НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 512.66+513.83

КОЛЬЦА КОГОМОЛОГИЙ ПОЛУКУБИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

В.Е. Лопаткин

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
кафедра прикладной математики и информатики
E-mail: wickktor@gmail.com

Работа посвящена определению структуры кольца на градуированной группе когомологий полукубического множества с коэффициентами в кольце с единицей.

Ключевые слова: кольца полукубических когомологии, когомологии малых категорий, полукубические множества.

Cohomology Rings of Semicubecal Sets

V.E. Lopatkin

Komsomolsk on Amur State Technical University,
Chair of Applied Mathematics and Information Science
E-mail: wickktor@gmail.com

The aim of this paper is to define the structure of the ring over the graded cohomology group of a semicubecal set with coefficients in a ring with unity.

Key words: rings of semicubical cohomologies, cohomology of small categories, semicubical sets.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что группы гомологий полукубического множества с коэффициентами в гомологической системе абелевых групп на нём можно определить как значения производных функторов копредела, взятому по категории сингулярных кубиков. Это применяется для обобщения спектральной последовательности Серра для полукубических множеств [1]. Для групп когомологий имеет место двойственное утверждение.

Под когомологической системой на полукубическом множестве мы будем подразумевать функтор, определенный на категории сингулярных кубиков. Значения этого функтора на морфизмах не обязаны быть изоморфизмами.

Если когомологическая система принимает постоянные значения, равные некоторому кольцу, то на градуированной группе когомологий с коэффициентами в этой системе структуру кольца можно определить аналогично тому, как это делается в [2] для сингулярных кубических когомологий.

Данная работа посвящена определению структуры градуированного кольца на градуированной группе когомологий полукубического множества с коэффициентами в когомологической системе колец, принимающей постоянное значение.

Сначала мы приведём необходимые сведения из теории полукубических множеств и когомологий малых категорий. Затем определим умножение и докажем, что оно превращает градуированную группу когомологий полукубического множества в кольцо. Далее, мы изучаем свойства операции умножения в полученном кольце когомологий, которые необходимы для вычисления значений этой операции. Основным результатом работы является теорема 4.

Будем использовать следующие обозначения. Категорию множеств и отображений будем обозначать через Ens, категорию абелевых групп и гомоморфизмов — через Ab, а категорию колец и гомоморфизмов, сохраняющих единицу, — через Ring.

1. ПОЛУКУБИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

Определение 1. *Полукубическим множеством* $Q = (Q_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$ называется последовательность множеств (Q_n), где $n \in \{0,1,\ldots\}$, и семейство отображений $\partial_i^{n,\varepsilon} : Q_{n-1} \to Q_n$, определённых при $1 \le i \le n$, $\varepsilon \in \{0,1\}$ и удовлетворяющих для всех $\alpha, \beta \in \{0,1\}$, $n \ge 2$, $1 \le i < j \le n$, коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} Q_n \arrow[r, "\partial_j^{n,\beta}"] \arrow[d, "\partial_i^{n,\alpha}"'] & Q_{n-1} \arrow[d, "\partial_i^{n-1,\alpha}"] \\ Q_{n-1} \arrow[r, "\partial_{j-1}^{n-1,\beta}"'] & Q_{n-2} \end{tikzcd}$$

Пусть $\square_+$ — категория, состоящая из конечных частично упорядоченных множеств $\mathbb{I}^n = \{0,1\}^n$, равных декартовой степени линейно упорядоченного множества $\mathbb{I} = \{0,1\}$. Морфизмами этой категории определяются как возрастающие отображения частично упорядоченных множеств, допускающих разложение в композицию отображений вида $V_i^{k,\varepsilon} : \mathbb{I}^{k-1} \to \mathbb{I}^k$, где $V_i^{k,\varepsilon}(u_1,\ldots,u_{k-1}) = (u_1,\ldots,u_{i-1},\varepsilon,u_i,\ldots,u_{k-1})$, здесь $\varepsilon \in \{0,1\}$, $1 \le i \le k$. Иногда, когда ясно какая размерность, мы будем просто писать V_i^ε.

Хорошо известно [1], что полукубическое множество X можно рассматривать как функтор $X : \square_+^{op} \to \mathrm{Ens}$.

Пусть H — некоторое упорядоченное подмножество $\{h_1,\ldots,h_p\}$ множества $\{1,2,\ldots,n\}$. Определим отображение $\lambda_H^\varepsilon : \mathbb{I}^p \to \mathbb{I}^n$ следующей формулой: $\lambda_H^\varepsilon(u_1,\ldots,u_p) = (v_1,\ldots,v_n)$, где $v_i = \varepsilon$, если $i \notin H$, и $v_{h_r} = u_r$, $r = 1,\ldots,p$.

