$$\leqslant N\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega}\cdot\|\nabla c_h\|_{2,\Omega}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega})^2+\frac{1}{2\varepsilon}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega})^2.$$

Положим $\varepsilon=\alpha_D$ и проинтегрируем (4.2) по времени, получим

$$\alpha_D(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2\leqslant\frac{1}{2}(\|c_h\|_{2,\Omega_T})^2+\frac{\alpha_D}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2+\frac{1}{2\alpha_D}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2,$$

откуда $(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2\leqslant N_1(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2$. Следовательно, $\nabla c_h\rightharpoonup\nabla c$ слабо в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

Таким образом, в уравнении диффузии есть сложность в одном слагаемом:

$$\int_{\Omega_T}\xi\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\cdot\nabla c_h\,dx\,dt\equiv I_h,$$

поскольку оба сомножителя всего лишь слабо сходятся. Из свойств усреднений имеем $\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u})\to\mathbf{u}$ сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\|_{2,\Omega_T}\leqslant N\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T}$. Поэтому

$$I_h=\int_{\Omega_T}\xi(\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)-\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}))\cdot\nabla c_h\,dx\,dt+\int_{\Omega_T}\xi(\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u})-\mathbf{u})\cdot\nabla c_h\,dx\,dt+\int_{\Omega_T}\xi\mathbf{u}\cdot\nabla c_h\,dx\,dt\equiv I_1+I_2+I_3,$$

$$|I_1|\leqslant\max_{x,t}|\xi|\,\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T}\,\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\|_{2,\Omega_T}\leqslant N\|\mathbf{u}_h-\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}\to 0,\qquad h\to 0,$$

$$|I_2|\leqslant N_1\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u})-\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}\to 0,\quad h\to 0.$$

Окончательно получаем

$$I_h\to\int_{\Omega_T}\xi\mathbf{u}\cdot\nabla c\,dx\,dt,\quad h\to 0.$$

В остальных слагаемых интегрального тождества (4.1) предельный переход будет стандартным. Лемма доказана.

Из доказанных лемм следует утверждение теоремы 1.

Библиографический список

1. *Ладыженская, О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Лионс, Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
3. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

УДК 517.956

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБЛАСТИ

О.В. Лаштабега, А.Н. Зарубин

Орловский государственный университет,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
E-mail: aleks_zarubin@mail.ru, tanda80@yandex.ru

В работе исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения и запаздыванием в производной.

Ключевые слова: уравнение, краевая задача, смешанный тип, линия вырождения, запаздывание.

Tricomi Problem for Differential-Difference Equations of Mixed Type in the Asymmetric Field

O.V. Lashtabega, A.N. Zarubin

Orel State University,
Chair of Mathematical Analysis and Differential Equations
E-mail: aleks_zarubin@mail.ru, tanda80@yandex.ru

The paper examines the boundary value problem for mixed type equations with two perpendicular lines of degeneracy and the delay in the derivative.

Key words: equation, boundary value problem, mixed type, the line of degeneracy, the delay.

Уравнение

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + \mathrm{sign}\,(xy) u_{yy}(x,y) - H(x-\tau) u_x(x-\tau, y) = 0, \tag{1}$$

$0 < \tau \equiv \mathrm{const}$, $H(\xi)$ — функция Хевисайда, рассмотрим в несимметричной полубесконечной области $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup J_1 \cup J_2$, где $D_1 = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_{1k}$, $D_2 = \{(x,y) : -h/2 < x < 0,\ -x < y < x+h\}$ и $D_3 = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_{3k} = \{(x,y) : x > 0,\ 0 < y < h\}$ — гиперболические и эллиптическая части области D, причем $D_{1k} = \{(x,y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\}$, $D_{3k} = \{(x,y) : k\tau < x \le (k+1)\tau,$ $0 < y < h\}$, $0 < h \equiv \mathrm{const}$, $J_1 = \{(x,y) : x > 0,\ y = 0\}$, $J_2 = \{(x,y) : x = 0,\ 0 < y < h\}$.

Задача T. *Найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D \setminus (J_1 \cup J_2))$, исчезающее на бесконечности, производные которого $u_x(0,y)$, $u_y(x,0)$ в точке $(0,0)$ ограничены, в точке $(0,h)$ функция $u_x(0,y)$ допускает особенность не выше $1/2$ $(u_x(0,y) = o((h-y)^{-1/2}))$, а $u_y(x,0)$ исчезает при $x \to +\infty$ $\big(u_y(x,0) = o\big(\exp\big(-(1/4+\varepsilon)\big)x\big)$ $(0 < \varepsilon \le 1/4)\big)$; удовлетворяющее граничным условиям:*

$$u(x,h) = f(x), \qquad 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, k\tau - x) = \psi_{1k}(x), \qquad k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2, \tag{3}$$

$$u(-y,y) = \psi_2(y), \qquad 0 \le y \le h/2; \tag{4}$$

условиям сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \omega_1(x), \qquad u(-0,y) = u(+0,y) = \omega_2(y), \tag{5}$$

$$u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu_1(x), \qquad u_x(-0,y) = u_x(+0,y) = \nu_2(y), \tag{6}$$

