УДК 519.65, 517.17, 512.56

ОБ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ПОЛУГРУППЫ УВЕЛИЧИВАЮЩИХ МОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Л. Крюкова

Вологодский государственный педагогический университет,
кафедра алгебры, геометрии и теории обучения математике
E-mail: kryukovanastya@yahoo.com

В некоторых специальных классах упорядоченных топологических пространств получена характеризация округлений как крайних точек множества неувеличивающих изотонных отображений, доказана их устойчивость по Хайерсу – Уламу.

Ключевые слова: округление, топологические частично упорядоченные пространства, крайние точки, устойчивость по Хайерсу – Уламу.

On Idempotent Elements of Semigroup of Increasing Monotonous Mappings

A. L. Kryukova

Vologda State Pedagogical University,
Chair of Algebra, Geometry and Theory
of Learning Mathematics
E-mail: kryukovanastya@yahoo.com

In some special classes of ordered topological spaces we characterize roundings as extreme points of set of non increasing isotonic mappings, and establish their stability in Hyers – Ulam sense.

Key words: rounding, ordered topological spaces, extreme points, stability in Hyers – Ulam sense.

ВВЕДЕНИЕ

В практике компьютерных вычислений одна из наиболее часто встречающихся операций — это округление (промежуточных) результатов. Истоки аксиоматической теории округлений содержатся в работе U. Kulisch [1], который определил их как отображения линейно упорядоченного множества в его подмножество, удовлетворяющие некоторым естественным требованиям (аксиомам). Понятие интервального округления было сформулировано и представлено в работах [2, 3]. В данной работе округления изучаются в рамках общей теории топологических частично упорядоченных пространств.

Будем рассматривать в частично упорядоченном пространстве $(X, \leq)$ совокупность $IE(X)$ всех отображений φ пространства X в себя, для которых выполнены следующие два условия:

1) $x \leq \varphi(x)$,

2) $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$, если $x_1 \leq x_2$.

Таким образом, $IE(X)$ — это множество всех увеличивающих возрастающих отображений X в себя.

Отображение $\varphi \in IE(X)$ называется *замыканием* [4] (или *округлением*), если оно идемпотентно, т. е. удовлетворяет условию

3) $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

Мы покажем, что если X — подмножество линейного пространства, и упорядоченность задается выделением «положительного» конуса, то всякое замыкание — крайняя точка выпуклого множества $IE(X)$. Для случая, когда X — прямая с естественным порядком, будет доказано и обратное утверждение. Поскольку крайние точки множества, при выполнении некоторых дополнительных топологических условий, порождают это множество (в смысле теорем Крейна – Мильмана, или Шоке), это указывает на важную роль замыканий в структуре пространства увеличивающих возрастающих отображений.

В последнем разделе работы рассматривается устойчивость множества замыканий по Хайерсу – Уламу.

Напомним, что общее (неформальное) определение устойчивости по Хайерсу – Уламу класса отображений, выделяемого некоторым условием, звучит следующим образом [5, с. 77]: «отображения, почти удовлетворяющие данному условию, близки к отображениям, в точности ему удовлетворяющим». В применении к замыканиям, которые выделяются из $IE(X)$ свойством идемпотентности, это означает следующее.

Пусть упорядоченное пространство $(X, \leq)$ наделено метрикой ρ, согласованной с порядком. Будем говорить, что класс всех замыканий на $(X, \leq)$ *устойчив по Хайерсу – Уламу в классе* $\mathcal{F} \subset IE(X)$ [5], если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $f \in \mathcal{F}$ и $\rho(f(f(x)), f(x)) < \delta$ для всех x, то $\rho(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon$ для всех x, где φ — некоторое замыкание.

Мы докажем, что для случая $X = \mathbb{R}$ множество замыканий устойчиво в классе всех непрерывных слева отображений из $IE(X)$.

1. ЗАМЫКАНИЯ И КРАЙНИЕ ТОЧКИ

Пусть X — выпуклое подмножество линейного вещественного пространства $\mathcal{X}$, а упорядочение задается выпуклым конусом $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$: $x \leq y$, если $y - x \in \mathcal{K}$. В этих условиях $IE(X)$ обладает выпуклой структурой, т. е. является выпуклым подмножеством линейного пространства всех отображений из X в $\mathcal{X}$.

Теорема 1. *Всякое замыкание в* $(X, \leq_{\mathcal{K}})$ *является крайней точкой в* $IE(X)$.

Доказательство. Пусть φ — произвольное замыкание. Если оно не является крайней точкой, то найдутся отображения $f_1, f_2 \in IE(X)$ такие, что $\varphi = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$.

