Библиографический список

1. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
2. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
3. *Дудов С.И., Златорунская И.В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38.
4. *Дудов С.И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Мат. заметки. 1997. Т.61, № 4. С. 530–542.
5. *Каменев Г.К.* Скорость сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе// ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48, № 5. С. 763–778.
6. *Мещерякова Е.А.* О двух задачах по оценке выпуклого компакта шаром // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 48–50.
7. *Дудов С.И., Мещерякова Е.А.* Об асферичности выпуклого компакта // Математика. Механика: сб.науч.тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 24–27.
8. *Дудов С.И., Мещерякова Е.А.* О приближенном решении задачи об асферичности выпуклого компакта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 13–17.
9. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.

УДК 517.518.36

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ВСПЛЕСКОВ ХААРА

М.С. Красильникова

Воронежский государственный университет,
кафедра функционального анализа и операторных уравнений
E-mail: krasilnikovams@nm.ru

В работе получен общий вид ортогональных базисов всплесков, порожденных кратномасштабным анализом Хаара. Рассмотрены базисы, генерируемые тремя кусочно-постоянными (на четвертинках единичного квадрата) всплеск-функциями $\{\eta_i(x,y)\}$, где $i = 1, 2, 3$, имеющими носитель $[0,1] \times [0,1]$, со значениями $a_{ij} \in \mathbb{R}$, где $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3, 4$.

Ключевые слова: ортогональные базисы, всплески Хаара, кратномасштабный анализ.

Parametrization of Bivariate Nonseparable Haar Wavelets

M.S. Krasilnikova

Voronezh State University,
Chair of Functional Analysis and Operator Equations
E-mail: krasilnikovams@nm.ru

A parametrization of all orthogonal wavelet bases for Haar multiresolution analysis is derived. The bases generated by three piecewise constant wavelets $\{\eta_i(x,y)\}$, $i = 1, 2, 3$, supported on $[0,1] \times [0,1]$, with values $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$ are considered.

Key words: orthogonal bases, Haar wavelets, multiresolution analysis.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время очень актуальным стало использование несепарабельных всплесков Хаара для сжатия неподвижных изображений. В связи с этим возникает необходимость иметь удобную параметризацию всех несепарабельных всплесков Хаара, так как это даст возможность для каждого изображения адаптивно быстро находить оптимальный всплеск (дающий максимально возможный коэффициент сжатия).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть M — фиксированная целочисленная матрица размера $d \times d$, все собственные числа которой по модулю больше единицы.

Определение 1 [1, с. 94]. Совокупность замкнутых подпространств $V_j \subset L_2(\mathbb{R}^d)$, $j \in \mathbb{Z}$ называется *кратномасштабным анализом* (КМА) в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с матричным коэффициентом расширения M, если выполнены следующие условия: 1) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$; 2) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^d)$; 3) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$; 4) $f \in V_0 \Leftrightarrow f(M^j\cdot) \in V_j$ для всех $j \in \mathbb{Z}$; 5) существует функция $\varphi \in V_0$ такая, что последовательность $\{\varphi(\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ образует базис Рисса в V_0. Функцию φ называют масштабирующей.

Определение 2 [1, с. 141]. Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющее условию $\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^d}(E+l)=R^d$, и система $\{\chi_E(\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$, где χ_E — характеристическая функция множества E, является ортонормированной. КМА, порожденный функцией χ_E, называют *КМА Хаара*.

Пусть Ψ — конечное множество функций из $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Всплеск-системой*, сгенерированной множеством функций Ψ, будем называть семейство функций $X(\Psi):=\{\psi_{j,k}:=2^{jd/2}\psi(2^j\cdot-k),\ \psi\in\Psi,\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^d\}$.

Определение 3 [2]. Пусть $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ — КМА с масштабирующей функцией χ, являющейся характеристической функцией единичного куба в $\mathbb{R}^d$. Всплеск-система, сгенерированная системой функций Ψ, называется *кусочно-постоянной*, если $\Psi\subset V_1$.

Определение 4. Пусть дан КМА $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ с матричным коэффициентом расширения M, $m=|\det M|$. Будем говорить, что функции $\psi^{(\nu)}\in V_1, \nu=1,\dots,m-1$, образуют *набор всплеск-функций*, если $\psi^{(\nu)}\perp V_0$ для всех $\nu=1,\dots,m-1$ и $\langle\psi^{(\nu)}(\cdot+k),\psi^{(\mu)}(\cdot+l)\rangle=\delta_{\nu\mu}\delta_{kl}$ для всех $k,l\in\mathbb{Z}^d$ и всех $\nu,\mu=1,\dots,m-1$.