где $f(x)$, $\psi_{1k}(x)$, $\psi_2(y)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega_j(t)$ и $\nu_j(t)$ $(j = 1,2)$ — соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty), f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$; $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_1(+\infty) = 0$ и $\psi_i'(t)$, $\psi_i''(t)$ $(i = 1,2)$ принадлежат классу Гельдера внутри соответствующих промежутков, причем $\psi_1'(t) = o\big(\exp(\gamma t)\big)$ $(\gamma < -1/2)$ при $t \to +\infty$; $(h/2 - t)^{1/2}\psi_2'(t) \to 0$ при $t \to h/2$, а $\psi_1(t) = \big\{\psi_{1k}(t),\ k\tau \le t \le (2k+1)\tau/2\ (k = 0,1,2,\ldots)\big\}$. Тогда существует единственное при $h \le 2\sqrt{2}$ решение $u(x,y)$ задачи T.*

Доказательство теоремы разобьем на ряд этапов.

I. *Единственность* решения задачи T вытекает из следующих утверждений.

Лемма 1. *Если $u(x,y)$ — решение уравнения (1) в области D_3 из класса $C(\overline{D}_3) \cap C^2(D_3)$, исчезающее на бесконечности с однородным условием (2) и $h \le 2\sqrt{2}$, то*

$$\beta = \int\limits_0^{+\infty} \omega_1(x)\nu_1(x)\,dx + \int\limits_0^{h} \omega_2(y)\nu_2(y)\,dy \le 0 \tag{7}$$

и

$$\beta + \iint\limits_{D_3} \left[u_x^2(x,y)\big(1 - (h^2 - y^2)/8\big) + \left(u_y(x,y) - \frac{1}{2} H(x-\tau) \int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi \right)^2 \right] dx\,dy \le 0. \tag{8}$$

Доказательство получим из тождества

$$u(x,y)Lu(x,y) \equiv \big(u(x,y)u_x(x,y)\big)_x + \big(u(x,y)u_y(x,y)\big)_y -$$

$$-u_x^2(x,y) - u_y^2(x,y) - H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y) = 0,$$

интегрируя которое по области $D_3^{\varepsilon\rho} = \{(x,y) : \varepsilon < x < \rho,\ \varepsilon < y < h\}$ $(0 < \varepsilon < \rho \equiv \mathrm{const})$, применяя формулу Грина [1] и условия леммы, в пределе при $\rho \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$, найдем в силу (5)–(6), что

$$\beta + \iint\limits_{D_3} \left[u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y) + H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y) \right] dx\,dy = 0. \tag{9}$$

Так как в силу интегрирования по частям и однородности условия (2)

$$\iint\limits_{D_3} H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y)\,dx\,dy = -\iint\limits_{D_3} u_y(x,y)\left(H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\right)dx\,dy,$$

то (9) можно записать в форме

$$\beta + \iint\limits_{D_3}\left[u_x^2(x,y) + \left(u_y(x,y) - \frac{1}{2}H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\right)^2\right]dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}\iint\limits_{D_3}\left(H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\right)^2 dx\,dy,$$

что в силу неравенства Коши – Буняковского [2] для интеграла

$$\iint\limits_{D_3}\left(H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\right)^2 dx\,dy = \iint\limits_{D_3}\left(\int\limits_0^y u_x(x,\xi)\,d\xi\right)^2 dx\,dy \le$$

$$\le \iint\limits_{D_3}\left(y\int\limits_0^y u_x^2(x,\xi)\,d\xi\right)dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_3}(h^2-y^2)u_x^2(x,y)\,dx\,dy$$

приводит при $h \le 2\sqrt{2}$ к утверждениям леммы (7) и (8).

Лемма 2. *Если $u(x,y) \in C(\overline{D}_1)\cap C^2(D_1)$ $(u(x,y) \in C(\overline{D}_2)\cap C^2(D_2))$ — решение уравнения (1), обращающееся в нуль на характеристиках $y = k\tau - x$ $(x = -y)$, то*

$$\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \omega_1(x)\nu_1(x)\,dx \ge 0 \qquad \left(\int\limits_0^h \omega_2(y)\nu_2(y)dy \ge 0\right).$$

Утверждение леммы доказывается аналогично [3].

