УДК 519.917

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ БОЛЬШИХ T

С. В. Лексина

Самарский государственный университет,
кафедра математики и бизнес-информатики
E-mail: lesveta@rambler.ru

В работе рассматриваются вопросы, связанные с решением краевых задач для системы гиперболических уравнений второго порядка, в которых отсутствуют смешанные производные. Проведено построение продолжения функций, определяющих начальные и финальные условия.

Ключевые слова: волновое уравнение, система волновых уравнений, краевые задачи.

The Second Boundary Problem for the System Hyperbolic Type Second Order for Large T

S. V. Lexina

Samara State University,
Chair of Mathematics and Bisiness Computer Science
E-mail: lesveta@rambler.ru

In the paper we consider the control problem for objects which vibration are described by the system of ware equations with boundary condition of the second kind.

Key words: wave equation, system of wave equations, boundary control.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Известно [1], что волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов (акустические и электромагнитные колебания [2, 3], колебание струны [4], мембраны [5]), а также является основой для описания явлений, связанных с землетрясением [6].

Исследование систем дифференциальных уравнений с частными производными легко объясняется их заведомо более значительными по сравнению с системами обыкновенных дифференциальных уравнений возможностями в построении математических моделей для описания самых разнообразных процессов и явлений. Например, в работе [7] рассматривается гиперболическая система первого порядка, описывающая процесс теплопереноса в однородной пластинке.

Объектом исследования в данной работе является система гиперболического типа второго порядка:

$$\mathbf{w}_{tt} - A\mathbf{w}_{xx} = 0, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{w}(x,t) = \mathrm{colon}\,(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ — вектор-функция, A — постоянная квадратная матрица порядка m с положительными действительными собственными значениями.

Система (1.1) при $m = 2$ описывает продольно-крутильные колебания длинной, естественно закрученной нити [8, 9]:

$$\begin{cases} w_{1tt} - \dfrac{g}{q}EFw_{1xx} = \dfrac{gk}{q}EFw_{2xx}; \\ w_{2tt} - \dfrac{g}{qr^2}(B + kEF)w_{2xx} = \dfrac{gk}{qr^2}EFw_{1xx}, \end{cases}$$

где EF и B — продольная и крутильная жесткость нити, g — вес единицы длины нити, k — коэффициент раскрутки, r — радиус инерции поперечного сечения нити, q — ускорение свободного падения.

Под естественно закрученной нитью подразумевается нить, обладающая продольной и крутильной жесткостью, а также способная раскручиваться при растяжении и удлиняться при раскручивании. Модель естественно закрученной нити более точно отражает основные свойства реального стального каната, в частности, описывает его свойства раскручивания при свободном натяжении и дает возможность оценить крутящие моменты, возникающие при продольных колебаниях. При составлении уравнений движения естественно закрученной нити были введены следующие обозначения [8]: $w_1(x,t)$ — продольные деформации (полное удлинение части нити), $w_2(x,t)$ — поворот нити. В качестве примера естественно закрученной нити можно рассмотреть стальной канал [9].

Граничные условия для функций $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$ на конце $x = l$ образуют уравнения движения концевого груза. Если $w_2(l,t) = 0$, то это означает, что груз прикрепленный на конце $x = l$ нити не может совершать поворотов.

В работах [7, 10, 11] рассматривается краевая задача, моделирующая процесс теплопереноса в стержне при заданном температурном режиме на концах в рамках гиперболического закона теплопроводности.

Отметим, что круг гиперболических уравнений и систем гиперболических уравнений ограничен теми объектами, для которых известна интегральная форма представления решения в точках области его определения [12]. Класс таких уравнений достаточно узок. Одним из известных методов построения решений краевых задач в явном виде является метод Римана и его различные обобщения. В связи с этим в теории линейных уравнений второго порядка гиперболического типа функция Римана играет важную роль, с ее помощью удается записать в явном виде решение задач Коши и Гурса. Так, например, Вольтерра [13], Адамар [14] привели формулу представления решений задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка с числом независимых переменных больше двух, Бургатти [15] и Реллих [16] привели формулу представления Римана для линейных уравнений высших порядков с числом независимых переменных, равным двум, имеются решения задачи Коши и Гурса для уравнения Бианки [17, 18], записываемые в [19] через функцию Римана, Хольмгрен [20, 21], Б. Н. Бурмистров [22] обобщили метод Римана на системы уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. В монографии А. В. Бицадзе [23] приведено обощение метода Римана на один класс гиперболических систем второго порядка с двумя независимыми переменными и кратными характеристиками. При этом показано, что вопрос о нахождении матрицы Римана сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра второго порядка, которая всегда имеет единственное решение.