Теорема. *Пусть $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}\subset L_2(\mathbb{R}^2)$ — КМА Хаара с масштабирующей функцией*

$$\chi_{[0,1]^2}(x,y):=\begin{cases}1, & \text{если } (x,y)\in[0,1]\times[0,1],\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin[0,1]\times[0,1]\end{cases}$$

и матричным коэффициентом расширения $M=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ и пусть Θ — кусочно-постоянная всплеск-система, сгенерированная набором всплеск-функций

$$\eta_i(x,y)=\begin{cases}a_{i1}, & \text{если } (x,y)\in[0,1/2]\times[0,1/2],\\ a_{i2}, & \text{если } (x,y)\in[0,1/2]\times[1/2,1],\\ a_{i3}, & \text{если } (x,y)\in[1/2,1]\times[1/2,1],\\ a_{i4}, & \text{если } (x,y)\in[1/2,1]\times[0,1/2],\end{cases} \tag{1}$$

$i=\overline{1,3}$ (рис. 1), заданных на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, где $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$ некоторые вещественные числа. Тогда либо для a_{ij} справедливы равенства

$$\begin{gathered}a_{11}=a_{12}=a_{13}=\lambda,\qquad a_{14}=-3\lambda,\qquad \text{где}\ \ \lambda\in\mathbb{R},\\ a_{i4}=0,\qquad a_{i3}=-a_{i1}-a_{i2},\qquad i=2,3,\\ 2a_{21}a_{31}+2a_{22}a_{32}+a_{21}a_{32}+a_{22}a_{31}=0,\end{gathered} \tag{2}$$

т. е. достаточно четырех параметров, чтобы вычислить все a_{ij}, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$, либо

$$\begin{gathered}a_{i1}=\frac{\cos\alpha_i}{\sqrt3}-\frac{2\sin\alpha_i\cos\beta_i}{\sqrt6},\qquad a_{i2}=\frac{\cos\alpha_i}{\sqrt3}+\frac{\sin\alpha_i\cos\beta_i}{\sqrt2}+\frac{\sin\alpha_i\sin\beta_i}{\sqrt6},\\ a_{i3}=\frac{\cos\alpha_i}{\sqrt3}-\frac{\sin\alpha_i\cos\beta_i}{\sqrt2}+\frac{\sin\alpha_i\sin\beta_i}{\sqrt6},\end{gathered} \tag{3}$$

где $0\le\alpha_i\le\pi$ и $0\le\beta_i\le2\pi$, $i=\overline{1,3}$, параметры, из которых независимыми будут только α_2,α_3.

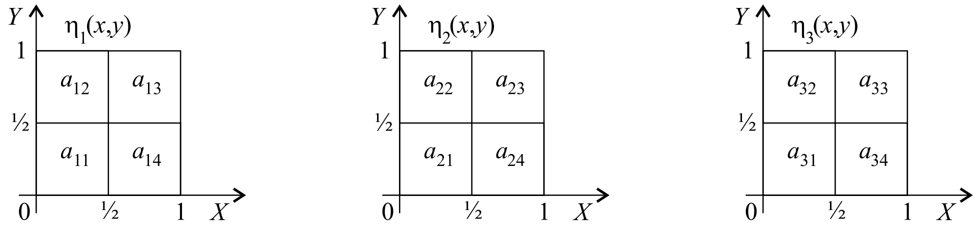

Рис. 1

Доказательство. Из того что $\eta_i(x,y), i=\overline{1,3}$, образуют набор всплеск-функций, следует:

$$\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=0,\\ a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=0,\\ a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}+(a_{11}+a_{12}+a_{13})(a_{21}+a_{22}+a_{23})=0,\\ a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}+(a_{21}+a_{22}+a_{23})(a_{31}+a_{32}+a_{33})=0,\\ a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}+(a_{11}+a_{12}+a_{13})(a_{31}+a_{32}+a_{33})=0. \end{cases}$$