Докажем, прежде всего, что неподвижные точки отображения φ являются неподвижными для функций f_1 и f_2. В самом деле, если $\varphi(x) = x$, то $f_1(x) - x = x - f_2(x)$. Но левая часть этого равенства принадлежит $\mathcal{K}$, а правая принадлежит $-\mathcal{K}$. Так как пересечение $\mathcal{K}$ и $-\mathcal{K}$ равно $\{\theta\}$, то обе части равны нулю, т. е. $f_i(x) = x$, где $i = 1, 2$.

Поскольку точка $\varphi(x)$ всегда неподвижна для замыкания φ, то для произвольного $x \in X$ имеем: $f_i(\varphi(x)) = \varphi(x)$. Так как $x \leq \varphi(x)$, то $f_i(x) \leq f_i(\varphi(x)) = \varphi(x)$. Таким образом, оба отображения f_i мажорируются отображением φ. Значит, в равенстве $f_1(x) - \varphi(x) = \varphi(x) - f_2(x)$ правая часть принадлежит $\mathcal{K}$, а левая принадлежит $-\mathcal{K}$. Снова, применяя свойство $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{\theta\}$, заключаем, что обе части равны нулю. Таким образом, $f_i = \varphi$ и φ является крайней точкой. □

Рассмотрим теперь в качестве исходного пространства $(X, \leq)$ вещественную прямую $\mathbb{R}$ с обычным порядком и топологией. В этом случае полугруппа $IE(\mathbb{R})$ состоит из всех неубывающих функций на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $f(x) \geq x$.

Заметим, что теорема 1 уже в этой ситуации не допускает обращения. В самом деле, рассмотрим функцию $\gamma(x)$, определенную равенствами: $\gamma(x) = 0$ при $x < 0$, $\gamma(x) = 1$ при $x \in [0; 1]$, $\gamma(x) = x$ при $x > 1$. Так как $\gamma(\gamma(-1)) = \gamma(0) = 1 \neq 0 = \gamma(-1)$, то γ не является идемпотентной. С другой стороны, γ — крайняя точка множества $IE(\mathbb{R})$. В самом деле, пусть $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, где α, $\beta \in IE(\mathbb{R})$. В частности, $\alpha(x) + \beta(x) = 0$ при $x < 0$. Если $\alpha(x) > 0$ при каком-нибудь $x < 0$, то $\lim\limits_{x \to 0-} \alpha(x) > 0$, откуда $\lim\limits_{x \to 0-} \beta(x) < 0$. Следовательно, найдется $x < 0$ такой, что $\beta(x) < x$, а это невозможно. Мы доказали, что $\alpha(x) \leq 0$ при $x < 0$. Разумеется, то же верно и для $\beta(x)$, поэтому условие $\alpha(x) + \beta(x) = 0$ влечет $\alpha(x) = \beta(x) = 0$, т. е. обе функции совпадают с $\gamma(x)$ на $(-\infty, 0)$. Далее, на отрезке $[0, 1]$ выполнено условие $\alpha(x) + \beta(x) = 2$, поэтому если $\alpha(1) > 1$, то $\beta(1) < 1$, что невозможно. Итак, $\alpha(1) = 1$ откуда $\alpha(x) \leq 1$ и аналогично $\beta(x) \leq 1$ для всех $x \in [0, 1]$. Следовательно $\alpha(x) = \beta(x) = 1$, т. е. обе функции совпадают с $\gamma(x)$ на $[0, 1]$. Наконец, так как $\alpha(x) \geq x$, $\beta(x) \geq x$ и $\alpha(x) + \beta(x) = 2x$ на $[1, \infty)$, то $\alpha(x) = \beta(x) = x = \gamma(x)$ и на этом интервале.

Функцию $\gamma(x)$ можно, однако, «несущественно» изменить таким образом, что она станет идемпотентной. Для этого достаточно положить $\gamma(0) = 0$. Мы покажем, что это общий факт: если функция является крайней точкой в $IE(\mathbb{R})$, то, изменяя ее значения на некотором (не более чем счетном) множестве точек разрыва, можно получить идемпотентную функцию. Алгоритм изменения весьма прост: функцию достаточно сделать непрерывной слева.

Заметим, что крайняя функция в любой точке непрерывна хотя бы с одной стороны. В самом деле, если $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) < f(x_0) < \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, то $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, где каждая из функций f_i совпадает с f везде, кроме точки x_0, а в этой точке отличается от $f(x_0)$ на $\pm\varepsilon$, причем ε достаточно мало. Обозначим для краткости через $IE_1(\mathbb{R})$ множество всех функций из $IE(\mathbb{R})$, которые в каждой точке разрыва непрерывны либо слева, либо справа.