Согласно [2, предложение 9.3.4] имеет место следующее

Предложение 1. *Для заданного упорядоченного подмножества* $H = \{h_1,\ldots,h_p\}$ *множества* $\{1,2,\ldots,n\}$, *определим* $\widehat{H}_\mu$ *как* $\{h_1,\ldots,h_{\mu-1},h_{\mu+1},\ldots,h_p\}$ *и* $\widetilde{H}_\mu$ *как* $\{h_1,\ldots,h_{\mu-1},h_{\mu+1}-1,\ldots,h_p-1\}$. *Если* $j \notin H$ *и* $h_r < j < h_{r+1}$, *определим* H_j *как* $\{h_1,\ldots,h_r,h_{r+1}-1,\ldots,h_p-1\}$. *Тогда имеют место следующие формулы, при* $\varepsilon,\eta \in \{0,1\}$:

$$\lambda_H^\eta \circ V_\mu^\varepsilon = V_{h_\mu}^\varepsilon \circ \lambda_{\widetilde{H}_\mu}^\eta, \qquad \lambda_H^\varepsilon \circ V_\mu^\varepsilon = \lambda_{\widehat{H}_\mu}^\varepsilon, \qquad \lambda_H^\varepsilon = V_j^\varepsilon \circ \lambda_{H_j}^\varepsilon.$$

При этом H_j *и* $\widetilde{H}_\mu$ *в этих формулах следует рассматривать как упорядоченные подмножества множества* $\{1,2,\ldots,n-1\}$.

2. ДИАГОНАЛЬНОЕ ВЛОЖЕНИЕ

В данном разделе мы введём в рассмотрение диагональное вложение Δ и покажем что оно является цепным.

Напомним некоторые понятия (см. [1]), необходимые нам для дальнейшего.

Пусть $X = (X_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$ — полукубическое множество, а $\square_+[X_p] = L(X_p)$ при $p \ge 0$ — свободная абелева группа и $\square_+[X_p] = 0$ при $p < 0$. Положим, что $D_i^\varepsilon = L(\partial_i^\varepsilon) : \square_+[X_p] \to \square_+[X_{p-1}]$ и определим гомоморфизмы $D : \square_+[X_p] \to \square_+[X_{p-1}]$, $p \ge 1$, формулой $D = \sum\limits_{i=1}^{p} (-1)^i \left(D_i^1 - D_i^0\right)$.

Пусть $\square_+[X] = \bigoplus\limits_{p \ge 0} \square_+[X_p]$ — прямая сумма групп $\square_+[X_p]$.

Как и в [1, с. 234], будем отождествлять кубики $f \in X_p$ с соответствующими сингулярными кубиками $\widetilde{f} : h_{\mathbb{I}^p} \to X$, здесь f — естественное преобразование контравариантного функтора $h_{\mathbb{I}^p}$, представимого объектом, $\mathbb{I}^p$ в функтор X. Таким образом, можно считать, что сингулярные p-кубики $f : h_{\mathbb{I}^p} \to X$ — элементы группы $\square_+[X_p]$.

Рассмотрим функторные морфизмы $h_{\lambda^\varepsilon_H} : h_{\mathbb{I}^p} \to h_{\mathbb{I}^n}$. Нетрудно видеть, что гомоморфизмы D^ε_i можно определить соответствием $D^\varepsilon_i : f \mapsto f \circ h_{V^\varepsilon_i}$. Ясно, что $f \circ h_{\lambda^\varepsilon_H}$ определяет некоторую грань сингулярного p-кубика. Законы коммутирования оператора граней $f \circ h_{\lambda^\varepsilon_H}$ с оператором границы D^ε_i приведены в следующем предложении, которое является модификацией предложения 1, имеем

