Терема 3. *Пусть $f \in H_p^\omega$ и ω, μ, $\kappa \in \Omega$ и $\omega(\delta)/\mu(\delta) = \kappa(\delta)$. Если для $\varepsilon_k = \omega(1/k)$ выполнено условие* (8), *ω удовлетворяет Δ_2-условию, то $\|B_r(f)_p - f\|_{p,\mu} \le C(p)A_{r,p}\kappa(1/r)$.*

Доказательство вытекает из теоремы 2 и леммы 7. Следует отметить, что $\kappa(1/[r]) \le C\kappa(1/r)$ в силу Δ_2-условия на κ, которое легко следует из Δ_2-условия на ω.

Следствие 5. *Пусть $f \in Lip^*(\beta, p)$, $\mu(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < \beta$. Тогда при $r \ge 1$*

$$\|B_r(f) - f\|_{p,\mu} \le C(p)A_{r,p}r^{\alpha-\beta}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержки ведущих научных школ (*проект НШ*-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
2. *Prössdorf S.* Zur Konvergenz der Fourierreihen hölderstetiger Funktionen // Math. Nachr. 1975. Vol. 69. P. 7–14.
3. *Chandra P.* Degree of approximation of functions in the Hölder metric by Borel means // J. Math. Anal. Appl. 1990. Vol. 149. P. 236–248.
4. *Das G., Ojha A. K., Ray B. K.* Degree of approximation of functions associated with Hardy – Littlewood series in the Hölder metric by Borel means // J. Math. Anal. Appl. 1998. Vol. 210, № 2. P. 279–293.
5. *Rempulska L., Tomczak K.* On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. Vol. 140. P. 141–153.
6. *Iofina T. V., Volosivets S. S.* On the degree on approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and L^p norm // East J. on Approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 143–158.
7. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.
8. *Schipp F.* On L^p-norm convergence of series with respect to product systems // Anal. Math. 1976. Vol. 2. P. 49–64.
9. *Simon P.* Verallgemeinerte Walsch – Fourierreihen // Acta Math. Hungar. 1976. Vol. 27, № 3–4. P. 329–341.
10. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
11. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимаций. М.: ГИТТЛ, 1947. 324 с.

УДК 511.3

К ВОПРОСУ ОПИСАНИЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С КОНЕЧНОЗНАЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ И УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ТИПА РИМАНА

В. Н. Кузнецов, О. А. Полякова

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел
E-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

В работе получены условия на коэффициенты ряда Дирихле, при которых этот ряд определяет целую функцию и удовлетворяет функциональному уравнению типа Римана. Показано, что существует бесчисленное множество таких рядов, отличных от L-функции Дирихле.

Ключевые слова: ряд Дирихле, функциональное уравнение, L-функция Дирихле.

On Characterization Determining Entire Functions and Consistent with Riman's Type Equation Dirichlet's Series with Finetly-Valued Coefficients

V. N. Kuznetsov, O. A. Polyakova

Saratov State University,
Chair of Computing Algebra and the Number Theory
E-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

In the investigation were founded specifications for Dirichlet's series coefficients, wherein this series determine entire function and measure up functional Riman's type equation. Were shown that exist infinit multitude of such series that are different from Dirichlet's L-functions.

Key words: Dirichlet's series, functional equation, Dirichlet's L-function.

Известно [1], что L-функции Дирихле для неглавного характера χ определяют целые функции и удовлетворяют функциональному уравнению вида

$$a\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta_1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s+\delta_1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)L(1-s,\overline{\chi}), \tag{1}$$

где a — некоторая константа, δ и δ_1 — величины, равные либо 0, либо 1; k — период характера χ; $\overline{\chi}$ — сопряженный характер; $\Gamma(s)$ — Γ-функция.