Для любой монотонной функции $f(x)$ обозначим через $Vf(x)$ функцию, непрерывную слева и совпадающую с $f(x)$ во всех ее точках непрерывности. Нетрудно видеть, что отображение $V : f \mapsto Vf$ сохраняет $IE(\mathbb{R})$ и является аффинным. Будем называть две функции f_1, f_2 *эквивалентными*, если

$Vf_1 = Vf_2$. Мы покажем, что крайние точки множества $IE(\mathbb{R})$ — это те и только те функции из $IE_1(\mathbb{R})$, которые эквивалентны идемпотентным.

Лемма 1. *Функция $f(x) \in IE_1(\mathbb{R})$ является крайней точкой множества $IE(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда таковой является $Vf(x)$.*

Доказательство. Пусть f не является крайней, тогда найдутся функции $f_1 \neq f_2$ из $IE(\mathbb{R})$ такие, что $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Так как оператор V аффинный, то $Vf = \frac{1}{2}(Vf_1 + Vf_2)$. Если $Vf_1 \neq Vf_2$, то Vf не является крайней, что и требуется.

Предположим, что $Vf_1 = Vf_2$, тогда обе функции f_i совпадают с f в общих точках непрерывности (а также в точках непрерывности слева). Пусть x_0 — произвольная точка. Так как сколь угодно близко слева от нее находятся общие точки непрерывности (множество точек разрыва монотонной функции счетно), то $f_i(x_0) \geq \lim_{x\to x_0-} f_i(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$. Так как $f(x_0) = \frac{1}{2}(f_1(x_0) + f_2(x_0))$, то $f_i(x_0) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0-} f_i(x)$. Мы доказали, что функции f_i непрерывны слева — $f_i = Vf_i$, $f_1 = f_2$ — противоречие.

Обратно, пусть функция $Vf(x)$ не крайняя, тогда $Vf = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$, $g_1 \neq g_2$. Проведенное рассуждение показывает, что функции g_i не могут совпадать с f во всех точках непрерывности. Следовательно, изменив их произвольным образом на множестве точек разрыва, мы получим несовпадающие функции. Но если положить их в этих точках равными $f(x)$, получим равенство $f = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$, показывающее, что f — не крайняя точка. □

Доказанный результат позволяет ограничить наши рассмотрения функциями из $IE(\mathbb{R})$, являющимися непрерывными слева. Обозначим множество всех таких функций через $LIE(\mathbb{R})$.

Напомним, что подмножество M выпуклого множества N называется его *гранью*, если из условий $x \in M$, $x = \alpha y + (1-\alpha)z$, y, $z \in N$, $\alpha \in (0;1)$, следует, что $y, z \in M$.

Лемма 2. *$LIE(\mathbb{R})$ является а) выпуклой гранью множества $IE(\mathbb{R})$; б) подполугруппой в $IE(\mathbb{R})$.*

Доказательство. а) пусть $f(x)$ — непрерывная слева функция, а y и z из $IE(\mathbb{R})$ таковы, что $f = \alpha y + (1-\alpha)z$, где $\alpha \in (0;1)$. Докажем, что и $y, z \in LIE(\mathbb{R})$. Допустим противное: хотя бы одно из неравенств $\lim\limits_{x\to x_0-} y(x) \leq y(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} z(x) \leq z(x_0)$ является строгим. Домножив первое из неравенств на α, второе на $(1-\alpha)$ и сложив результаты, мы получим

$$\alpha \lim_{x\to x_0-} y(x) + (1-\alpha) \lim_{x\to x_0-} z(x) < \alpha y(x_0) + (1-\alpha) z(x_0),$$

а это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \neq f(x_0)$, что противоречит непрерывности слева функции f. Аналогично доказывается выпуклость множества $LIE(\mathbb{R})$.

б) достаточно показать, что композиция двух возрастающих непрерывных слева отображений также непрерывна слева. Пусть f, φ из $LIE(\mathbb{R})$. Фиксируя $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, положим $y_0 = f(x_0)$ и для него найдем такое $\sigma > 0$, что неравенство $y_0 - \sigma < y < y_0$ влечет $\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0)$. С другой стороны, ввиду непрерывности слева функции $f(x)$ в точке x_0 найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $x_0 - \delta < x < x_0$ влечет неравенство $y_0 - \sigma < f(x) < y_0$. Отсюда следует, что для таких значений x выполнено неравенство $\varphi(f(x_0)) - \varepsilon < \varphi(f(x)) < \varphi(f(x_0)) < \varepsilon$. □

Известно, что грань грани — грань. В частности, крайние точки (= одноточечные грани) множества $LIE(\mathbb{R})$ являются крайними точками и для $IE(\mathbb{R})$.