Предложение 2. *Для заданного упорядоченного подмножества $G = \{g_1, \ldots, g_p\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ определим $\widehat{G}_\mu$ как $\{g_1, \ldots, g_{\mu-1}, g_{\mu+1}, \ldots, g_p\}$ и $\widetilde{G}_\mu$ как $\{g_1, \ldots, g_{\mu-1}, g_{\mu+1}-1, \ldots, g_p-1\}$. Если $j \notin G$ и $g_r < j < g_{r+1}$, определим G_j как $\{g_1, \ldots, g_r, g_{r+1}-1, \ldots, g_p-1\}$. Пусть $X = (X_n, \partial^{n,\varepsilon}_i)$ — полукубическое множество, а $f : h_{\mathbb{I}^n} \to X$ — сингулярный n-кубик. Тогда при $\varepsilon, \eta \in \{0,1\}$ имеют место следующие формулы:*

$$D^\varepsilon_\mu\left(f \circ h_{\lambda^\eta_G}\right) = D^\varepsilon_{g_\mu}(f) \circ h_{\lambda^\eta_{\widetilde{G}_\mu}}, \qquad D^\varepsilon_\mu\left(f \circ h_{\lambda^\varepsilon_G}\right) = f \circ h_{\lambda^\varepsilon_{\widehat{G}_\mu}}, \qquad f \circ h_{\lambda^\varepsilon_G} = D^\varepsilon_j(f) \circ h_{\lambda^\varepsilon_{G_j}}. \tag{1}$$

При этом G_j и $\widetilde{G}_\mu$ в этих формулах следует рассматривать как упорядоченные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Доказательство. Из предложения 1 получаем следующие выражения:

$$h_{\lambda^\eta_G} \circ h_{V^\varepsilon_\mu} = h_{V^\varepsilon_{g_\mu}} \circ h_{\lambda^\eta_{\widetilde{G}_\mu}}, \qquad h_{\lambda^\varepsilon_G} \circ h_{V^\varepsilon_\mu} = h_{\lambda^\varepsilon_{\widehat{G}_\mu}}, \qquad h_{\lambda^\varepsilon_G} = h_{\lambda_{G^\varepsilon_j}} \circ h_{V^\varepsilon_j}.$$

Умножая эти равенства слева на f, получаем нужное. Приведем соответствующую диаграмму, в которой учтено, что $f \circ h_{V^\varepsilon_\mu} = D^\varepsilon_\mu(f)$:

$$\begin{tikzcd}
 & X & & \\
h_{\mathbb{I}^{p-1}} \arrow[ur, bend left, "D^\varepsilon_{g_\mu}(f)\circ h_{\lambda^\eta_{\widetilde{G}_\mu}} = D^\varepsilon_\mu(f)\circ h_{\lambda^\eta_G}"] \arrow[rr, "h_{V^\varepsilon_\mu}"] \arrow[dr, "h_{\lambda^\eta_{\widetilde{G}_\mu}}"'] & & h_{\mathbb{I}^p} \arrow[ul, bend right, "f\circ h_{\lambda^\eta_G}"'] \arrow[dr, "h_{\lambda^\eta_G}"] & \\
 & h_{\mathbb{I}^{n-1}} \arrow[uu, "D^\varepsilon_{g_\mu}(f)"] \arrow[rr, "h_{V^\varepsilon_{g_\mu}}"'] & & h_{\mathbb{I}^n} \arrow[uull, bend right, "f"']
\end{tikzcd}$$

Как известно [3, гл. 5], тензорным произведением комплекса $\square_+[X]$ на самого себя является цепной комплекс $\square_+[X \otimes X]$, у которого

$$\square_+[(X \otimes X)_n] = \bigoplus_{p+q=n} \square_+[X_p] \otimes \square_+[X_q], \tag{2}$$

а граничные дифференциалы определены на образующих $x \otimes x'$ равенством

$$\partial(x \otimes x') = \partial x \otimes x' + (-1)^{\dim x} x \otimes \partial x'. \tag{3}$$

Предложение 3. *Пусть $X \in \square^{op}_+\mathrm{Ens}$ — полукубическое множество, а $\square_+[X]$ — цепной полукубический комплекс, определённый выше. Пусть далее, $\square_+[X \otimes X]$ — тензорное произведение цепного комплекса $\square_+[X]$ на самого себя, определённый по формулам (2) и (3). Отображение Δ (диагональное вложение), определённое для каждого сингулярного кубика $f : h_{\mathbb{I}^n} \to X$ по формуле*

$$\Delta(f) = \sum_G \varrho_{GK}\left(f \circ h_{\lambda^0_G}\right) \otimes \left(f \circ h_{\lambda^1_K}\right),$$

есть цепное отображение. Здесь K — множество, дополнительное к G, ϱ_{GK} — сигнатура (чётность) перестановки GK целых чисел $1, 2, \ldots, n$, и суммирование ведётся по всем упорядоченным подмножествам G множества $1, 2, \ldots, n$.

Доказательство данного предложения совпадает с доказательством предложения 9.3.5 [2, Гл. 9, § 9.3], в котором нужно воспользоваться формулами (1) предложения 2.