Функциональное уравнение вида (1) называют функциональным уравнением типа Римана. Известно также, что в классе рядов Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{2}$$

с конечнозначными коэффициентами, функциональное уравнение типа Римана, записанное в виде

$$a\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta_1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) f(s) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s+\delta_1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right) \hat{f}(1-s), \tag{3}$$

где $\hat{f}(s)$ — функция, определенная рядом Дирихле с коэффициентами, сопряженными к коэффициентам ряда (2), не определяет однозначно L-функцию Дирихле $L(s,\chi)$. Примером тому является известная функция Девенпорта – Хейльбронна. Как показано в [2], она удовлетворяет функциональному уравнению типа Римана (3) и не все нули этой функции, расположенные в критической полосе, лежат на прямой $\sigma = 1/2$.

В данной работе исследуется вопрос относительно того, насколько широк класс рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, определяющих целые функции и удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана (3).

Следующий результат показывает, что коэффициенты таких рядов являются периодическими, начиная с некоторого номера.

Теорема 1. *Пусть ряд Дирихле* (2) *с конечнозначными коэффициентами определяет целую функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению* (3). *Тогда коэффициенты этого ряда периодичны, начиная с некоторого номера.*

Доказательство. Пусть ряд Дирихле (2) удовлетворяет функциональному уравнению (3). Тогда на основании известной ассимптотики для Γ-функции [3]:

$$\Gamma(s) = O\left(e^{|\sigma - \frac{1}{2}|ln|t| - \frac{1}{2}\pi|t| + O\left(|t|^{-1}\right)}\right)$$

из функционального уравнения получаем оценку модуля функции $f(s)$ в левой полуплоскости

$$|f(s)| = O\left(e^{|s|ln|s| + A|s|}\right), \quad A > 0, \quad \sigma < 0. \tag{4}$$

В работе [4] показано, что если $f(s)$ — целая функция с условием роста модуля (4), то коэффициенты ряда Дирихле (2) периодичны, начиная с некоторого номера. Это доказывает утверждение теоремы 1.

Для рядов Дирихле с периодическими коэффициентами имеет место

Теорема 2. *Ряд Дирихле* (2) *с периодическими коэффициентами* a_n *тогда и только тогда определяет целую функцию, когда* $\sum\limits_{n\leqslant x} a_n = O(1)$.

Доказательство. Пусть выполняется условие $\sum\limits_{n\leqslant x} a_n = O(1)$. Тогда, как легко видеть, соответствующий степенной ряд $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ определяет рациональную функцию вида

$$g(z) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{d} a_n z^n}{1 - z^d}, \tag{5}$$

где d — период последовательности $\{a_n\}$.

Ясно, что $\sum\limits_{n=1}^{d} a_n = 0$, так как в противном случае $\sum\limits_{n\leqslant x} a_n \neq O(1)$. Таким образом, рациональная функция (5) регулярна в точке $z = 1$, и, следовательно, у функции $g(z)$ в точке $z = 1$ существуют радиальные производные любого порядка, т. е. существуют пределы вида

$$\lim_{x\to 1-0} g^{(n)}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Ясно, что существование радиальных производных вида (6) равносильно существованию производных вида

$$\lim_{x\to 0+}\left(g\left(e^{-x}\right)\right)^{(n)}=\alpha_n,\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{7}$$

Рассмотрим преобразование Меллина (например, [3]):

$$f(s)\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty g\left(e^{-x}\right)x^{s-1}dx,\qquad \sigma>1. \tag{8}$$

В силу существования пределов вида (7) запишем для функции $g\left(e^{-x}\right)$ при $x\geqslant 0$ формулу Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано:

$$g\left(e^{-x}\right)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k+o(x^n)\quad\text{при}\quad x\to 0+\,. \tag{9}$$

Подставим выражение (9) в правую часть равенства (8) и запишем полученное равенство в виде

$$f(s)\Gamma(s)=\int\limits_0^\rho\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k\right)x^{s-1}dx+\int\limits_0^\rho\left[g(e^{-x})-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k\right]x^{s-1}\,dx+\int\limits_\rho^\infty g\left(e^{-x}\right)x^{s-1}\,dx,\quad \rho>0. \tag{10}$$

В этом равенстве первое слагаемое равно $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha_k}{k+s}\rho^{k+s}$, второе слагаемое определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma>-n$. Если записать подынтегральную функцию третьего слагаемого в виде $\left(e^{-k/2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n e^{(-n+1/2)x}\right)x^{s-1}$, то легко видеть, что последний интеграл абсолютно сходится в любой полуплоскости: $\sigma>N$ и, следовательно, определяет целую функцию.