II. Для доказательства *существования* решения задачи Т отдельно рассмотрим:

а) в гиперболической области D_1 задачу Коши:

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u_x(x-\tau,y) = 0, \qquad (x,y)\in D_1,\\ u(x,0) = \omega_1(x), \qquad 0 \le x < +\infty,\\ u_y(x,0) = \nu_1(x), \qquad 0 < x < +\infty,\\ \omega_1'(0) = 0, \qquad \omega_1(+\infty) = 0; \end{gathered} \tag{10}$$

б) в гиперболической области D_2 задачу Коши:

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0, \qquad (x,y)\in D_2,\\ u(0,y) = \omega_2(y), \qquad 0 \le y \le h,\\ u_x(0,y) = \nu_2(y), \qquad 0 < y < h,\\ \omega_2'(0) = 0, \qquad \omega_2(h) = f(0); \end{gathered} \tag{11}$$

в) в эллиптической области D_3 задачу Неймана – Дирихле:

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u_x(x-\tau,y) = 0, \qquad (x,y)\in D_3,\\ u_y(x,0) = \nu_1(x), \qquad 0 < x < +\infty,\\ u_x(0,y) = \nu_2(y), \qquad 0 < y < h,\\ u(x,h) = f(x), \qquad 0 \le x < +\infty,\\ \lim_{x\to+\infty} u(x,y) = 0, \qquad 0 \le y \le h,\\ f(0) = \omega_2(h), \qquad f(+\infty) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Исходя из функциональных соотношений между $\omega_j(t)$ и $\nu_j(t)$ $(j = 1,2)$, полученных из решений задач Коши (10)–(11) и Неймана – Дирихле (12), в силу условий (3), (4) и (5) составим полную сингулярную интегральную систему относительно $\nu_j(t)$.

Лемма 3. *Пусть* $\omega_1(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, $\nu_1(x) \in C^1(0,+\infty)$, *абсолютно интегрируемы на* $[0,+\infty)$, $\omega_1'(0) = 0$, $\omega_1(+\infty) = 0$. *Тогда существует единственное решение задачи Коши* (10), *имеющее вид*

$$u(x,y) = \{u_k(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_{1k}\ (k = 0,1,2,\ldots)\}, \tag{13}$$

если

$$u_k(x,y) = \phi_k(x,y)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau} (x - m\tau)\big((x - m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1}\phi(\eta,y)\,d\eta, \tag{14}$$

где $\gamma_m = \big(m!\Gamma(m)2^{2m-1}\big)^{-1}$,

$$\phi(x,y) = \{\phi_k(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_{1k}\ (k = 0,1,2,\ldots)\}, \tag{15}$$

а

$$\phi_k(x,y) = \frac{1}{2}\big[z_k^{\omega_1}(x-y) + z_k^{\omega_1}(x+y)\big] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} z^{\nu_1}(\xi)\,d\xi, \tag{16}$$

$$z^{\omega_1}(x) = \{z_k^{\omega_1}(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau\ (k = 0,1,2,\ldots)\}, \tag{17}$$

когда

$$z_k^{\omega_1}(x) = \omega_1(x)H(x) + \sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m 2^{m-1}(m-1)!H(x - m\tau)\frac{d}{dx}\left[x^{m-1}(x - m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}\omega_1(\xi)\,d\xi\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x - m\tau)\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x-m\tau}\eta\left(\int\limits_0^{\eta}\omega_1(\xi)\,d\xi\right)\frac{d^m}{d\eta^m}\left(x^2 - \big(\eta + m\tau\big)^2\right)^{m-1}d\eta, \tag{18}$$

причем $z^{\nu_1}(x)$ *совпадает с* $z^{\omega_1}(x)$ *из* (17)–(18), *если заменить* $\omega_1(x)$ *на* $\nu_1(x)$.

Доказательство утверждения леммы следует из непосредственно проверяемого [4] общего решения уравнения (10_1) в области D_1 вида (13), если

$$u_k(x,y) = [g_1(x-y) + g_2(x+y)]H(x) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x - m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau}(x - m\tau)\big((x - m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1}\big[g_1(\eta - y) + g_2(\eta + y)\big]\,d\eta, \tag{19}$$

где $g_i(t)$ $(i = 1,2)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые на отрезке $[k\tau,(k+1)\tau]$ функции.

Действительно, в силу (10_2)–(10_3) и

$$g_1(x) + g_2(x) = z^{\omega_1}(x),\ \ -g_1'(x) + g_2'(x) = z^{\nu_1}(x) \tag{20}$$

из (19) получим интегродифференциально-разностное уравнение Вольтерра:

$$z_k^{\omega_1}(x) + \sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x - m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau}\big(x - m\tau\big)\times$$

$$\times\big((x - m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1}z^{\omega_1}(\eta)\,d\eta = \omega_1(x), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{21}$$

решение [5] которого имеет форму (18), или относительно $z^{\nu_1}(x)$ также уравнение типа (21) с правой частью $\nu_1(x)$.

Функции $g_i(t)$ $(i = 1,2)$, найденные из системы (20), на основании (19) приведут к обобщенной формуле Даламбера (13)–(14), которая будет решением задачи Коши (10), единственным в силу построения.

Лемма 4. *Пусть* $\omega_2(y) \in C[0,h] \cap C^2(0,h)$, $\nu_2(y) \in C^1(0,h)$, *абсолютно интегрируемы на* $[0,h]$ *и* $\omega_2'(0) = 0$, $\omega_2(h) = f(0)$. *Тогда существует единственное решение задачи Коши* (11), *имеющее вид*

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\big[\omega_2(y-x) + \omega_2(x+y)\big] + \frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x} \nu_2(\xi)\,d\xi, \qquad (x,y) \in \overline{D}_2. \tag{22}$$

Доказательство леммы проводится аналогично лемме 3.