В работах [24–26] приведены уравнения и системы уравнений, для которых функция Римана и ее аналоги построены и выражены через специальные функции.

Иногда удается решить краевые задачи для уравнений гиперболического типа и без вспомогательных функций (функций Римана, Римана – Адамара). В работе [27] отмечено, что общие решения, если их возможно найти, являются чрезвычайно полезными, особенно в вопросах прикладного характера. Если известно общее решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, то скорее всего возможно решить и краевую задачу. Число уравнений, для которых известны общие решения, очень мало. Это волновое уравнение, уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу [28], некоторые системы частного вида [23], а также ряд нелинейных уравнений [29].

Рассмотрим систему волновых уравнений (1.1) в области $Q_{l,T} = [0,l] \times [0,T]$. Предположим, что характеристическое уравнение матрицы A имеет корень λ кратности m, либо m различных собственных значений, тогда существует матрица S такая, что

$$\Lambda = S^{-1}AS,$$

где Λ— жорданова клетка, подобная матрице A (в случае кратных собственных значений), либо диагональная матрица, в которой на главной диагонали стоят различные собственные значения.

Выполним в системе (1.1) замену $w = S^{-1}u$, получим систему

$$u_{tt} - \Lambda u_{xx} = 0, \tag{1.2}$$

в области $Q_{l,T}$, где $u(x,t) = \operatorname{colon}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$—вектор-функция.

В случае, когда Λ—жорданова клетка, матричное уравнение (1.2) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} u_{1tt} - \lambda^2 u_{1xx} = 0, \\ u_{2tt} - \lambda^2 u_{2xx} = u_{1xx}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ u_{m\ tt} - \lambda^2 u_{m\ xx} = u_{m-1\ xx}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Общее решение i-го уравнения системы (1.3) для $i \geqslant 2$ определяется формулой [30]

$$u_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{\delta^{(i-k)} u_k^0}{(i-k)!} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(-1)^k C_{2k-1}^{k-1}}{(2\lambda)^{2k}} \sum_{m=1}^{i-k} \frac{\delta^{(i-k-m)}(u_m^0 - u_m^0(x,-t))}{(i-k-m)!},$$

где $\delta \equiv \dfrac{1}{2\lambda}\dfrac{\partial}{\partial\lambda}$, $\delta^0 \equiv 1$, u_j^0 – общее решение соответствующего однородного волнового уравнения, определяемое [1]:

$$u_j^0(x,t) = f_j(x+\lambda t) + g_j(x-\lambda t). \tag{1.4}$$

В случае, когда Λ—диагональная матрица, матричное уравнение (1.2) эквивалентно системе однородных волновых уравнений, общее решение которых определяется формулой (1.4), с волновым числом $\lambda = \lambda_j$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Краевой задачей называют задачу для матричного волнового уравнения в области $\overline{Q}_{l,T}$ с начальными (или финальными) условиями и граничными условиями при $x = 0$ и $x = l$ одного рода.

Для системы (1.1) в области $Q_{l,T}$ рассмотрим начальные условия:

$$w(x,0) = \varphi(x), \quad w_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{2.1}$$

финальные условия:

$$w(x,T) = \widehat{\varphi}(x), \quad w_t(x,T) = \widehat{\psi}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{2.2}$$

граничные условия второго рода:

$$w_x(0,t) = \mu(t), \quad w_x(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.3}$$

где $\varphi(x)$, ψ, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$, μ, ν — вектор-функции, размерности m.

Вторая краевая задача с начальными условиями.

Найти вектор-функцию $w(x,t)$, удовлетворяющую системе (1.1) в прямоугольнике $Q_{l,T}$, начальным условиям (2.1) и граничным условиям второго рода (2.3).

Вторая краевая задача с финальными условиями.

Найти вектор-функцию $w(x,t)$, удовлетворяющую системе (1.1) в прямоугольнике $Q_{l,T}$, финальным условиям (2.2) и граничным условиям второго рода (2.3).

Рассмотрим вторую краевую задачу с начальными (финальными) условиями для системы (1.1) в области $Q_{l,T}$, при $T > l/\min\limits_i\{\lambda_i\}$. Введем обозначение $q_i = [T\lambda_i/l]$, $[x]$ – целая часть числа x.