Рассмотрим абелевы группы ${}^n\square_+[X,\mathscr{G}] = \prod\limits_{\vartheta\in X_n} \mathscr{G}(\vartheta)$. Определим дифференциалы $\delta_i^{n,\varepsilon} : {}^n\square_+[X,\mathscr{G}] \to {}^{n+1}\square_+[X,\mathscr{G}]$ как гомоморфизмы, делающие коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\vartheta\in X_n} \mathscr{G}(\vartheta) \arrow[r, "\delta_i^{n,\varepsilon}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\vartheta\circ V_i^{n+1,\varepsilon}}"'] & \prod\limits_{\vartheta\in X_{n+1}} \mathscr{G}(\vartheta) \arrow[d, "\mathrm{pr}_\vartheta"] \\
\mathscr{G}\left(\vartheta\circ V_i^{n+1,\varepsilon}\right) \arrow[r, "\mathscr{G}\left(V_i^{n+1,\varepsilon}:\vartheta V_i^{n+1,\varepsilon}\to\vartheta\right)"'] & \mathscr{G}(\vartheta)
\end{tikzcd}$$

Определение 2. Пусть X — полукубическое множество, $\mathscr{G} : \square_+/\,X \to \mathrm{Ab}$ — когомологическая система абелевых групп. *Группами когомологий $H^n(X;\mathscr{G})$ полукубического множества X с коэффициентами в $\mathscr{G}$* называются n-е группы когомологий комплекса ${}^*\square_+[X,\mathscr{G}]$, состоящего из абелевых групп ${}^n\square_+[X,\mathscr{G}] = \prod\limits_{\sigma\in X_n} \mathscr{G}(\sigma)$ и дифференциалов $\delta^n = \sum\limits_{i=1}^{n+1}(-1)^i(\delta_i^{n,1} - \delta_i^{n,0})$.

Пусть $\mathscr{R} : \square_+/X \to \mathrm{Ring}$ — когомологическая система колец на полукубическом множестве X, принимающая постоянное значение, равное некоторому кольцу R. Рассматривая аддитивную составляющую кольца R, мы можем говорить о группах когомологий $H^*(X;R)$ полукубического множества с коэффициентами в кольце R.

Пусть ${}^*\square_+[X;R]$ — коцепной комплекс. Подобно тому, как в [2, §5.7, 5.7.27], введём в рассмотрение гомоморфизм $\pi :{}^* \square_+[X;R] \otimes_R^* \square_+[X;R] \to{}^* \square_+[X\otimes X;R]$, который определяется следующей формулой:

$$(\pi(u\otimes u'))\,(c\otimes c') = \eta\,(u(c)\otimes_R u'(c'))\,,$$

здесь $c, c' \in \square_+[X]$, $u, u' \in{}^* \square_+[X;R]$ а $\eta : R\otimes_R R \to R$ — изоморфизм колец, который задаётся формулой $\eta\,(u(c)\otimes u'(c')) = u(c)\cdot u'(c')$, где умножение понимается в смысле умножения кольца R.

Согласно [2, предложение 5.7.28], гомоморфизм π является коцепным отображением.

Тогда из предложения 3 вытекает, что $\smile = \Delta^*\pi :{}^* \square_+[X;R]\otimes_R^*\square_+[X;R] \to{}^* \square_+[X;R]$ — коцепное отображение. Значит, $\smile$ индуцирует некоторое умножение в $H^*(X;R)$. Таким образом получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Определённое выше умножение в градуированной группе $H^*(X;R)$ превращает её в кольцо.*

Опишем, как будет выглядеть это умножение на коцепях. Пусть $\varphi \in {}^p\square_+[X;R], \psi \in {}^q\square_+[X;R]$ — две коцепи со значениями в кольце R. Пусть $u \in X_{p+q}$ — куб размерности $p+q$, тогда будем иметь:

$$(\varphi \smile \psi)(u) = \sum_G \varrho_{GK}\varphi\left(u\circ h_{\lambda_G^0}\right)\cdot\psi\left(u\circ h_{\lambda_K^1}\right), \tag{4}$$

здесь $G = \{g_1,\dots,g_p\}$ пробегает множество всех подмножеств множества $\{1,2,\dots,p+q\}$, состоящее из p элементов, K есть дополнение множества G, а ϱ_{GK} — сигнатура (чётность) перестановки GK.

Для краткости в выражении умножения будем опускать знак композиции и просто писать $uh_{\lambda_G^\varepsilon}$, понимая под этим ту или иную грань кубика $u \in X_{\dim u}$.