Форма (22) решения задачи Коши (11) может быть найдена из (13)–(18) при $k=0$ с учетом данных задачи и области ее решения.

Лемма 5. *Если* $\nu_1(x) \in C^1(0,+\infty)$, $f(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$ *и* $\nu_2(y) \in C^1(0,h)$, *абсолютно интегрируемы на* $[0,+\infty)$ *и* $[0,h]$ *соответственно, причем* $f(0) = \omega_2(h)$, $f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ *при* $x \to 0$, *то существует единственное при* $h \le 2\sqrt{2}$ *решение задачи Неймана – Дирихле (12) в области* D_3, *которое имеет вид*

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) = \{u_{1k}(x,y) + u_{2k}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_{3k}\ (k=0,1,2,\ldots)\}, \tag{23}$$

где

$$u_{1k}(x,y) = \int\limits_0^h \nu_2(t) G_k^-(x,y;\xi,t)\big|_{\xi=0}\,dt, \tag{24}$$

$$u_{2k}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi) G_k^+(x,y;\xi,t)\big|_{t=0}\,d\xi + \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi) G_{kt}^+(x,y;\xi,t)\big|_{t=h}\,d\xi, \tag{25}$$

а

$$G_k^{\mp}(x,y;\xi,t) = \overline{G}(x,y;\xi,t)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \big(\mp 1\big)^m \gamma_m H(x-m\tau)\times$$

$$\times\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{+\infty} \big(x-m\tau\big)^{(1\mp1)/2} \eta^{(1\pm1)/2}\big((x-m\tau)^2 - \eta^2\big)_{\mp}^{m-1} \overline{G}(\eta,y;\xi,t)\,d\eta, \tag{26}$$

$$\overline{G}(x,y;\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\ln\!\left(\frac{\operatorname{ch}\big((x-\xi)\pi/2h\big) - \cos\big((y-t)\pi/2h\big)}{\operatorname{ch}\big((x-\xi)\pi/2h\big) + \cos\big((y-t)\pi/2h\big)}\,\frac{\operatorname{ch}\big((x+\xi)\pi/2h\big) - \cos\big((y+t)\pi/2h\big)}{\operatorname{ch}\big((x+\xi)\pi/2h\big) + \cos\big((y+t)\pi/2h\big)}\right), \tag{27}$$

$$\big(\xi^2-\eta^2\big)_-^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \xi \ge \eta, \\ \big(\eta^2-\xi^2\big)^{\alpha}, & \xi < \eta, \end{cases} \qquad \big(\xi^2-\eta^2\big)_+^{\alpha} = \begin{cases} \big(\xi^2-\eta^2\big)^{\alpha}, & \xi > \eta, \\ 0, & \xi \le \eta, \end{cases}$$

причем $z^{\nu_1}(x)$ *и* $z^f(x)$ *определяются равенствами типа* (17)–(18), *в которых следует заменить* $\omega_1(x)$ *на* $\nu_1(x)$ *и* $f(x)$ *соответственно.*

Доказательство единственности решения задачи Неймана – Дирихле (12) в области D_3 из класса $C(\overline{D}_3) \cap C^2(D_3)$ следует из того, что однородная задача (12) имеет при $h \le 2\sqrt{2}$ тривиальное решение, так как по лемме 1 в силу (8)

$$\iint\limits_{D_3} \left[u_x^2(x,y)\big(1-(h^2-y^2)/8\big) + \left(u_y(x,y) - \frac{1}{2}H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\right)^2\right] dx\,dy = 0.$$

Решение задачи Неймана – Дирихле (12) в области D_3 найдено в виде суммы (23) решений двух вспомогательных задач:

$$\begin{gathered} u_{jxx}(x,y) + u_{jyy}(x,y) - H(x-\tau)u_{jx}(x-\tau,y) = 0, \\ u_j(x,h) = (j-1)f(x), \qquad 0 \le x < +\infty, \\ u_{jy}(x,0) = (j-1)\nu_1(x), \qquad 0 < x < +\infty, \\ u_{jx}(0,y) = (2-j)\nu_2(y), \qquad 0 < y < h, \\ \lim_{x\to+\infty} u_j(x,y) = 0, \qquad 0 \le y \le h, \\ f(0) = \omega_2(h), \qquad f(+\infty) = 0 \qquad (j=1,2). \end{gathered} \tag{28}$$

1. Функция $u_1(x,y)=\{u_{1k}(x,y),(x,y)\in\overline{D}_{3k}\ (k=0,1,2,\ldots)\}$ получена в форме

$$u_{1k}(x,y)=\sum_{l=0}^{+\infty}R_k(x,\lambda_l)\cos\lambda_l y, \tag{29}$$

где

$$R_k(x,\lambda_l)=-\frac{2}{h\lambda_l}T_k(x,\lambda_l)\int\limits_0^h\nu_2(t)\cos\lambda_l t\,dt, \tag{30}$$

а

$$T_k(x,\lambda_l)=e^{-\lambda_l x}H(x)+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m H(x-m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_{x-m\tau}^{+\infty}\eta\big(\eta^2-(x-m\tau)^2\big)^{m-1}e^{-\lambda_l\eta}\,d\eta, \tag{31}$$

$k\tau\le x\le(k+1)\tau$, является решением [4, 5] уравнения

$$T''(x,\lambda_l)-\lambda_l^2T(x,\lambda_l)-H(x-\tau)T'(x-\tau,\lambda_l)=0,$$

удовлетворяющим условиям $T'(0,\lambda_l)=-\lambda_l,\ T(+\infty,\lambda_l)=0$, причем $\lambda_l=(l+1/2)\pi/h$.