Выполним в системе (1.1) замену $w = S^{-1}u$, приводящую систему (1.1) к системе m однородных волновых уравнений, начальные условия (2.1) примут вид

$$\mathbf{u}(x,0) = S\cdot\mathbf{w}(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad \mathbf{u}_t(x,0) = S\cdot\mathbf{w}_t(x,0) = \widetilde{\psi}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.4}$$

финальные условия (2.2):

$$\mathbf{u}(x,T) = S\cdot\mathbf{w}(x,T) = \widetilde{\widetilde{\varphi}}(x), \quad \mathbf{u}_t(x,T) = S\cdot\mathbf{w}_t(x,T) = \widetilde{\widetilde{\psi}}(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.5}$$

и гарничные условия (2.3):

$$\mathbf{u}_x(0,t) = S\cdot\mathbf{w}_x(0,t) = \widetilde{\mu}(t), \quad \mathbf{u}_x(l,t) = S\cdot\mathbf{w}_x(l,t) = \widetilde{\nu}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.6}$$

Представим решение второй краевой задачи с начальными условиями в области $Q_{l,T}$ в виде суммы решений двух задач для системы однородных волновых уравнений.

Задача I:

$$\mathbf{u}(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad \mathbf{u}_t(x,0) = \widetilde{\psi}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$\mathbf{u}_x(0,t) = 0, \quad \mathbf{u}_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

Задача II:

$$\mathbf{u}(x,0) = 0, \quad \mathbf{u}(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$\mathbf{u}_x(0,t) = \mu(t), \quad \mathbf{u}_x(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Решение задачи I в области $Q_{l,T}$, $T > l/\lambda_i$ имеет вид

$$u_i(x,t) = \frac{{}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i(x+\lambda_i t) + {}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i(x-\lambda_i t)}{2} + \frac{1}{2\lambda_i}\int\limits_{x-\lambda_i t}^{x+\lambda_i t} {}^{q_i}\widetilde{\Psi}_i(s)\,ds,$$

где $u_i(x,t)$ — решение задачи I для i-го уравнения системы m однородных волновых уравнений, ${}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i$, ${}^{q_i}\widetilde{\Psi}_i$ — некоторые продолжения функций $\widetilde{\varphi}_i(x)$, $\widetilde{\psi}_i(x)$ на отрезки $[-q_i l, -(q_i-1)l]$, $[q_i l, (q_i+1)l]$.

Продолжения функций $\widetilde{\varphi}_i(x)$, $\widetilde{\psi}_i(x)$ в условиях задачи I на отрезки вида $[-q_i l, -(q_i-1)l]$, $[q_i l, (q_i+1)l]$ определяются следующими формулами:
при $x \in [-q_i l; -(q_i-1)l]$:

$${}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i'(x) = (-1)^{q_i}\widetilde{\varphi}_i'\left((-1)^{q_i}x + \left[\frac{1+(-1)^{q_i}}{2}q_i l - \frac{1-(-1)^{q_i}}{2}l(q_i-1)\right]\right), \tag{2.7}$$

$${}^{q_i}\widetilde{\Psi}_i(x) = \widetilde{\psi}_i\left((-1)^{q_i}x + \left[\frac{1+(-1)^{q_i}}{2}q_i l - \frac{1-(-1)^{q_i}}{2}l(q_i-1)\right]\right); \tag{2.8}$$

при $x \in [q_i l; (q_i+1)l]$:

$${}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i'(x) = (-1)^{q_i}\widetilde{\varphi}_i'\left((-1)^{q_i}x + \left[\frac{1-(-1)^{q_i}}{2}(q_i+1)l - \frac{1+(-1)^{q_i}}{2}lq_i\right]\right), \tag{2.9}$$

$${}^{q_i}\widetilde{\Psi}_i(x) = \widetilde{\psi}_i\left((-1)^{q_i}x + \left[\frac{1-(-1)^{q_i}}{2}(q_i+1)l - \frac{1+(-1)^{q_i}}{2}lq_i\right]\right). \tag{2.10}$$

Доказательство формул (2.7)–(2.10) проводится методом математической индукции.