Введем обозначения: $\mathbf{a_1} := (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\mathbf{a_2} := (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $\mathbf{a_3} := (a_{31}, a_{32}, a_{33})$, $\mathbf{1} := (1, 1, 1)$. Тогда последняя система примет вид

$$\begin{cases} \langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\rangle+\langle\mathbf{a_1},\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{a_2},\mathbf{1}\rangle=0,\\ \langle\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\rangle+\langle\mathbf{a_2},\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{a_3},\mathbf{1}\rangle=0,\\ \langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_3}\rangle+\langle\mathbf{a_1},\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{a_3},\mathbf{1}\rangle=0, \end{cases} \qquad (4)$$

где запись $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Без ограничения общности можно считать, что $|\mathbf{a_1}| = |\mathbf{a_2}| = |\mathbf{a_3}| = 1$, где $|\mathbf{a_i}| = \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2}$, $i = \overline{1,3}$. Обозначим через α_1, α_2, α_3 углы между вектором $\mathbf{1}$ и векторами $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ соответственно, $0 \le \alpha_i \le \pi$, $i = \overline{1,3}$.

Таким образом, решением системы (3) являются координаты трех векторов $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ единичной длины, которые можно рассматривать в качестве образующих трех конусов с общей вершиной в начале координат, общей осью $x_1 = x_2 = x_3$ и углами между осью и образующими, равными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ соответственно (рис. 2).

От исходной системы координат $OX_1X_2X_3$ перейдем к системе $OX_1'X_2'X_3'$, выбрав ось OX_1' по направлению вектора $\mathbf{1} := (1, 1, 1)$, а оси OX_2' и OX_3' в плоскости, перпендикулярной этому вектору:

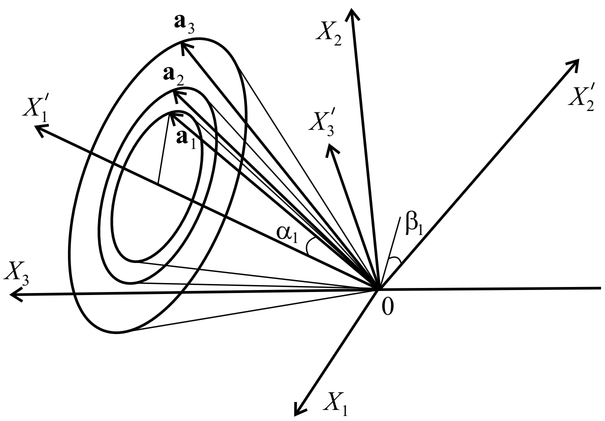

Рис. 2

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{-2}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'\\ x_2'\\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Затем выразим новые координаты векторов $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ с помощью параметров $0 \le \alpha_i \le \pi$, $0 \le \beta_i \le 2\pi$, $i = \overline{1,3}$:

$$\begin{cases} a_{i1}' = \cos\alpha_i,\\ a_{i2}' = \sin\alpha_i\cos\beta_i,\\ a_{i3}' = \sin\alpha_i\sin\beta_i, \end{cases}$$

где α_i — угол между вектором $\mathbf{a_i}$ и осью OX_1', β_i — угол между проекцией вектора $\mathbf{a_i}$ на плоскость $X_2'OX_3'$ и осью OX_2'. Система уравнений (4) примет вид

$$\begin{cases} 4\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos(\beta_1-\beta_2)=0,\\ 4\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\sin\alpha_2\sin\alpha_3\cos(\beta_2-\beta_3)=0,\\ 4\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_3\cos(\beta_1-\beta_3)=0. \end{cases}$$

В случае, когда один из синусов $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$ или $\sin\alpha_3$ равен нулю, например, $\sin\alpha_1 = 0$, получаем, что $\mathbf{a_1}$ коллинеарен $\mathbf{1}$: $\mathbf{a_1} = \lambda\mathbf{1}$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Тогда из (4) следует: $\mathbf{a_2} \perp \mathbf{1}$, $\mathbf{a_3} \perp \mathbf{1}$, $\mathbf{a_2} \perp \mathbf{a_3}$. Таким образом, мы получаем систему из трех векторов, один из которых коллинеарен OX_1', а два других лежат в плоскости $X_2'OX_3'$ (т. е. их координаты удовлетворяют уравнению $x_1 = x_2 = x_3 = 0$) и перпендикулярны друг другу: $a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$. Откуда и следуют равенства (2).