Приведем конструкцию идемпотентного отображения из $LIE(\mathbb{R})$. Пусть K — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$. Определим функцию $f_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, полагая $f_K(x) = \inf\{y \in K : x \leq y\}$.

Теорема 2. *Отображение $K \mapsto f_K$ устанавливает биекцию между множеством идемпотентных элементов полугруппы $LIE(\mathbb{R})$ и множеством всех неограниченных сверху замкнутых подмножеств прямой.*

Доказательство. Так как множество K предполагается неограниченным, отображение f_K определено корректно. Из замкнутости K следует, что $f_K(x) \in K$ для любого x. Очевидно, что $f_K(x) = x$, если и только если $x \in K$. Отсюда следует, что отображение f_K идемпотентно. Проверим, что оно непрерывно слева в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $x_0 \notin K$, тогда ввиду замкнутости K найдется интервал, содержащий x_0, для всех точек x которого $\{y \in K : y \geq x\} = \{y \in K : y \geq x_0\}$ и, значит, $f(x) = f(x_0)$, т. е. f постоянна на некотором интервале, содержащем x_0. Пусть $x_0 \in K$, тогда $f(x_0) = x_0$, $f(x) \geq x = x_0 - (x_0 - x) = f(x_0) - (x_0 - x)$ при $x < x_0$, и потому $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_0-} (f(x_0) - (x_0 - x)) = f(x_0)$. Обратное неравенство очевидно.

Так как K является множеством неподвижных точек для f_K, то отображение $K \to f_K$ инъективно. Докажем его сюръективность.

Пусть $f \in LIE(\mathbb{R})$ — идемпотентное отображение; обозначим через K множество его неподвижных точек. Так как $f(x) \geq x$ для любого x, то множество K неограничено сверху. Покажем, что оно замкнуто. Пусть $x_n \to x$, $x_n \in K$. Если среди x_n есть бесконечно много чисел, больших x, то можно считать (заменяя последовательность подпоследовательностью), что $x < x_n$ для всех n. В этом случае неравенство $x \leq f(x) \leq f(x_n) = x_n$ влечет $f(x) = x$, т. е. $x \in K$. Если же $x_n < x$ для всех, кроме конечного числа номеров, то по непрерывности слева получим, что $f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_n = x$, и снова $x \in K$. Замкнутость доказана.

Остается показать, что $f = f_K$. Для любого x точка $f(x)$ принадлежит множеству $M_x = \{y \in K : x \leq y\}$. Если в этом множестве есть элемент $y < f(x)$, то неравенства $x < y < f(x)$ дают — $f(x) \leq f(y) = y < f(x)$ — противоречие. Следовательно, $f(x)$ — наименьший элемент множества M_x, т. е. $f(x) = \inf\{y \in K : x \leq y\} = f_K(x)\}$. □

Пусть G — некоторое семейство функций на некотором множестве A и пусть A_0 — выделенное подмножество в A (например, граница, если ситуация топологическая). Функция $f \in G$ называется *A_0-крайней*, если из того что $f = \alpha f_1 + (1 - \alpha) f_2$, где $\alpha \in [0; 1]$, а функции $f_i \in G$ совпадают с f на A_0, следует, что $f_1 = f_2 = f$.

Лемма 3. *Пусть G — множество всех неубывающих непрерывных слева функций на интервале $A = [a, b]$. Обозначим через A_0 границу интервала, т. е. двухточечное множество $\{a, b\}$.*

Функция $f(x)$ является A_0-крайней в G тогда и только тогда, когда она принимает не более двух значений.

Доказательство. Если $f(x)$ постоянна на $[a, b]$, то она является A_0-крайней. В самом деле, пусть $f = \alpha f_1 + (1 - \alpha) f_2$, тогда у функции $f_1(x)$ на концах значения совпадают с $f(a) = f(b)$, а она монотонна — значит она постоянна и совпадает с $f(x)$. Аналогично, $f_2(x)$ также совпадает с $f(x)$.

Пусть $f(x)$ принимает два значения p, q: $f(a) = p < q = f(b)$, тогда существует $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x) = f(a)$ при $x \in [a, x_0]$, $f(x) = f(b)$ при $x \in (x_0, b]$.