3. СВОЙСТВА ПОЛУКУБИЧЕСКОГО КОЛЬЦА КОГОМОЛОГИЙ

Здесь мы перечислим и докажем алгебраические свойства умножения в кольце $H^*(X;R)$. Эти свойства нам необходимы для нахождения значения операции умножения и описания структуры кольца когомологий.

Теорема 2. *$\smile$-произведение коцепей в ${}^*\square_+[X;R]$ ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения. Если в R существует левый (правый, двусторонний) единичный элемент, то такой же единичный элемент существует и в кольце коцепей.*

Доказательство. Ассоциативность и дистрибутивность $\smile$-произведения сразу же следует из ассоциативности и дистрибутивности умножения в R. Пусть 1 — левая единица кольца R и ι — коцепь со значением 1 на каждом нульмерном кубике из $\square_+[X]$. Ясно, что для любой коцепи ξ имеет место равенство $\iota \smile \xi = \xi$. Аналогично теорема доказывается в случае, когда 1 — правая или двусторонняя единица.

Введение $\smile$-произведения в $^*\square_+[X;R]$ превращает этот коцепной комплекс в *градуированное кольцо*.

Теорема 3. *Если* $\varphi \in {}^p\square_+[X;R]$ *и* $\psi \in {}^q\square_+[X;R]$, *тогда* $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^p \varphi \smile \delta\psi$.

Доказательство. Имеем

$$(\delta\varphi \smile \psi)(f) = \sum_G \varrho_{GK}\ (\delta\varphi)\left(fh_{\lambda_G^0}\right) \cdot \psi\left(fh_{\lambda_K^1}\right) =$$

$$= \sum_G \varrho_{GK} \left(\sum_{\mu=1}^{p+1} (-1)^\mu \left(\left(\delta_\mu^1\varphi\right)\left(fh_{\lambda_G^0}\right) - \left(\delta_\mu^0\varphi\right)\left(fh_{\lambda_G^0}\right)\right)\right) \cdot \psi\left(fh_{\lambda_K^1}\right),$$

$$(\varphi \smile \delta\psi)(f) = \sum_G \varrho_{GK}\ (\varphi)\left(fh_{\lambda_G^0}\right) \cdot (\delta\psi)\left(fh_{\lambda_K^1}\right) =$$

$$= \sum_G \varrho_{GK}\, \varphi\left(fh_{\lambda_G^0}\right) \cdot \left(\sum_{\eta=p}^{p+q+1} (-1)^\eta \left(\left(\delta_\eta^1\psi\right)\left(fh_{\lambda_K^1}\right) - \left(\delta_\eta^0\psi\right)\left(fh_{\lambda_K^1}\right)\right)\right),$$

здесь $G \subset \{1, 2, \ldots, p+q+1\}$, $G = (h_1, \ldots, h_{p+1})$, а K — дополнение для G.

Из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
h_{\mathbb{I}^{p+q+1}} \arrow[d, "f"'] & & h_{\mathbb{I}^{p+1}} \arrow[ll, "h_{\lambda_G^\xi}"'] \arrow[dll, "fh_{\lambda_G^\xi}" description] \\
X & & h_{\mathbb{I}^p} \arrow[ll, "D_\mu^\varepsilon\left(fh_{\lambda_G^\xi}\right)"] \arrow[u, "h_{V_\mu^\varepsilon}"']
\end{tikzcd}$$

и предложения 2 следует, что последние два равенства можно записать в виде

$$(\delta\varphi \smile \psi)(f) = \sum_G \varrho_{GK} \left(\sum_{\mu=1}^{p+1} (-1)^\mu \left(\varphi\left[D_{h_\mu}^1\left(fh_{\lambda_{\widetilde{G}_\mu}^0}\right)\right]\right) - \varphi\left[fh_{\lambda_{\widehat{G}_\mu}^0}\right]\right) \cdot \psi\left[fh_{\lambda_K^1}\right],$$
$$(\varphi \smile \delta\psi)(f) = \sum_G \varrho_{GK}\, \varphi\left[fh_{\lambda_G^0}\right] \cdot \left(\sum_{\eta=p}^{p+q+1} (-1)^\eta \left(\psi\left[f\lambda_{\widehat{K}_\eta}^1\right]\right) - \psi\left[D_{k_\eta}^0\left(fh_{\lambda_{\widetilde{K}_\eta}^1}\right)\right]\right).$$