Если ни один из синусов $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_3$ не равен нулю, то можно записать систему в виде

$$\begin{cases} \cos(\beta_1-\beta_2)=-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2,\\ \cos(\beta_2-\beta_3)=-4\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3,\\ \cos(\beta_1-\beta_3)=-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_3. \end{cases} \qquad (5)$$

Найдем условия, при которых последняя система разрешима. Используя формулы

$$\cos(\beta_2-\beta_3)=\cos(\beta_1-\beta_2)\cos(\beta_1-\beta_3)+\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\beta_1-\beta_3)$$

и (4), получим равенство $-4\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3=16\operatorname{ctg}^2\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3+\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\beta_1-\beta_3)$, или

$$\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\beta_1-\beta_3)=-4\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3(1+4\operatorname{ctg}^2\alpha_1). \tag{6}$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат, воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и двумя первыми уравнениями системы (5) и после несложных преобразований получим:

$$1-16\operatorname{ctg}^2\alpha_1\operatorname{ctg}^2\alpha_2-16\operatorname{ctg}^2\alpha_1\operatorname{ctg}^2\alpha_3-16\operatorname{ctg}^2\alpha_2\operatorname{ctg}^2\alpha_3-128\operatorname{ctg}^2\alpha_1\operatorname{ctg}^2\alpha_2\operatorname{ctg}^2\alpha_3=0. \tag{7}$$

В качестве свободных переменных выберем α_2,α_3. Тогда α_1 вычисляется из равенства (7). Заметим, что если $\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\tilde\beta_3$ — решения системы (5), то $\tilde\beta_1+\mu,\tilde\beta_2+\mu,\tilde\beta_3+\mu$, где μ — действительное число, также являются решениями. Положим сначала β_1 равным нулю. Решим систему относительно β_2,β_3, выбирая знаки арккосинусов в зависимости от заданных α_2,α_3. Если оба угла α_2,α_3 лежат либо в первой координатной четверти, либо во второй, т. е.

$$\begin{cases}0<\alpha_2<\pi/2,\\0<\alpha_3<\pi/2\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\pi/2<\alpha_2<\pi,\\\pi/2<\alpha_3<\pi,\end{cases}$$

то, исходя из формулы (6), должно выполняться неравенство $\sin\beta_2\sin\beta_3<0$. Тогда в формулах для углов β_2,β_3 нужно брать арккосинусы с разными знаками, т. е.

$$\begin{cases}\beta_2=\arccos(-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2),\\\beta_3=-\arccos(-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_3)\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\beta_2=-\arccos(-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2),\\\beta_3=\arccos(-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_3).\end{cases}$$

Если один из углов α_2 или α_3 лежит в первой координатной четверти, а другой во второй, т. е.

$$\begin{cases}0<\alpha_2<\pi/2,\\\pi/2<\alpha_3<\pi\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\pi/2<\alpha_2<\pi,\\0<\alpha_3<\pi/2,\end{cases}$$

то должно выполняться неравенство $\sin\beta_2\sin\beta_3>0$. Берем арккосинусы с одинаковыми знаками, т. е.

$$\begin{cases}\beta_2=\arccos(-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2),\\\beta_3=\arccos(-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_3)\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\beta_2=-\arccos(-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2),\\\beta_3=-\arccos(-4\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_3).\end{cases}$$

При $\alpha_2=\pi/2$ или $\alpha_3=\pi/2$, если α_1 выбран так, что $\operatorname{ctg}\alpha_1=\dfrac{1}{4\operatorname{ctg}\alpha_3}$, то решениями системы будут

$$\begin{cases}\beta_2=\pi/2,\\\beta_3=\pi\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\beta_2=3\pi/2,\\\beta_3=\pi.\end{cases}$$

А если α_1 выбран так, что $\operatorname{ctg}\alpha_1=-\dfrac{1}{4\operatorname{ctg}\alpha_3}$, то решениями системы будут

$$\begin{cases}\beta_2=\pi/2,\\\beta_3=0\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\beta_2=3\pi/2,\\\beta_3=0.\end{cases}$$

Таким образом, мы вычислили углы β_2,β_3, при условии, что $\beta_1=0$. Если $\beta_1=\mu$, где $\mu\in\mathbb{R}$ и $0<\mu<2\pi$, то мы к найденным значениям β_2,β_3 должны прибавить число μ. Вернувшить теперь к первоначальным координатам, получим требуемые выражения для a_{ij}, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$ (формулы (3)). $\square$

Определение 5. Всплеск-функция нескольких переменных называется *несепарабельной*, если она не является тензорным произведением функций одной переменной.