Так как на отрезке $[a, x_0]$ функция $f_1(x)$ не убывает, то функция $f_2(x) = 2f(x) - f_1(x) = 2f(a) - f_1(x)$ не возрастает. Но она и не убывает — значит постоянна. Поскольку $f_2(a) = f(a)$, заключаем, что $f_2(x)$ совпадает с $f(x)$ на $[a, x_0]$. То же верно для $f_1(x)$. Аналогично для полуинтервала $(x_0, b]$.

Мы доказали, что если множество значений функции содержит не более двух элементов, то она является A_0-крайней. Докажем обратное.

Зафиксируем числа $p < q$ и обозначим через $G_{p,q}$ множество тех функций из G, для которых $f(a) = p$, $f(b) = q$. Разумеется, это выпуклое подмножество в G.

Для функции $f \in G_{p,q}$ определим меру μ на отрезке $[a, b]$, ставя каждому полуинтервалу $[u, v)$ в соответствие $\mu([u, v)) = f(v) - f(u)$ и продолжая стандартным образом на все борелевские множества. Функция f однозначно определяется мерой μ, поскольку $f(x) = p + \mu([a, x))$. Тем самым мы получаем аффинную биекцию множества $G_{p,q}$ на множество $\mathcal{M}$ всех счетно-аддитивных мер на отрезке $[a, b]$ таких, что $\mu([a, b]) = q - p$. Разумеется, крайние точки переходят в крайние точки. Но крайними точками множества $\mathcal{M}$ являются меры с одноточечным носителем, поскольку оно аффинно изоморфно множеству всех вероятностных мер.

Если носитель меры μ равен $\{x_0\}$, то $\mu([a, x)) = 0$ при $x \leq x_0$, $\mu([a, x)) = q - p$ при $x > x_0$. Значит, соответствующая функция $f(x) = p + \mu([x, x_0))$ принимает два значения: p и q.

Мы доказали, что для любых p, q крайними точками множества $G_{p,q}$ являются функции с двухэлементными множествами значений. Пусть теперь f — произвольная A_0-крайняя точка множества G. Положим $p = f(a)$, $q = f(b)$, тогда f по определению является крайней точкой множества $G_{p,q}$. Следовательно, множество значений функции f содержит не более двух элементов. □

Теперь мы можем доказать, что крайние точки множества $LIE(\mathbb{R})$ — это, в точности, ее идемпотентные элементы.

Теорема 3. *Функция $f \in LIE(\mathbb{R})$ является крайней точкой выпуклого множества $LIE(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $f(f(x)) = f(x)$.*

Доказательство. Так как $LIE(\mathbb{R}) \subset IE(\mathbb{R})$, то к $f(x) \in LIE(\mathbb{R})$ применима теорема 1: если $f(x)$ — идемпотентна, то она является крайней в $IE(\mathbb{R})$, а потому и в $LIE(\mathbb{R})$.

Пусть теперь $f(x)$ не идемпотентна, докажем, что она не является крайней точкой. По условию (неидемпотентности) найдутся такие u, v, что $f(u) = v$ и $v < f(v)$. Рассмотрим два случая.

1. Если на отрезке $[u, v]$ функция принимает более двух значений, тогда, согласно лемме 3, найдутся отличные от f непрерывные слева неубывающие функции $f_i(x)$ на этом отрезке такие, что $f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x))$, $f_i(u) = f(u)$, $f_i(v) = f(v)$. Продолжим их на все $\mathbb{R}$, считая, что вне $[u, v]$ они совпадают с f.

Проверим выполнение условия $f_i(t) \geq t$. Для тех значений t, которые лежат вне отрезка $[u, v]$, условие выполнено просто потому, что $f_i(t) = f(t)$. При $t \in [u, v]$ из неубывания f_i следует, что $f_i(t) \geq f_i(u) = v \geq t$. Таким образом, $f_i \in LIE(\mathbb{R})$, и так как f равна их полусумме на $\mathbb{R}$, то f не является крайней.

2. Предположим, что $f(x)$ принимает только два значения на $[u, v]$. Это значит, что $f(x) = v$ для всех $x \in [u; x_0]$ и $f(x) = f(v)$ для всех $x \in (x_0; v]$, где x_0 — некоторая точка интервала (u, v).

Если $f(x) = v$ для всех $x < u$, то определим функции $f_i(x)$, полагая $f_1(x) = v - \varepsilon$, $f_2(x) = v + \varepsilon$ при $x \leq x_0$ и считая, что $f_i(x) = f(x)$ при $x > x_0$. Ясно, что $f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x))$ и функции f_i непрерывны слева. Они являются неубывающими при $\varepsilon < f(v) - v$ и удовлетворяют условию $f_i(x) \geq x$ при $\varepsilon < v - x_0$.