Пусть $\check{K}_\mu$ — дополнительное множество к $\widehat{G}_\mu$. Рассмотрим теперь сумму $(\delta\varphi \smile \psi)(f) + (-1)^p(\varphi \smile \delta\psi)(f)$, нетрудно видеть, что $\varphi\left[fh_{\lambda_{\widehat{G}_\mu}^0}\right] \cdot \psi\left[fh_{\lambda_K^1}\right]$ будет появляться дважды: один раз в результате вычёркивания g_μ из G в члене (G, K) и другой — из-за вычёркивания g_μ из $\check{K}_\mu$ в члене $(\widehat{G}_\mu, \check{K}_\mu)$. Первый раз $\varphi\left[fh_{\lambda_{\widehat{G}_\mu}^0}\right] \cdot \psi\left[fh_{\lambda_K^1}\right]$ появляется со знаком $\varrho_{GK}(-1)^{\mu+1}$, а второй раз — со знаком $\varrho_{\widehat{G}_\mu \check{K}_\mu}(-1)^p(-1)^\alpha$, где $k_\alpha < g_\mu < k_{\alpha+1}$. С одной стороны, сигнатуры перестановок GK и $\widehat{G}_\mu\check{K}_\mu$ связаны равенством $\varrho_{\widehat{G}_\mu \check{K}_\mu} = (-1)^{p-\mu+\alpha}\varrho_{GK}$. Тогда видно, что $\varphi\left[fh_{\lambda_{\widehat{G}_\mu}^0}\right] \cdot \psi\left[fh_{\lambda_K^1}\right]$ появляется с разными знаками, и можно записать

$$(\delta\varphi \smile \psi)(f) + (-1)^p(\varphi \smile \delta\psi)(f) = \sum_G \varrho_{GK} \left(\sum_{\mu=1}^{p+1} (-1)^\mu \varphi\left[D_{g_\mu}^1\left(fh_{\lambda_{\widetilde{G}_\mu}^0}\right)\right] \cdot \psi\left[fh_{\lambda_K^1}\right] +\right.$$
$$\left. +(-1)^p \sum_{\eta=p}^{p+q+1} (-1)^{\eta+1} \varphi\left[fh_{\lambda_G^0}\right] \cdot \psi\left[D_{k_\eta}^0\left(fh_{\lambda_{\widetilde{K}_\eta}^1}\right)\right]\right). \tag{5}$$

С другой стороны,

$$(\delta(\varphi \smile \psi))(f) = \sum_{i=1}^{p+q+1} (-1)^i \left((\varphi \smile \psi)\left(D_i^1 f\right) - (\varphi \smile \psi)\left(D_i^0 f\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+q+1} (-1)^i \sum_F \varrho_{FT} \left(\varphi\left[D_i^1(f)h_{\lambda_F^0}\right]\cdot\psi\left[D_i^1(f)h_{\lambda_T^1}\right] - \varphi\left[D_i^0(f)h_{\lambda_F^0}\right]\cdot\psi\left[D_i^0(f)h_{\lambda_T^1}\right]\right), \tag{6}$$

где F — произвольное упорядоченное подмножество множества $\{1, 2, \ldots, p+q\}$ и T — его дополнение.

Воспользовавшись формулами (1) предложения 2 и полагая, что

$$F = \begin{cases} \widetilde{G}_j, \text{ если } & j \in G, \\ G_j, \text{ если } & j \notin G, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad T = \begin{cases} K_j, \text{ если } & j \in G, \\ \widetilde{K}_j, \text{ если } & j \notin G, \end{cases}$$

мы тем самым, как нетрудно видеть, получаем взаимно однозначное соответствие между тройками (F, T, i) и (G, K, j), где $i = j$. Последнее означает, что между членами, стоящими справа в (5) и (6), можно установить взаимно однозначное соответствие, причём соответствующие члены могут отличаться только знаком, поэтому достаточно доказать, что эти знаки одинаковы. Другими словами, нужно проверить равенства

$$(-1)^\mu \varrho_{GK} = (-1)^{h_\mu} \varrho_{\widetilde{G}_\mu K_\mu}, \qquad (-1)^\eta \varrho_{GK} = (-1)^{k_\eta} \varrho_{G_\mu \widetilde{K}_\mu}.$$

Сравним перестановку

$$GK: \quad g_1, \ldots, g_{\mu-1}, g_\mu, \ldots, g_p, k_1, \ldots, k_\alpha, k_{\alpha+1}, \ldots, k_q$$

с перестановкой

$$\widetilde{G}_\mu K_{h_\mu}: \quad g_1, \ldots, g_{\mu-1}, g_{\mu+1} - 1, \ldots, g_p - 1, k_1, \ldots, k_\alpha, k_{\alpha+1} - 1, \ldots, k_q - 1, n.$$