Рассмотрим теперь случай несепарабельного всплеск-базиса, порожденного КМА Хаара.

Следствие 1. *Если параметры α_i, β_i, $i = \overline{1,3}$ не удовлетворяют равенству*

$$\frac{4\cos^2\alpha_i}{3} + \frac{2\sin\alpha_i\cos\alpha_i\cos\beta_i}{\sqrt{6}} + \frac{2\sin\alpha_i\cos\alpha_i\sin\beta_i}{3\sqrt{2}} + \frac{\sin^2\alpha_i\sin\beta_i\cos\beta_i}{\sqrt{3}} - \frac{\sin^2\alpha_i\sin^2\beta_i}{3} = 0, \qquad (8)$$

то соответствующий всплеск-базис является несепарабельным.

Доказательство. Функции $\eta_i(x,y)$, $i = \overline{1,3}$, будут несепарабельными только в случае, когда не выполнено равенство:

$$a_{i1}a_{i3} = a_{i2}a_{i4}, \qquad \text{или} \qquad a_{i1}a_{i3} + a_{i2}(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) = 0, \qquad i = \overline{1,3}. \qquad (9)$$

Действительно, пусть, например, функция $\eta_i(x,y)$ является тензорным произведением функций $f(x)$ и $g(y)$, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$. Очевидно, что на интервалах $(0,1/2)$ и $(1/2,1)$ функции $f(x)$ и $g(y)$ являются константами. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} b_1, & \text{при } x \in (0,1/2), \\ b_2, & \text{при } x \in (1/2,1) \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(y) = \begin{cases} c_1, & \text{при } y \in (0,1/2), \\ c_2, & \text{при } y \in (1/2,1). \end{cases}$$

Тогда справедливы равенства: $c_1b_1 = a_{11}$, $c_1b_2 = a_{14}$, $c_2b_1 = a_{12}$, $c_2b_2 = a_{13}$. Выразив из первого равенства c_1 и подставив его во второе, получим $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{a_{14}}{a_{11}}$. Аналогично, используя третье и четвертое равенства, $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{a_{13}}{a_{12}}$. Откуда и следует равенство (9).

Подставим (3) в равенство (9) и после несложных арифметических вычислений получим равенство (8). □

Практический интерес представляют случаи, когда некоторые из коэффициентов a_{ij} равны нулю. Рассмотрим случай, когда для каждой функции ровно один из коэффициентов равен 0.

Следствие 2. *Набор всплеск-функций* (1) *с вещественными значениями, из которых ровно один для каждой функции равен нулю, может иметь только один из следующих видов* (*см. рис.* 1): 1) $a_{14} = a_{21} = a_{32} = 0$; 2) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$; 3) $a_{12} = a_{23} = a_{34} = 0$; 4) $a_{13} = a_{24} = a_{31} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим четыре варианта расположения нулей (см. рис. 1): 1) $a_{14} = a_{21} = a_{31} = 0$; 2) $a_{14} = a_{21} = a_{32} = 0$; 3) $a_{14} = a_{21} = a_{34} = 0$; 4) $a_{14} = a_{22} = a_{32} = 0$.

Остальные случаи получаются из них одновременной перестановкой коэффициентов по часовой стрелке или перенумерованием функций.

Рассмотрим каждый случай подробно и вычислим ненулевые коэффициенты a_{ij}, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$. Из (3) видно, что

- $a_{i1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin\beta_i = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha_i}{\sqrt{2}}$ (случай $\sin\alpha_i = 0$, рассмотренный ранее, не совпадает ни с одним из вышеупомянутых вариантов);
- $a_{i2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sin\left(\beta_i + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha_i$;
- $a_{i3} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sin\left(\beta_i - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha_i$;
- $a_{i4} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\alpha_i = 0$.

Для первого варианта расположения нулей имеем $\operatorname{ctg}\alpha_1 = 0$, $\sin\beta_2 = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha_2}{\sqrt{2}}$, $\sin\beta_3 = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha_3}{\sqrt{2}}$.