Если же $f(x)$ принимает значения, меньшие v, то $\inf\{x : f(x) = v\} = u_1 > -\infty$. Рассмотрим два случая:

1) $f(u_1) < v$. В этом случае строим $f_i(x)$ аналогично предыдущему: на полуинтервале $(u_1, x_0]$ полагаем $f_1(x) = v - \varepsilon$, $f_2(x) = v + \varepsilon$, а в остальных точках $f_i(x) = f(x)$. Они являются неубывающими при $\varepsilon < \min\{v - f(u_1), f(v) - v\}$, и удовлетворяют условию $f_i(x) \geq x$ при $\varepsilon \leq v - x_0$.

2) $f(u_1) = v$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется в силу непрерывности $f(x)$ слева такая точка u_2, что $f(u_2) > v - \varepsilon$. Взяв $\varepsilon < v - x_0$, получим $f(u_2) > x_0$. Следовательно, $f(f(u_2)) \geq f(v) > f(u_2)$. Заменим точки u, v точками $u_2, f(u_2)$. На отрезке $(u_2, f(u_2))$ функция принимает больше двух значений (на самом деле, бесконечно много, так как этот участок содержит интервал (u_2, u_1), на котором $f(x) < v$ и $\lim\limits_{x \to u_1} f(x) = v$). Применяя уже доказанное, получим, что $f(x)$ не является крайней точкой. $\square$

Теперь мы можем получить полное описание множества крайних точек $IE(\mathbb{R})$.

Теорема 4. *Функция $f \in IE(\mathbb{R})$ является крайней точкой выпуклого множества $IE(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда она не имеет двусторонних разрывов и эквивалентна идемпотентному элементу из $IE(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть функция $f \in IE(\mathbb{R})$ является крайней точкой выпуклого множества $IE(\mathbb{R})$. Тогда, как отмечалось ранее, она в каждой точке непрерывна хотя бы с одной стороны. Согласно лемме 1 функция $Vf(x)$ также является крайней. Но Vf из $LIE(\mathbb{R})$ и, следовательно, является крайней точкой этого множества, поэтому она идемпотентна в силу теоремы 3. Таким образом, f эквивалентна идемпотентному элементу множества $IE(\mathbb{R})$.

Обратно, пусть функция f не имеет двусторонних разрывов и эквивалентна идемпотентному элементу g из $IE(\mathbb{R})$. По теореме 1 g — крайняя точка множества $IE(\mathbb{R})$. В частности, g не имеет двусторонних разрывов, так что по лемме 1 Vg — крайняя точка множества $IE(\mathbb{R})$. Далее, из определения эквивалентности $Vf = Vg$ — крайняя точка множества $IE(\mathbb{R})$. Снова, применяя лемму 1, заключаем, что f — крайняя точка множества $IE(\mathbb{R})$. $\square$

Таким образом, чтобы построить произвольный экстремальный элемент $f(x)$ множества $IE(\mathbb{R})$, нужно выбрать замкнутое неограниченное справа множество $K \subset \mathbb{R}$ и рассмотреть функции $f_K(x) = \inf\{y \in K : x \leq y\}$, $g_K(x) = \inf\{y \in K : x < y\}$ (они отличаются лишь в счетном множестве K_r «изолированных справа» точек множества K). Функция f должна совпадать с каждой из функций f_K и g_K на $\mathbb{R} \setminus K_r$, а в точках $x \in K_r$ ее значения произвольным образом выбираются из пары $\{f_K(x), g_K(x)\}$.

Рассмотрим теперь выпуклое множество $CIE(\mathbb{R})$ всех *непрерывных* функций из $IE(\mathbb{R})$. Так как множество неподвижных точек отображения f_K совпадает с K, то K является и множеством значений функции f_K. Следовательно, f_K может быть непрерывным лишь в том случае, если K связно, т. е. представляет собой замкнутый луч $[c, \infty)$, где $c \in \mathbb{R}$ (либо всю прямую — тогда отображение тождественно). Другими словами, непрерывные идемпотентные элементы полугруппы $CIE(\mathbb{R})$ — это функции f_c, определенные следующим образом:

$$f_c(x) = c, \quad \text{если} \quad x \leq c, \qquad \text{и} \qquad f_c(x) = x, \quad \text{если} \quad x \geq c. \tag{1}$$