Подставляя (31), (30) в (29), учитывая [6], что

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}e^{-(2n+1)a}=\frac{1}{4}\ln\frac{\operatorname{ch}a+\cos x}{\operatorname{ch}a-\cos x},$$

найдем $u_{1k}(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}_{3k}$ в форме (24).

2. Решение $u_2(x,y)=\{u_{2k}(x,y),(x,y)\in\overline{D}_{3k}\ (k=0,1,2,\ldots)\}$ построено в виде

$$u_{2k}(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}A_k(x,\lambda)\Pi(y,\lambda)d\lambda, \tag{32}$$

где

$$A_k(x,\lambda)=H(x)\cos\lambda x+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau}\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\big(x-m\tau\big)\cos\lambda\eta\,d\eta \tag{33}$$

удовлетворяет [4, 5] уравнению $A''(x,\lambda)+\lambda^2A(x,\lambda)-H(x-\tau)A'(x-\tau,\lambda)=0$, и условию $A'(0,\lambda)=0$, а

$$\Pi(y,\lambda)=c_1(\lambda)e^{\lambda y}+c_2(\lambda)e^{-\lambda y},\qquad 0\le y\le h, \tag{34}$$

$c_i(\lambda)\equiv\mathrm{const}$ $(i=1,2)$, является общим решением уравнения $\Pi''(y,\lambda)-\lambda^2\Pi(y,\lambda)=0$.

Подставляя (34), (33) в (32), на основании условий (28_2)–(28_3) $(j=2)$ получим для определения $c_i(\lambda)$ $(i=1,2)$ систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{+\infty}\big(c_1(\lambda)e^{\lambda h}+c_2(\lambda)e^{-\lambda h}\big)A_k(x,\lambda)d\lambda=f(x),\qquad k\tau\le x\le(k+1)\tau,\\&\int\limits_0^{+\infty}\lambda\big(c_1(\lambda)-c_2(\lambda)\big)A_k(x,\lambda)d\lambda=\nu_1(x),\qquad k\tau\le x\le(k+1)\tau.\end{aligned} \tag{35}$$

Пусть

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{+\infty}\big(c_1(\lambda)e^{\lambda h}+c_2(\lambda)e^{-\lambda h}\big)\cos\lambda x d\lambda=z_k^f(x),\qquad k\tau\le x\le(k+1)\tau,\\&\int\limits_0^{+\infty}\lambda\big(c_1(\lambda)-c_2(\lambda)\big)\cos\lambda x d\lambda=z_k^{\nu_1}(x),\qquad k\tau\le x\le(k+1)\tau.\end{aligned} \tag{36}$$

Тогда из (35) в силу (33) получим относительно $z_k^f(x)$ и $z_k^{\nu_1}(x)$ интегродифференциально-разностные уравнения Вольтерра типа (21) с правой частью $f(x)$ и $\nu_1(x)$ соответственно, решения [5] которых $z_k^f(x)$ и $z_k^{\nu_1}(x)$ будут иметь вид (18) относительно $f(x)$ и $\nu_1(x)$.

Так как функции $f(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, $f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$, $\nu_1(x)$ принадлежит классу Гельдера внутри $(0,+\infty)$ и абсолютно интегрируемы на $[0,+\infty)$, то, очевидно, в силу (18) этими свойствами обладает $z^f(x)$ и $z^{\nu_1}(x)$.

Поэтому, обратив косинус–преобразования Фурье (36) [7] с правыми частями $z^f(x)$, $z^{\nu_1}(x)$ при $x > 0$, получим систему:

$$c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} z^f(t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$c_1(\lambda) - c_2(\lambda) = \frac{2}{\pi\lambda}\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t)\cos\lambda t\,dt,$$

из которой

$$c_i(\lambda) = \frac{1}{\pi\operatorname{ch}\lambda h}\int\limits_0^{+\infty}\left[z^f(t) + (-1)^{i+1}\frac{1}{\lambda}e^{(-1)^i\lambda h}z^{\nu_1}(t)\right]\cos\lambda t\,dt \qquad (i=1,2). \tag{37}$$

Подставляя (34), (33), (37) в (32), используя [6] формулы

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch}cx}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{c}\cdot\frac{\cos(a\pi/2c)\operatorname{ch}(b\pi/2c)}{\operatorname{ch}(b\pi/c)+\cos(a\pi/c)},$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}ax}{x\operatorname{ch}cx}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch}(b\pi/2c)+\sin(a\pi/2c)}{\operatorname{ch}(b\pi/2c)-\sin(a\pi/2c)}, \qquad \mathrm{Re}c > \mid \mathrm{Re}a \mid + \mid \mathrm{Im}b \mid,$$

получим $u_{2k}(x,y)$ в виде (25).