Система (5) примет вид

$$\begin{cases} \cos(\beta_1 - \beta_2) = 0, \\ \cos(\beta_2 - \beta_3) = -4\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3, \\ \cos(\beta_1 - \beta_3) = 0. \end{cases}$$

Из условия (7) следует, что $\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3 = \pm 1/4$. Тогда либо $\cos(\beta_2 - \beta_3) = -1 \;\Rightarrow\; \beta_2 - \beta_3 = \pm\pi \;\Rightarrow\; \sin\beta_2\sin\beta_3 < 0$, но $\sin\beta_2\sin\beta_3 = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3 = 1/8 > 0$, либо $\cos(\beta_2 - \beta_3) = 1 \Rightarrow \beta_2 = \beta_3 \;\Rightarrow\; \sin\beta_2 = \sin\beta_3 \;\Rightarrow\; \operatorname{ctg}\alpha_2 = \operatorname{ctg}\alpha_3$, но $\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3 = -1/4$. В обоих случаях получили противоречия. Следовательно, для этого варианта не существуют вещественные значения a_{ij}.

Рассмотрим второй вариант. В этом случае

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = 0, \qquad \sin\beta_2 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_2}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta_3\right) = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha_3}{\sqrt{2}}, \qquad (10)$$

и система (5) имеет такой же вид, как и в первом варианте.

1. Если $\operatorname{ctg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_3 = 1/4$, тогда $\beta_2 - \beta_3 = \pm\pi \ \Rightarrow\ \beta_2 - (\beta_3 + \pi/3) = 2\pi/3$ или $\beta_2 - (\beta_3 + \pi/3) = -4\pi/3$.

Следовательно, $\cos(\beta_2 - (\beta_3 + \pi/3)) = -1/2$ и $\sin(\beta_2 - (\beta_3 + \pi/3)) = \sqrt{3}/2$. Воспользуемся формулами сложения и равенствами (10):

$$\cos\beta_2 \cos\left(\beta_3 + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_3 = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\operatorname{ctg}\alpha_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\beta_3 + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\beta_2 \frac{\operatorname{ctg}\alpha_3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решив систему из двух последних уравнений, получим

$$\cos\beta_2 = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{15}}{4\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha_3}, \qquad \cos\left(\beta_3 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3} \mp \sqrt{15}}{4\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha_2}.$$

Соответствующие параметры α_2, α_3 удовлетворяют равенствам

$$\operatorname{ctg}^2\alpha_2 = \frac{1}{14 \pm 2\sqrt{45}} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{ctg}^2\alpha_3 = \frac{1}{14 \mp 2\sqrt{45}}.$$

2. Если $\operatorname{ctg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_3 = -1/4$, тогда $\beta_2 = \beta_3$. Используя равенство $\sin(\pi/3 + \beta_3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta_3 + \dfrac{1}{2}\sin\beta_3$, получим $\cos\beta_3 = -\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha_3 + \operatorname{ctg}\alpha_2}{\sqrt{6}}$. Соответствующие параметры α_2, α_3 удовлетворяют равенствам:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha_2 = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{8} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{ctg}^2\alpha_3 = \frac{1}{14 \mp 6\sqrt{5}}.$$

Для третьего варианта расположения нулей имеем $\operatorname{ctg}\alpha_1 = 0$, $\operatorname{ctg}\alpha_3 = 0$, $\sin\beta_2 = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha_2}{\sqrt{2}}$. Система (5) примет вид

$$\begin{cases} \cos(\beta_1 - \beta_2) = 0, \\ \cos(\beta_2 - \beta_3) = 0, \\ \cos(\beta_1 - \beta_3) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что эта система не имеет решений.

Рассматривая четвертый случай аналогично первому, приходим к выводу, что для этого случая также не существуют ненулевые вещественные значения a_{ij}.

Следовательно, только для второго варианта расположения нулей (и получающихся из него одновременной перестановкой коэффициентов по часовой стрелке) существуют вещественные a_{ij}. □

Замечание. В книге И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова, М.А. Скопиной «Теория всплесков» рассматривается следующий подход к построению всплеск-функций. Для его описания нам потребуются некоторые понятия.

1. Если A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, будем говорить, что векторы $k, n \in \mathbb{Z}^d$ сравнимы по модулю A, если $k - n = Al, l \in \mathbb{Z}^d$. Целочисленная решетка $\mathbb{Z}^d$ разбивается на классы смежности относительно введенного отношения сравнения. Множество, содержащее в себе ровно по одному представителю каждого класса смежности, будем называть *множеством цифр матрицы* A [1, с. 89].