Следствие. *Пусть $CIE(a,b)$ множество неубывающих непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющих условию $f(x) \geq x$ при всех $x \in [a,b]$. Его единственными крайними точками являются сужения на $[a,b]$ функций $f_c(x) = x$ из (1), где $c \in [a,b]$.*

Доказательство. Каждую функцию $f \in CIE(a,b)$ продолжим на $\mathbb{R}$, полагая $\tilde{f}(x) = f(a)$ при $x < a$, $\tilde{f}(x) = f(b)$ при $b < x \leq f(b)$, $\tilde{f}(x) = x$ при $x > f(b)$. Тогда $f \mapsto \tilde{f}$ является аффинным и инъективным отображением $CIE(a,b)$ в $LIE(\mathbb{R})$.

Докажем, что если f — крайняя точка в $CIE(a,b)$, то $\tilde{f}$ — крайняя точка в $LIE(\mathbb{R})$. Действительно, пусть $\tilde{f} = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$, где $g_i \in LIE(\mathbb{R})$. Обозначая через f_i сужение функции g_i на интервал $[a,b]$, получим, что $f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x))$.

Ясно, что функции $f_i(x)$ являются неубывающими, и $f_i(x) \geq x$. Докажем, что они непрерывны. В самом деле, если $\lim\limits_{x \to x_0-} f_1(x) = m < M = \lim\limits_{x \to x_0+} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \frac{1}{2}(m + \lim\limits_{x \to x_0-} f_2(x)) < \frac{1}{2}(M + {}$ $+ \lim\limits_{x \to x_0+} f_2(x)) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$. Это противоречит непрерывности $f(x)$. Таким образом, функции $f_i(x)$ принадлежат $CIE(a,b)$. Так как $f(x)$ — крайняя точка в $CIE(a,b)$, то $f_1 = f_2 = f$.

Мы доказали, что $g_1(x)$ и $g_2(x)$ совпадают с $\tilde{f}(x)$ на $[a,b]$. Докажем теперь совпадение в остальных точках прямой.

При $x < a$ имеем $g_i(x) \leq g_i(a)$ и в то же время $g_1(x) + g_2(x) = 2\tilde{f}(x) = 2f(a)$, откуда следует, что $g_i(x) = f(a) = \tilde{f}(x)$.

При $b < x \leq f(b)$ из монотонности следует, что $g_i(x) \geq f(b)$ и так как $g_1(x) + g_2(x) = 2\tilde{f}(x) = 2f(b)$, то $g_i(x) = f(b) = \tilde{f}(x)$.

При $x > f(b)$ мы имеем по условию, что $g_i(x) \geq x$, и в то же время $g_1(x) + g_2(x) = 2\tilde{f}(x) = 2x$, поэтому $g_i(x) = x = \tilde{f}(x)$.

Итак, $g_1(x) = g_2(x) = \tilde{f}(x)$, т. е. $\tilde{f}(x)$ — крайняя точка в $LIE(\mathbb{R})$. По теореме 4, $\tilde{f}(x)$ — идемпотентная функция. Но $\tilde{f}(x)$ непрерывна, поэтому $\tilde{f}(x) = f_c$ при некотором $c \in \mathbb{R}$. $\square$

2. УСТОЙЧИВОСТЬ

Определение устойчивости по Хайерсу – Уламу дано во введении. Мы рассматриваем вещественную прямую $\mathbb{R}$ как упорядоченное метрическое пространство со стандартным порядком и обычной метрикой $\rho(x,y) = |x - y|$.

Теорема 5. *Класс всех замыканий на прямой устойчив по Хайерсу – Уламу в классе непрерывных слева отображений из $IE(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть непрерывное слева отображение $f \in IE(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$|f(f(x)) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Обозначим через E множество неподвижных точек отображения f: $E = \{x : f(x) = x\}$. Докажем, что E замкнуто. В самом деле, пусть $x_n \to x_0$, $x_n \in E$ для всех n. Так как f непрерывно слева, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $f(x_n) > f(x_0) - \varepsilon$ при $x_0 - \delta < x_n < x_0$. Из монотонности то же справедливо при $x_n > x_0$. Таким образом, $x_n = f(x_n) > f(x_0) - \varepsilon$, когда $x_0 - \delta < x_n$, т. е. для всех достаточно больших номеров. Переходя к пределу, получим $x_0 \geq f(x_0) - \varepsilon$, и значит $x_0 \geq f(x_0)$, ввиду произвольности ε.

