Т. 5 (101), № 16. С. 157–162.
4. *Айзенштат А.Я.* Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. 1968. Т. 387. С. 3–11.
5. *Molchanov V.A.* Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. P. 155–199.
6. *Laradji A., Umar A.* On certain finite semigroups of order-decreasing transformations // King Fahd Univ. Petroleum & Minerals. Tech. Rep. Ser. 2003. P. 1–19.
7. *Huisheng P., Dingyu Z.* Green's equivalences on semigroups of transformations preserving order and an equivalence relation // Semigroup Forum. 2005. V. 71. P. 241–251.
8. *Ляпин Е.С.* Полугруппы. М.: Физматгиз, 1960. 592 с.
9. *Шутов Э.Г.* Потенциальная делимость элементов в полугруппах // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. Герцена. 1958. Т. 166. С. 75–103.
10. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.

УДК 517.958

СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА КОМПАКТНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

О.В. Коровина, В.Л. Прядиев

Белгородский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: olesya_korovina@mail.ru, Pryadiev@bsu.edu.ru

Для волнового уравнения на компактном геометрическом графе при обобщённо-гладких условиях трансмиссии доказывается аналог формулы Даламбера.

Ключевые слова: компактный геометрический граф, волновое уравнение, обобщённо-гладкие условия трансмиссии, смешанная задача, аналог формулы Даламбера.

Structure of Mixed Problem Solution for Wave Equation on Compact Geometrical Graph in Nonzero Initial Velocity Case

O.V. Korovina, V.L. Pryadiev

Belgorod State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: olesya_korovina@mail.ru, Pryadiev@bsu.edu.ru

A D'Alambert formula analogue for wave equation on the compact geometrical graph with generalized smooth transmission conditions is being proved.

Key words: compact geometrical graph, wave equation, generalized smooth transmission conditions, mixed problem, D'Alambert formula analogue.

В настоящей работе рассматривается волновое уравнение на компактном геометрическом графе при условиях трансмиссии, которые являются обобщением так называемых «гладких» или «стандартных» [1]. Основная цель работы — дать доказательство представления типа Даламбера для решения начально-краевой задачи при ненулевой начальной скорости из класса C^1. Использована техника, развитая в работе [2] (где начальная скорость предполагалась нулевой). Представление типа Даламбера здесь не только даёт информацию о структуре общего решения (дополняя представление решения в виде ряда Фурье), но и может быть положено в основу при создании вычислительной схемы решения начально-краевой задачи [3].