2. Пусть φ — масштабирующая функция для некоторого КМА. Тогда справедливо масштабирующее уравнение:

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n m^{1/2} \varphi(M \cdot + n), \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |h_n|^2 < \infty,$$

или в образах Фурье: $\hat{\varphi}(\xi) = m_0(M^{*-1}\xi)\hat{\varphi}(M^{*-1}\xi)$, где $m_0(\xi) = m^{-1/2} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n e^{2\pi i(n,\xi)}$ — маска [1, с. 94].

Утверждение [1, с. 138]. *Пусть КМА $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ порожден масштабирующей функцией φ с маской m_0, система $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ является ортонормированной. Если $\psi^{(\nu)}, \nu = 1, \dots, m-1$ — набор* *всплеск-функций, определяемый равенствами* $\hat{\psi}^{(\nu)}(\xi) = m_\nu(M^{*-1}\xi)\hat{\varphi}(M^{*-1}\xi)$, *с такими масками* $m_\nu, \nu = 1, \ldots, m-1$, *что при почти всех* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *матрица*

$$\mathbf{M} := \{m_\nu(\xi + M^{*-1}s_k)\}_{\nu,k=0}^{m-1},$$

где $\{s_0, \ldots, s_{m-1}\}$ — *произвольный набор цифр матрицы* M^*, *унитарна, то функции* $\psi^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$ *образуют набор всплеск-функций.*

Если применить такой подход к описанному выше случаю КМА Хаара с масштабирующей функцией $\chi_{[0,1]^2}(x,y)$ и матричным коэффициентом расширения $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, мы получим, что функции (1) должны удовлетворять равенствам

$$\hat{\eta}_i(\xi) = m_i(M^{-1}\xi)\hat{\chi}_{[0,1]^2}(M^{-1}\xi), \qquad i = \overline{1,3}, \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Откуда, учитывая, что $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\hat{\chi}_{[0,1]^2}(\xi_1,\xi_2) = \dfrac{(e^{-2\pi i\xi_1} - 1)(e^{-2\pi i\xi_2} - 1)}{-4\pi^2\xi_1\xi_2}$, можно вычислить функции $m_i(\xi_1,\xi_2)$, $i = \overline{1,3}$. Например,

$$m_1(\xi_1,\xi_2) = \frac{a_{11}}{4} + \frac{a_{12}(e^{-4\pi i\xi_2} - e^{-2\pi i\xi_2})}{4(e^{-2\pi i\xi_2} - 1)} + \frac{a_{13}(e^{-4\pi i\xi_1} - e^{-2\pi i\xi_1})(e^{-4\pi i\xi_2} - e^{-2\pi i\xi_2})}{4(e^{-2\pi i\xi_1} - 1)(e^{-2\pi i\xi_2} - 1)} + \\ + \frac{a_{14}(e^{-4\pi i\xi_1} - e^{-2\pi i\xi_1})}{4(e^{-2\pi i\xi_1} - 1)}$$

и т. д. Таким образом, для построения функций (1), изображенных на рис. 1, нужно найти такие коэффициенты a_{ij}, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$, чтобы матрица $\mathbf{M} = \{m_i(\xi + M^{-1}s_k)\}_{i,k=0}^{3}$, где в качестве цифр матрицы M $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ взяты, например, $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, была унитарной. Решить такую задачу весьма непросто.

Библиографический список

1. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
2. *Hur Y., Ron A.* New constructions of piecewise-constant wavelets // Electronic Transactions on Numerical Analysys. 2006. Vol. 25. P. 138–157.

УДК 519.83

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ИГРАХ С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Т.Ф. Савина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: suri-cat@yandex.ru

Для игр n лиц с отношениями предпочтения введены различные типы оптимальных решений и указаны элементарные свойства этих решений. Получено достаточное условие непустоты C_α-ядра.

Ключевые слова: игра с отношениями предпочтения, ситуация общего равновесия, равновесие по Нэшу, допустимый (вполне допустимый) исход.

Optimality Solutions in Games with Preference Relations

T.F. Savina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: suri-cat@yandex.ru

For n person games with preference relations some types of optimality solutions are introduced. Elementary properties of their solutions are considered. One sufficient condition for nonempty C_α-core is found.

Key words: game with preference relations, equilibrium points, Nash equilibrium, acceptable (quite acceptable) outcome.