Дополнение U к E открыто и потому является объединением непересекающихся интервалов (интервалов смежности): $U = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Покажем, что на произвольном интервале смежности $I_i = (a_i, b_i)$ можно определить монотонно возрастающее отображение $\varphi_i : I_i \to I_i$, обладающее свойствами: (a) $\varphi_i(x) \geq x$ для любого $x \in I_i$; (b) $\varphi_i(\varphi_i(x)) = \varphi_i(x)$; (c) $\varphi_i(a_i) = a_i$, $\varphi_i(b_i) = b_i$; (d) $|\varphi_i(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ для любого $x \in I_i$.

Положим $c = \inf\{f(x) : a_i \leq x\}$ и допустим вначале, что $c > a_i$. Возьмём $d = c$, покажем, что

$$f(d) - d \leq \varepsilon. \tag{2}$$

В самом деле, выбрав $x \in (a_i, c)$, имеем: $d < f(x)$, $f(d) < f(f(x)) < f(x) + \varepsilon$. Взяв нижнюю грань по x, получим $f(d) \leq d + \varepsilon$. Из определения следует также, что

$$d < f(x) + \varepsilon \quad \text{для любого} \quad x > a_i. \tag{3}$$

Если же $c = a_i$, то в качестве d можно взять любую точку из I_i такую, что $|f(d) - a_i| < \varepsilon$, тогда условия (2) и (3) будут также выполнены.

Определим возрастающую последовательность d_n, полагая $d_0 = a$, $d_1 = d$, $d_{n+1} = f(d_n)$. Пусть $d' = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, тогда по условию непрерывности слева $f(d') = \lim f(d_n) = \lim d_{n+1} = d'$. Так как между a_i и b_i нет неподвижных точек отображения f, то $d' = b_i$.

Отображение φ_i мы зададим условиями:

$$\varphi_i(a_i) = a_i, \qquad \varphi(b_i) = b_i$$

и

$$\varphi_i(x) = d_{n+1} \quad \text{при} \quad x \in (d_n, d_{n+1}] \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Тогда монотонность и выполнение условий (a),(b),(c) очевидны.

Проверим (d). При $x \in (a_i, d)$ имеем $f(x) \leq f(d) \leq d + \varepsilon$; с другой стороны, $\varphi_i(x) = d \leq f(x) + \varepsilon$, в силу (3), т. е. $|f(x) - \varphi_i(x)| \leq \varepsilon$.

Пусть теперь $x \in (d_n, d_{n+1}]$, $n > 1$, тогда

$$f(x) \geq f(d_n) = d_{n+1} = \varphi_i(x)$$

и

$$f(x) \leq f(d_{n+1}) = f(f(d_n)) \leq f(d_n) + \varepsilon = d_{n+1} + \varepsilon = \varphi_i(x) + \varepsilon.$$

Таким образом, и в этом случае $|f(x) - \varphi_i(x)| \leq \varepsilon$. Условие (d) доказано.

Из определения сразу следует, что φ_i непрерывно слева во всех точках интервала I_i, отличных от его левого конца a_i.

Построенные на каждом интервале отображения φ_i мы объединим в одно отображение φ, полагая $\varphi(x) = x$ при $x \in E$ и $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ при $x \in I_i$. То, что φ является замыканием, непосредственно вытекает из нашей конструкции. Неравенство $|\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ доказано при $x \notin E$ и очевидно при $x \in E$.

Проверим непрерывность слева отображения φ. Пусть x_0 – произвольная точка. Если $x_0 \notin E$, то x_0 — внутренняя точка одного из интервалов смежности I_i и непрерывность слева следует из непрерывности слева φ_i. Если $x_0 \in E$, то либо x_0 является правым концом одного из интервалов смежности I_i, либо существует последовательность точек $x_n < x_0$, сходящаяся к x_0. В первом случае непрерывность слева следует из непрерывности слева φ_i в правом конце. Во втором случае — сразу по определению — $\varphi(x_n) = x_n \to x = \varphi(x)$. Таким образом, скачок слева у монотонной функции φ отсутствует, т. е. она непрерывна слева. □

Библиографический список

1. *Kulisch U.* An axiomatic Approach to Rounded Computations // Numer. Math. 1971. № 18. P. 1–17.

2. *Kaminsky T. E., Kreinovich V.* Natural requirements for natural roundings lead to a hardware-independent characterization of standard rounding procedures // Notes on intuitionistic fuzzy sets. 1998. Vol. II, № 3. P. 57–64.

3. *Каминский Т. Э.* К теории интервальных округлений // Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики : сб. науч. тр. Вологда, 2000. С. 23–36.

4. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М., 1984. 567 с.

5. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М., 1964. 168 с.