III. 1. *Функциональное соотношение* между $\omega_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное на линию $y = 0$, $0 < x < +\infty$ из области D_1, получим в силу (13)–(18) и (3) из интегродифференциально-разностного уравнения Вольтерра:

$$\phi_k(x, r_k(x))H(x) + \sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau}\big(x-m\tau\big)\times$$

$$\times\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\phi(\eta, r_k(x))\,d\eta = \psi_{1k}(x), \qquad k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2,$$

$r_k(x) = k\tau - x$, решение [4, с. 51; 5] которого

$$\phi_k(x,r_k(x)) = \psi_{1k}(x)H(x) - \sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\Bigg\{\int\limits_{(k-m)\tau}^{x-m\tau}\big(x-m\tau\big)\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\times$$

$$\times\phi(\eta, r_{k-m}(x))\,d\eta + \sum_{\theta=0}^{k-m-1}\int\limits_{\theta\tau}^{(\theta+1)\tau}\big(x-m\tau\big)\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\phi(\eta, r_\theta(x))\,d\eta\Bigg\} \tag{38}$$

после подстановки в (16) дает искомое соотношение

$$z_k^{\omega_1}(2x-k\tau) + z_k^{\omega_1}(k\tau) + \int\limits_{2x-k\tau}^{k\tau} z^{\nu_1}(\xi)\,d\xi = 2\phi_k(x, r_k(x)), \qquad k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2,$$

или

$$z_k^{\omega_1}(x) + z_k^{\omega_1}(k\tau) + \int\limits_x^{k\tau} z^{\nu_1}(\xi)\,d\xi = F_k(x), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau,$$

где $F_k(x) = 2\phi_k\big((x+k\tau)/2, r_k((x+k\tau)/2)\big)$.

Значит,

$$z_k^{\nu_1}(x) = \big(z_k^{\omega_1}(x)\big)' - F_k'(x), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{39}$$

искомое функциональное соотношение из D_1.

2. Аналогично из (22), (4) найдем *функциональное* соотношение между $\omega_2(y)$ и $\nu_2(y)$, принесенное на линию $x = 0$, $0 < y < h$ из области D_2:

$$\nu_2(y) = \omega_2'(y) - \psi_2'(y/2), \qquad 0 < y < h. \tag{40}$$

3. *Функциональные* соотношения между $\omega_j(x)$ и $\nu_j(x)$ $(j = 1, 2)$ на линиях $x = 0$, $0 < y < h$ $(j = 2)$, $y = 0$, $0 < x < +\infty$ $(j = 1)$, принесенные из области D_3, найдем из (23)–(27), используя условия сопряжения (5):

$$\omega_2(y) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)\overline{G}(0, y; \xi, t)\big|_{t=0}\, d\xi + \int\limits_0^{h} \nu_2(t)\overline{G}(0, y; \xi, t)\big|_{\xi=0}\, dt +$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)\overline{G}_t(0, y; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \qquad 0 \le y \le h, \tag{41}$$

$$\omega_1(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)G_k^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=0}\, d\xi + \int\limits_0^{h} \nu_2(t)G_k^{-}(x, 0; \xi, t)\big|_{\xi=0}\, dt +$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)G_{kt}^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau. \tag{42}$$

Пусть

$$R(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)\overline{G}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=0}\, d\xi. \tag{43}$$

Тогда в силу (26) равенство (42) можно записать в форме интегродифференциально-разностного уравнения Вольтерра:

$$R(x)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau} \big(x - m\tau\big)\big((x - m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1} R(\eta)\, d\eta =$$
$$= \omega_1(x) - \int\limits_0^{h} \nu_2(t)G_k^{-}(x, 0; \xi, t)\big|_{\xi=0}\, dt - \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)G_{kt}^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{44}$$

которое совпадает с уравнением (21).

Поэтому в силу (18) из (44) найдем

$$R(x) = z_k^{\omega_1}(x) - \int\limits_0^{h} \nu_2(t)\overline{\overline{G}}_k^{-}(x, 0; \xi, t)\big|_{\xi=0}\, dt - \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)\overline{\overline{G}}_{kt}^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \quad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{45}$$

где $z_k^{\omega_1}(x)$ совпадает с (17)–(18), а $\overline{\overline{G}}_k^{-}$ и $\overline{\overline{G}}_k^{+}$ — с (38), если заменить $\psi_{1k}(x)$ на G_k^{-} и G_k^{+}.

На основании (45), (43) равенство (42) примет вид

$$z_k^{\omega_1}(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)\overline{G}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=0}\, d\xi + \int\limits_0^{h} \nu_2(t)\overline{\overline{G}}_k^{-}(x, 0; \xi, t\big|_{\xi=0}\, dt +$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)\overline{\overline{G}}_{kt}^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau. \tag{46}$$

Выражения (41), (46) — искомые функциональные соотношения из D_3.