Заметим, что $g_\mu, \ldots, g_p, k_{\alpha+1}, \ldots, k_q$ и $g_{\mu+1} - 1, \ldots, g_p - 1, k_{\alpha+1} - 1, \ldots, k_q - 1, n$ — перестановки целых чисел от g_μ до n одинаковой сигнатуры, ибо можно перейти от второй к первой в два приёма: сначала прибавить ко всем членам единицу, что даёт $g_{\mu+1}, \ldots, g_p, k_{\alpha+1}, \ldots, k_q, g_\mu$ и затем перенести g_μ в начало. Каждый из этих двух шагов умножает сигнатуру на $(-1)^{n-g_\mu}$. Значит, сигнатуры двух заданных перестановок отличаются множителем $(-1)^\alpha$. Но α — число, тех k, которые меньше g_μ, так что $\alpha = g_\mu - \mu$, и равенство доказано. Подобным же образом можно доказать второе равенство, что и завершает доказательство.

Коцепной комплекс, в котором определено умножение, относительно которого он является градуированным кольцом, называется *коцепным кольцом*, если это произведение удовлетворяет теореме 3. Из теоремы 3 немедленно получаем

Следствие. *Если φ и ψ — коциклы, то и $\varphi \smile \psi$ — коцикл. Более того, если ξ — кограница и ζ — коцикл, то $\xi \smile \zeta$ — кограница.*

Доказательство. Действительно, если φ и ψ — коциклы, то по теореме 3 имеем $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta(\varphi) \smile \psi + (-1)^{\dim\varphi}\varphi \smile (\delta\psi) = 0 + 0 = 0$. Далее, если ξ — кограница и ζ — коцикл, то $\xi \smile \zeta$ — кограница, так как если $\xi = \delta\vartheta$, то $\delta(\vartheta \smile \zeta) = (\delta\vartheta) \smile \zeta + (-1)^{\dim\vartheta}\vartheta \smile (\delta\zeta) = \xi \smile \zeta$.

Сформулируем теперь основной результат нашей работы.

Теорема 4. *Множество $Z(X; R)$ коциклов является подкольцом кольца ${}^*\Box_+[X; R]$; множество $B(X; R)$ кограниц является двусторонним идеалом в $Z(X; R)$. Кольцо когомологий $H^*(X; R)$ полукубического множества $X \in \Box_+^{op}\mathrm{Ens}$ изоморфно факторкольцу $Z(X; R)/B(X; R)$. Кольцо $H^*(X; R)$ является градуированным кольцом. Если кольцо значений R обладает левым (правым, двусторонним) единичным элементом, то такой же единичный элемент существует и в кольце $H^*(X; R)$.*

Доказательство. Из следствия теоремы 3 следует, что $Z(X; R)$ — подкольцо кольца ${}^*\Box_+[X; R]$. С одной стороны, в доказательстве следствия мы показали, что если ξ — кограница и ζ — коцикл, то $\xi \smile \zeta$ — кограница. С другой стороны, из теоремы 3 следует, что и $\zeta \smile \xi$ — кограница. Далее, согласно определению 2 имеем аддитивный изоморфизм $H^*(X;R) \cong Z(X;R)/B(X;R)$. Пусть $f, g \in H^*(X;R)$, рассмотрим их представителей $[f],[g] \in Z(X;R)$, нетрудно видеть, что из формулы умножения (4) следует, что представителем $f \smile g$ является элемент $[f \smile g]$. Справедливость последнего предложения основывается на том очевидном факте, что определённая выше коцепь ι есть коцикл. Теорема доказана.

Покажем, что имеет место следующая

Теорема 5. *Если кольцо значений R — коммутативно, то кольцо $H^*(X;R)$ — кососкоммутативно, т. е. для любых $\varphi \in {}^p\square_+[X;R]$ и $\psi \in {}^q\square_+[X;R]$*

$$\varphi \smile \psi = (-1)^{pq}\psi \smile \varphi.$$

Доказательство. Из формулы (4) следует, что нужно сравнить знаки сигнатур ϱ_{GK} и ϱ_{KG}, где $G = (g_1, \ldots, g_p)$, а $K = (k_1, \ldots, k_q)$, но нетрудно видеть, что $\varrho_{GK} = (-1)^{pq}\varrho_{KG}$, откуда и следует утверждение теоремы.