Решение задачи II для i-го уравнения системы m однородных волновых уравнений в области $Q_{l,T}$, при $T < l/\lambda_i$:

$$u_i(x,t) = -\lambda_i\int\limits_0^{t-\frac{x}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\mu}}_i(s)\,ds + \lambda_i\int\limits_0^{t-\frac{l-x}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\nu}}_i(s)\,ds,$$

при $l/\lambda_i < T < 2l/\lambda_i$:

$$u_i(x,t) = -\lambda_i\int\limits_0^{t-\frac{x}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\mu}}_i(s)\,ds - \lambda_i\int\limits_0^{\frac{x+\lambda_i t-2l}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\mu}}_i(s)ds + \lambda_i\int\limits_0^{t-\frac{l-x}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\nu}}_i(s) + \lambda_i\int\limits_0^{\frac{\lambda_i t-x-l}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\nu}}_i(s)\,ds.$$

Продолжая процесс далее, получим решение $u_i(x,t)$ в виде следующей суммы:

$$u_i(x,t) = \sum_{m=0}^{q_i}\lambda_i\frac{-1-(-1)^m}{2}\left\{\int\limits_0^{\frac{\lambda_i t-x-ml}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\mu}}_i(s)ds - \int\limits_0^{\frac{\lambda_i t+x-(m+1)l}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\nu}}_i(s)\,ds\right\} +$$

$$+\sum_{m=0}^{q_i}\lambda_i\frac{-1+(-1)^m}{2}\left\{\int\limits_0^{\frac{\lambda_i t+x-(m+1)l}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\mu}}_i(s)\,ds - \int\limits_0^{\frac{\lambda_i t-x-ml}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\nu}}_i(s)\,ds\right\}.$$

Выполнение граничных условий (2.6) проверяется непосредственной подстановкой.

Решение $u(x,t) = \mathrm{colon}\,(u_1,\ldots,u_m)$ второй краевой задачи с начальными условиями для системы m однородных волновых уравнений в области $Q_{l,T}$, $T > l/\min\limits_i\{\lambda_i\}$ примет вид

$$u_i(x,t) = \frac{{}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i(x+\lambda_i t) + {}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i(x-\lambda_i t)}{2} + \frac{1}{2\lambda_i}\int\limits_{x-\lambda_i t}^{x+\lambda_i t} {}^{q_i}\widetilde{\Psi}_i(s)\,ds +$$

$$+\sum_{m=0}^{q_i}\lambda_i\frac{-1-(-1)^m}{2}\left\{\int\limits_0^{t-\frac{x+ml}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\mu}}_i(s)\,ds - \int\limits_0^{t+\frac{x-(m+1)l}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\nu}}_i(s)\,ds\right\} +$$

$$+\sum_{m=0}^{q_i}\lambda_i\frac{-1+(-1)^m}{2}\left\{\int\limits_0^{t+\frac{x-(m+1)l}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\mu}}_i(s)ds-\int\limits_0^{t-\frac{x+ml}{\lambda_i}}\underline{\widetilde{\nu}}_i(s)\,ds\right\},\tag{2.11}$$

где $u_i(x,t)$ — решение второй краевой задачи с начальными условиями для i-го уравнения системы в области $Q_{l,T}$, $T>l/\lambda_i$.

Аналогично, устанавливается, что решение второй краевой задачи с финальными условиями для системы m однородных волновых уравнений в области $Q_{l,T}$, $T>l/\min\limits_i\{\lambda_i\}$ примет вид

$$u_i(x,t)=\frac{{}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i(x+\lambda_i(t-T))+{}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i(x-\lambda_i(t-T))}{2}-\frac{1}{2\lambda_i}\int\limits_{x-\lambda_i(t-T)}^{x+\lambda_i(t-T)}{}^{q_i}\widetilde{\Psi}_i(s)\,ds-$$

$$-\sum_{m=0}^{q_i}\lambda_i\frac{1+(-1)^m}{2}\left\{\int\limits_{t+\frac{x+ml}{\lambda_i}}^{T}\widetilde{\widehat{\mu}}_i(s)\,ds-\int\limits_{t+\frac{(m+1)l-x}{\lambda_i}}^{T}\widetilde{\widehat{\nu}}_i(s)\,ds\right\}+$$

$$+\sum_{m=0}^{q_i}\lambda_i\frac{-1+(-1)^m}{2}\left\{\int\limits_{t+\frac{(m+1)l-x}{\lambda_i}}^{T}\widetilde{\widehat{\mu}}_i(s)\,ds-\int\limits_{t+\frac{x+ml}{\lambda_i}}^{T}\widetilde{\widehat{\nu}}_i(s)\,ds\right\},\tag{2.12}$$

где $u_i(x,t)$ — решение второй краевой задачи с финальными условиями для i-го уравнения системы в области $Q_{l,T}$, $T>l/\lambda_i$.

Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если функции* ${}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i(x)\in C^2[-q_il;(q_i+1)l]$, ${}^{q_i}\widetilde{\Psi}_i(x)\in C^1[-q_il;(q_i+1)l]$, ${}^{q_i}\widetilde{\Phi}_i$, ${}^{q_i}\widetilde{\Psi}_i$ — *четные продолжения функций* $\widetilde{\varphi}_i$, $\widetilde{\psi}_i$ *на отрезки* $[-q_il,-(q_i-1)l]$, $[q_il,(q_i+1)l]$, *определяемые формулами* (2.7)–(2.10), $\underline{\widetilde{\mu}}_i(t)$, $\underline{\widetilde{\nu}}_i(t)\in C^1[-T;T]$, *выполнены условия согласования для вектор-функций* $\widetilde{\varphi}'(0)=\widetilde{\mu}(0)$, $\widetilde{\varphi}'(l)=\widetilde{\nu}(0)$, *тогда решение* $u(x,t)=\mathrm{colon}\,(u_1,\ldots,u_m)$ *второй краевой задачи для системы* m *однородных волновых уравнений в области* $Q_{l,T}$ *при* $T>l/\max\limits_i\{\lambda_i\}$ *имеет вид* (2.11).

Теорема 2. *Если функции* ${}^{q_i}\widetilde{\widetilde{\Phi}}_i(x)\in C^2[-q_il;(q_i+1)l]$, ${}^{q_i}\widetilde{\widetilde{\Psi}}_i(x)\in C^1[-q_il;(q_i+1)l]$, ${}^{q_i}\widetilde{\widetilde{\Phi}}_i$, ${}^{q_i}\widetilde{\widetilde{\Psi}}_i$ — *четные продолжения функций* $\widetilde{\widetilde{\varphi}}_i$, $\widetilde{\widetilde{\psi}}_i$ *на отрезки* $[-q_il,-(q_i-1)l]$, $[q_il,(q_i+1)l]$, *функции* $\widetilde{\widehat{\mu}}_i(t)=\widetilde{\mu}_i(t)$, *при* $t\in[0,T]$, $\widetilde{\widehat{\mu}}(T)=0$, $\widetilde{\widehat{\mu}}_i(t)\equiv 0$ *при* $t>T$, *аналогичным условиям удовлетворяет и функция* $\widetilde{\widehat{\nu}}_i(t)$, $\widetilde{\widehat{\mu}}_i(t)$, $\widetilde{\widehat{\nu}}_i(t)\in C^1[0;2T]$ *и выполнены условия согласования для вектор-функций* $\widetilde{\widehat{\varphi}}(0)=\widetilde{\mu}(T)$, $\widetilde{\widehat{\varphi}}(l)=\widetilde{\nu}(T)$, *тогда решение* $u(x,t)=\mathrm{colon}\,(u_1,\ldots,u_m)$ *второй краевой задачи с финальными условиями для системы* m *однородных волновых уравнений в области* $Q_{l,T}$ $T>l/\max\limits_i\{\lambda_i\}$ *имеет вид* (2.12).

Выполним преобразование $\mathbf{w}=S^{-1}\mathbf{u}$, приводящее систему (1.1) к виду (1.3). Начальные условия примут вид (2.4) (финальные условия вид (2.5)), граничные условия первого рода — вид (2.6).

Теорема 3. *Если функции* ${}^{q}\widetilde{\Phi}_k\in C^{2+i-k}[0,l]$, ${}^{q}\widetilde{\Psi}_k\in C^{1+i-k}[0,l]$, *функции* ${}^{q}\widetilde{\Phi}_k$, ${}^{q}\widetilde{\Psi}_k$ — *продолжения функций* $\widetilde{\varphi}_k$, $\widetilde{\psi}_k$ *на отрезки* $[ql,(q+1)l]$, $[-ql,-(q-1)l]$, $q=[T\lambda/l]$, $\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\nu}_k\in C^{1+i-k}[-T,T]$, ($[0,2T]$) *тогда решение второй краевой задачи с начальными (финальными) условиями для системы* (1.3) *в области* $Q_{l,T}$ *при* $T>l/\lambda$ *представимо:*

$$u_i(x,t)=\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{(i-k)!}\delta^{(i-k)}F_\lambda({}^{q}\widetilde{\Phi}_k,{}^{q}\widetilde{\Psi}_k,\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\nu}_k),$$

где F_λ — *решение второй краевой задачи с начальными (финальными) условиями для соответствующего однородного уравнения системы* (1.3) *при* $T>l/\lambda$, *определяемое формулой* (2.18) *и* (2.12) *соответственно.*

Выполняя замену $\mathbf{u}=S\cdot\mathbf{w}$, получим решение второй краевой задачи с начальными (финальными) условиями для исходной системы (1.1).