IV. Используя условия сопряжения (5)–(6), функциональные соотношения (39), (40), и после дифференцирования (41), (46) придем к полной системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\nu_2(y) - \frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^h \nu_2(t)\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt-$$

$$-\frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt = W_1(y), \qquad 0<y<h, \tag{47}$$

$$z^{\nu_1}(x) + \frac{2}{h}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^h \nu_2(t)\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\,dt+$$

$$+\frac{2}{h}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\,dt = W_2(x), \qquad 0<x<+\infty, \tag{48}$$

где

$$W_1(y) = -\psi_2'(y/2) - \frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi t/2h)-\cos^2(\pi y/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi t/h)+\cos(\pi y/h)\big)^2}\,dt, \tag{49}$$

$$W_2(x) = -F'(x) + \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\Phi(x,\xi)\,d\xi + \int\limits_0^h \nu_2(t)T(x,t)\,dt, \tag{50}$$

причем $F(x) = \big\{F_k(x),\ k\tau\le x\le(k+1)\tau,\ (k=0,1,2,\ldots)\big\}$, $\Phi(x,\xi) = \Big\{\overline{\overline{G}}{}^{+}_{ktx}(x,0;\xi,h),\ k\tau\le x\le$ $\le(k+1)\tau\ (k=0,1,2,\ldots)\Big\}$, $T(x,t) = \Big\{\overline{\overline{G}}{}^{-}_{kx}(x,0;0,t) - \overline{G}_x(x,0;0,t),\ k\tau\le x\le(k+1)\tau\ (k=0,1,2,\ldots)\Big\}$.

Интеграл в формуле (49) и его производная по y сходятся, так как $z^f(+\infty)=0$, а при $y\to h$, $t\to 0$, в силу условия $z^f(t)=o(t^2)$.

Первый интеграл в (50) и его производная по x также сходятся, что следует из аналогичных предыдущему рассуждений, например, для интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\overline{\overline{G}}{}^{+}_{0tx}(x,0;\xi,h)\,d\xi = \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\overline{G}_{tx}(x,0;\xi,h)\,d\xi =$$

$$=\frac{2}{h}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi t/2h)-\mathrm{ch}^2(\pi x/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi t/h)+\mathrm{ch}(\pi x/h)\big)^2}\,dt, \qquad 0<x<\tau.$$

Сходимость второго интеграла в (50) и производной по x обеспечена абсолютной интегрируемостью $\nu_2(y)$ на $[0,h]$ и гельдеровостью внутри $(0,h)$, которая следует из гельдеровости $\psi_2'(y)$.

Интегралы в формулах (49) $\big((50)\big)$ имеют вторые производные по y (по x) на $(0,h)$ $\big((0,+\infty)\big)$, то есть их первые производные удовлетворяют там условию Липшица.

Значит, функции W_j', как и ψ_j'', удовлетворяют условию Гельдера внутри своих промежутков определения, а $W_j\in H_1$.

Регуляризация системы (47)–(48) в классе функций $\nu_2(y)$, $z^{\nu_1}(x)$, ограниченных в нуле, когда $\nu_2(y) = o\big[(h-y)^{-1/2}\big]$ при $y\to h$ и $z^{\nu_1}(x) = o\big(\exp(-(1/4+\varepsilon)x)\big)$ $(\varepsilon>0)$ при $x\to+\infty$, проведена аналогично [8]:

$$\nu_2(y) = \frac{1}{2}W_1(y) + \frac{1}{2h}\int\limits_0^h W_1(t)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} W_2(t)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt, \qquad 0<y<h, \tag{51}$$

$$z^{\nu_1}(x)=\frac{1}{2}W_2(x)+\frac{1}{2h}\int\limits_0^h W_1(t)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} W_2(t)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\,dt,\qquad 0<x<+\infty. \tag{52}$$

Из системы (51)–(52), в силу (49)–(50), получим систему

$$\nu_2(y)+\int\limits_0^h \nu_2(s)B(y,s)\,ds=A(y),\qquad 0<y<h, \tag{53}$$

$$z^{\nu_1}(x)-\int\limits_0^h \nu_2(s)\Theta(x,s)\,ds=L(x),\qquad 0<x<+\infty, \tag{54}$$