В силу произвольности n утверждение теоремы 2 доказано в одну сторону.

Докажем обратное утверждение. Предположим противное, т. е. $\sum\limits_{n\leqslant x}a_n\neq O(1)$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{n=1}^{d}a_n\neq 0$ и рациональная функция $g(z)$ в силу (5) имеет полюс первого порядка в точке $z=1$. Следовательно, и функция $g(e^{-z})$ имеет полюс первого порядка в точке $z=0$. Тогда в окрестности нуля имеет место представление

$$g(e^{-x})=\frac{A}{x}+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k,\qquad |x|<\rho. \tag{11}$$

В силу (11) равенство (8) можно представить в виде

$$f(s)\Gamma(s)=\int\limits_0^\rho\left(\frac{A}{x}+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k\right)x^{s-1}dx+\int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx.$$

Здесь первое слагаемое равно

$$\frac{A\rho^{s-1}}{s-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k\rho^{s+k}}{s+k},$$

а второе слагаемое, как показано выше, определяет целую функцию. Следовательно, функция $f(s)$ имеет полюс первого порядка в точке $s=1$, что противоречит условию теоремы 2. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Выясним теперь, в каком случае ряд Дирихле (2) с периодическими коэффициентами a_n, для которых $\sum\limits_{n\leqslant x}a_n=O(1)$, определяет функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению типа Римана (3).

Отметим (см. [1]), что при выводе функционального уравнения для L-функции Дирихле $L(s,\chi)$ центральным моментом, в случае четного характера, являлся тот факт, что функция вида

$$\vartheta(x,\chi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(n)e^{-\frac{\pi n^2 x}{d}},\qquad x>0,$$

где d — период характера χ, удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\vartheta(x,\chi)=\frac{G}{\sqrt{dx}}\vartheta\left(\frac{1}{x},\overline{\chi}\right),$$

где $\overline{\chi}$ — сопряженный характер, а G — сумма Гаусса

$$G=\sum_{l=1}^{d}\chi(l)e^{\frac{2\pi il}{d}}. \tag{12}$$

В нашем случае — случае периодических коэффициентов a_n с периодом d, — рассмотрим функцию вида

$$\vartheta(x,\{a_n\})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{-\frac{\pi n^2 x}{d}},\qquad x>0. \tag{13}$$

Рассмотрим выражения вида

$$G_m=\sum_{l=1}^{d}a_l e^{\frac{2\pi ilm}{d}}, \tag{14}$$

где m — натуральное.

При данных обозначениях имеет место

Теорема 3. *Пусть периодическая последовательность $\{a_n\}$ такова, что для любого натурального m для величин G_m и G, определенных равенствами* (14) *и* (12), *выполняется условие*

$$G_m=\overline{a_m}\cdot G, \tag{15}$$

где $\overline{a_m}$ — сопряженные к a_m.

Тогда функция (13) *удовлетворяет функциональному уравнению вида*

$$\vartheta(x,\{a_n\})=\frac{G}{\sqrt{dx}}\vartheta\left(\frac{1}{x},\{\overline{a_n}\}\right),\qquad x>0. \tag{16}$$

Доказательство. Преобразуем ряд (13) следующим образом:

$$\vartheta(x,\{a_n\})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{-\frac{\pi n^2 x}{d}}=\sum_{l=1}^{d}a_l\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi(dm+l)^2 x}{d}}=\sum_{l=1}^{d}a_l\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\pi\left(m+\frac{l}{d}\right)^2 dx}.$$

Далее, воспользуемся равенством, доказанным в [5]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\pi(m+d)^2 x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi m^2}{x}+2\pi imd}. \tag{17}$$

Тогда в силу (17) и (15) получим

$$\vartheta(x,\{a_n\})=\frac{1}{\sqrt{dx}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi m^2}{dx}}\sum_{l=1}^{d}a_l e^{\frac{2\pi ilm}{d}}=\frac{G}{\sqrt{dx}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{a_m}e^{-\frac{\pi m^2}{dx}},$$

что и доказывает утверждение теоремы 3.