Библиографический список

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. *Шашков А. Г., Бубнов А. Г., Яновский С. Ю.* Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
3. *Глэдвелл Г. М. Л.* Обратные задачи теории колебаний. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 608 с.
4. *Арнольд В. И.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ФАЗИС, 1999. 180 с.
5. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. *Буллен К. Е.* Введение в теоретическую сейсмологию. М.: Мир, 1966. 460 с.
7. *Романовский Р. К., Жукова О. Г.* Гиперболическая модель задачи граничного управления процессом теплопереноса в одномерном твердом материале //Докл. АН ВШ РФ. 2006. № 1(6). С. 69–77.
8. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наук. думка, 1971.
9. *Горошко О. А., Чиж А. А.* К вопросу о продольно-крутильных колебаниях упругой естественно закрученной нити (каната) переменной длины с концевым грузом, движущимся по жестким направляющим. Киев: Техника, 1964. С. 56–64.
10. *Жукова О. Г., Романовский Р. К.* Граничное управление процессом теплопроводности в одномерном материале. Гиперболическая модель // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 5. С. 650–654.
11. *Жукова О. Г., Романовский Р. К.* Двустороннее граничное управление процессом теплопереноса в одномерном материале. Гиперболическая модель // Сибирский журн. индустриальной математики. 2007. Т. 10, № 4. С. 32–40.
12. *Терлецкий В. А.* К оптимизации гиперболических систем // Методы оптимизации и их приложения: тр. XII Байкальской междунар. конф. Иркутск, 2001. Т. 2. С. 167–171.
13. *Volterra V.* Sur les vibrations des corps elastiques isotropes // Acta Math. 1894. № 18. P. 161–232.
14. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Физматлит, 1994. 544 с.
15. *Burgatti P.* Sull' estensione del metodo d'integrazione di Riemann all' equazioni lineari d'ordine n con due variabili independenti // Rend. reale accad. lincei. Ser 5a 1906. Vol. 15, № 2. P. 602–609.
16. *Rellich F.* Verallgemeinerung der Riemannschen Integrtions-methode auf Differentialgleichungen n-ter Ordung in zwei Veränderlichen // Math. Ann. 1930. № 103. P. 249–278.
17. *Bianchi L.* Sulla estensione del metodo di Riemann alle equiazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. Sc. fis., mat. e natur. 1895. Vol. 4, 1 sem. P. 133–142.
18. *Bateman H.* Logarithmic solutions of Bianchi's equation // Proc. USA Acad. 1933. Vol. 19. P. 852–854.
19. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. мат. о-во, 2001. 226 с.
20. *Holmgren E.* Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du preimier ordre â daux variables independents â characteristiques reeles et distinotes // Arkiv för Math., Astr. och Fysik. 1906. Bd. 5, № 1.
21. *Holmgren E.* Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du preimier ordre â characteristiques reeles et distinctes // Arkiv för Math., Astr. och Fysik. 1909. Bd.6, № 2. P. 1–10.
22. *Бурмистров Б. Н.* Решение задачи Коши методом Римана для системы уравнений первого порядка с вырождением на границе // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1971. Вып. 8. С. 41–54.
23. *Бицадзе А. В.* Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 1. С. 31–34.
24. *Андреев А. А., Волкодавов В. Ф., Шевченко Г. Н.* О функции Римана // Дифференциальные уравнения: тр. пединститутов РСФСР. 1974. Вып. 4. С. 25–31.
25. *Андреев А. А.* О построении функции Римана // Дифференциальные уравнения: тр. пединститутов РСФСР. 1975. Вып. 6. С. 3–9.
26. *Андреев А. А.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа // Дифференциальные уравнения: тр. пединститутов РСФСР. 1980. Вып. 16.
27. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
28. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
29. *Ames W. F.* Nonlinear Partial differential equations in engineering. N.Y.; L.: Academic Press, 1965.
30. *Лексина С. В.* Задача граничного управления в условиях второй краевой задачи для матричного волнового уравнения // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2009. № 4(70). С. 20–29.