где

$$B(y,s)=\frac{1}{4h^2}\int\limits_0^{+\infty} T(t,s)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt,$$

$$A(y)=-\frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{1}{2h}\int\limits_0^h \psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} F'(t)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt-$$

$$-\frac{1}{h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(s)\left\{\sin\frac{\pi y}{2h}\frac{\mathrm{ch}(\pi s/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi s/2h)-\cos^2(\pi y/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi s/h)+\cos(\pi y/h)\big)^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_0^h \left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\sin\frac{\pi t}{2h}\frac{\mathrm{ch}(\pi s/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi s/2h)-\cos^2(\pi t/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi s/h)+\cos(\pi t/h)\big)^2}\,dt+$$

$$\left.+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\Phi(t,s)\,dt\right\}ds,$$

$$\Theta(x,s)=\frac{1}{4h}T(x,s)-\frac{1}{4h^2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}T(t,s)\,dt,$$

$$L(x)=-\frac{1}{2}F'(x)-\frac{1}{2h}\int\limits_0^h \psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} F'(t)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(s)\left\{\Phi(x,s)-\frac{2}{h}\int\limits_0^h\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\times\right.$$

$$\times\sin\frac{\pi t}{2h}\frac{\mathrm{ch}(\pi s/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi s/2h)-\cos^2(\pi t/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi s/h)+\cos(\pi t/h)\big)^2}\,dt-$$

$$\left.-\frac{1}{h}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\Phi(t,s)\,dt\right\}ds.$$

Функции $A(y)$, $A'(y)$, $L(x)$, $L'(x)$ принадлежат классу Гельдера; $A(x)$, $L(x) \to 0$ при $x \to 0$; $L(x) = o(\exp(\gamma x))$, $\gamma < -1/2$ при $x \to +\infty$; $\left(h/2 - y\right)^{1/2} A(y) \to 0$ при $y \to h/2$.

Ядра $B(x,t)$, $\Theta(x,t)$ непрерывно дифференцируемы в областях определения, ограничены в точке $(0,0)$, допускают обращение в ∞ порядка не выше $1/2$ вблизи $(0,h)$, а вблизи $(+\infty,0)$ исчезают.

Система (53)–(54) является системой уравнений Фредгольма, безусловная разрешимость которой следует из единственности решения задачи Т.

Библиографический список

1. *Архипов, Г.И.* Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.
2. *Ильин, В.А.* Основы математического анализа: в 2 ч. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1. – 616 с.
3. *Франкль, Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике / Ф.И. Франкль. – М.: Наука, 1973. – 712 с.
4. *Зарубин, А.Н.* Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом / А.Н. Зарубин / Орел. гос. ун-т. – Орел, 1999. – 225 с.
5. *Зарубин, А.Н.* Интегродифференциально-разностные уравнения Вольтерра и интегральные преобразования / А.Н. Зарубин // Современная математика и проблемы математического образования: Тр. Всерос. науч.-практ. конф. – Орел, 2009. – С. 48–49.
6. *Прудников, А.П.* Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 799 с.
7. *Диткин, В.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.П. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
8. *Маричев, О.И.* Об уравнении смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области / О.И. Маричев // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1969. – № 6. – С. 74–80.

УДК 004.942

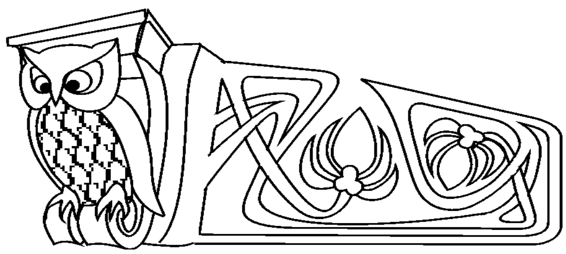
МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ УДАРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В.К. Манжосов, Д.А. Новиков

Ульяновский государственный технический университет,
кафедра теоретической и прикладной механики
E-mail: v.maniosov@ulstu.ru, tpm@ulstu.ru

Разработана модель движения ударной системы при периодическом силовом воздействии с учетом возможных многократных ударов за период силового воздействия. Осуществлено моделирование режимов движения ударной системы. Сделан выбор параметров системы, реализующих требуемые характеристики движения.

Ключевые слова: удар, модель удара, движение ударной системы, многократный удар, ударный механизм.



Impact System Motion Modes Simulation at Periodic Force Effect

V.K. Manzhosov, D.A. Novikov

Ulyanovsk State Technical University,
Chair of Theoretical and Applied Mechanics
E-mail: v.maniosov@ulstu.ru, tpm@ulstu.ru

A model of impact system motion at periodic force effect taking into account possible multiple impacts during the period of the force effect has been developed. Simulation of impact system motion modes has been carried out. Choice of system parameters realizing the required motion characteristics has been made.

Key words: impact, impact model, impact system motion, multiple impact, impact mechanism.

ВВЕДЕНИЕ

Удар — физический процесс, который часто используется в практической деятельности [1]. Технологии с использованием удара перспективны, они позволяют воздействовать на обрабатываемый объект с огромными усилиями [2, 3]. Реализация периодического удара осуществляется с использованием механизмов ударного действия [4]. При создании ударных механизмов возникает необходимость построения рациональных законов движения ударной массы [4, 5]. На режим движения ударной массы оказывает влияние множество факторов, к числу которых можно отнести силы, разгоняющие массу для нанесения удара и отводящие ее в исходное состояние, заданный период между ударами, время переключения сил, восстановление скорости ударника и другие. Эффективный анализ влияния этих факторов и построение требуемого режима движения ударной системы могут быть достигнуты при моделировании движения виброударной системы.