Известно (см. [5]), что условие (15) имеет место когда $a_n=\chi(n)$, где χ — примитивный характер по модулю d. Ясно, что тогда условие (15) будет иметь место, когда $a_n=\alpha\chi_1(n)+\beta\chi_2(n)$, где α, β — комплексные числа, а χ_1, χ_2 — примитивные характеры по модулю d. Следовательно, существует достаточно много периодических последовательностей, при которых имеет место теорема 3.

Наконец, если следовать выводу функционального уравнения для L-функции Дирихле, приведенному в [5], то получим основной результат данной работы.

Теорема 4. *Пусть* $\{a_n\}$ — *периодическая последовательность, для которой выполняются условия:* 1) $\sum\limits_{n\leqslant x} a_n = O(1)$; 2) $\sum\limits_{l=1}^{d} a_l e^{\frac{2\pi i l m}{d}} = \overline{a_m} \sum\limits_{l=1}^{d} a_l e^{\frac{2\pi i l}{d}}$. *Тогда ряд Дирихле* (2) *определяет функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению типа Римана* (3).

Библиографический список

1. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.
2. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматгиз, 1994.
3. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
4. *Кузнецов В. Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36, вып. 9. С. 805–813.
5. *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции. М.: Наука, 1975.

УДК 517.51

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЙ КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ НА НУЛЬ-МЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

С. Ф. Лукомский

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: lukomskiisf@info.sgu.ru

Для решения масштабирующего уравнения, преобразование которого имеет компактный носитель, дано необходимое и достаточное условие, при котором это решение порождает неортогональный КМА.

Ключевые слова: нуль-мерные локально компактные группы, сжатия и сдвиги, система Рисса .

Nonorthogonal Multiresolution Analysis on Zero-Dimensional Locally Compact Groups

S. F. Lukomskii

Saratov State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: lukomskiisf@info.sgu.ru

We given necessary and sufficient condition under which the solution of refinement equation with compactly supported Fourier transform generate the multiresolution analysis.

Key words: zero-dimensional locally compact groups, shifts, dilations, Riesz systems.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительный интерес вызывают вопросы построения всплесковых базисов на локально компактных нуль-мерных абелевых группах, как общего вида, так и на конкретных группах. Для построения таких базисов обычно строят кратномасшабный анализ (КМА), а затем по известной схеме получают всплесковые базисы. В работах [1–3] эти вопросы рассмотрены на двоичной группе Кантора. Наибольший всплеск интереса к этой тематике проявился после работ С. В. Козырева [4, 5] в которых были впервые построены p-адические базисы Хаара. В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков в работах [6–8] охарактеризовали все двоичные финитные всплески на $\mathbb{R}_+$ и указали алгоритм их построения. Ю.А.Фарков в работах [9–10] указал метод построения ортогональных всплесков с компактным носителем на локально компактной группе Виленкина G с постоянной образующей последовательностью и нашел необходимые и достаточные условия, при которых решения масштабирующего уравнения генерируют КМА в $L_2(G)$. Большая группа работ связана с построением КМА на группах всех p-адических чисел. В. М. Шелкович, А. Ю. Хренников, М. А. Скопина в работах [11–13] ввели понятие p-адического КМА с ортогональной масштабирующей функцией и описали общую схему их построения. Отметим, что в работах [10] и [13] решалась одна и та же задача — построение КМА и на его основе построение ортонормированных базисов в $L_2(G)$ как сжатий и сдвигов нескольких функций. В [10] эта задача рассмотрена на группе Виленкина, а в [13] — на поле всех p-адических чисел. В работе [14] вопросы построения ортогонального КМА и ортогональных всплесковых базисов рассмотрены на произвольных локально компактных нуль-мерных группах.