Пример 1. Вычислим кольцо когомологий двумерного тора $\mathbb{T}^2$. Представим его как полукубическое множество $\mathbb{T}^2 = \left(Q_n\mathbb{T}^2; \partial_i^{n,\varepsilon}\right)$, изображённое на рис. 1.

Имеем $Q_0\mathbb{T}^2 = \{o = A = B = C = D\}$, $Q_1\mathbb{T}^2 = \{t_1 = DA = CB,\ t_2 = AB = DC\}$, $Q_2\mathbb{T}^2 = \{\vartheta = ABCD\}$. На рис. 1 показаны, какие значения принимают граничные дифференциалы на двумерном и одномерном кубиках.

Имеем следующий полукубический коцепной комплекс:

$$0 \to \mathbb{Z}^1 \xrightarrow{\delta^0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\delta^1} \mathbb{Z}^1 \xrightarrow{\delta^2} 0.$$

Для того чтобы вычислить кольцо когомологий полукубического тора, дадим геометрическую интерпретацию коциклов и кограниц на нём. Каждому (ориентированному) k-му кубику тора $\vartheta \in Q_k\mathbb{T}^2$ поставим в соответствие k-ую коцепь, принимающую на нём 1 и 0 на остальных кубиках. Мы будем рассматривать коцепи, которые есть сумма таких коцепей.

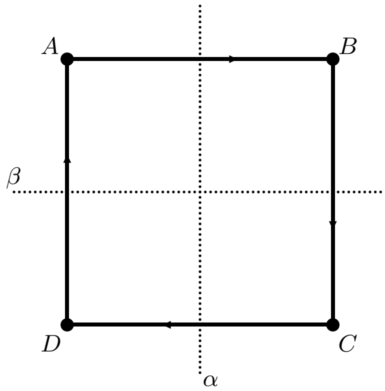

Рис. 1. Развёртка тора $\mathbb{T}^2$, в которой DA отождествляется с CB, а AB с DC

Ввиду того что кограничный дифференциал делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
f \in \prod\limits_{\vartheta \in Q_n\mathbb{T}^2} \mathbb{Z} \arrow[rr, "\delta_i^{n,\varepsilon}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\vartheta\circ V_i^{n+1,\varepsilon}}"'] \arrow[drr, bend left, "\left(\delta_i^{n,\varepsilon} f\right)(\vartheta)"] \arrow[drr, bend right, "f\left(\vartheta V_i^{n+1,\varepsilon}\right)"'] & & \prod\limits_{\vartheta \in Q_{n+1}\mathbb{T}^2} \mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{pr}_\vartheta"] \\
\mathbb{Z} \arrow[rr, "\mathbb{Z}\left(V_i^{n+1,\varepsilon}:\vartheta\circ V_i^{n+1,\varepsilon}\to\vartheta\right)"'] & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

должно иметь место равенство $\left(\delta_i^{n,\varepsilon} f\right)(\vartheta) = f\left(\vartheta V_i^{n+1,\varepsilon}\right)$, откуда видно, что одномерная коцепь f будет коциклом тогда и только тогда, когда для любого 2-кубика $\vartheta \in Q_2\mathbb{T}^2$ в f входят ровно два из четырёх кубиков границы, причём для коэффициентов $\mathbb{Z}$ они должны входить в f с различными ориентациями по отношению к ориентации границы 2-кубика (рис. 2).

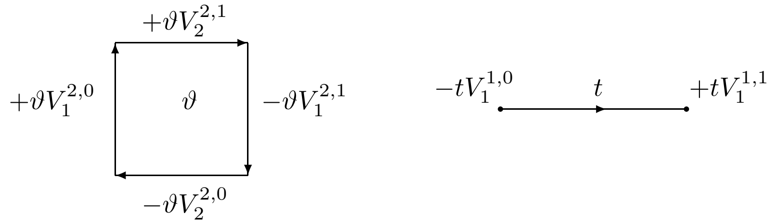

Рис. 2. Ориентация двумерного кубика и действие граничных операторов $\vartheta V_i^{n,\varepsilon} = \partial_i^{n,\varepsilon}\vartheta$

На рис. 1 схематично показаны базисные коциклы на торе; значение коцикла на тех рёбрах, которые пересекает пунктирная линия, равно единице, а на остальных — нулю. Рассмотрим теперь умножение базисных коциклов

Учитывая, что $\vartheta \circ V_i^{2,\varepsilon} = h_{\lambda^{\varepsilon}_{\{i\}}} \circ \vartheta$, мы, согласно формуле умножения получим (см. рис. 2)

$$(\alpha \smile \beta)(\vartheta) = \alpha\left(\vartheta V_1^{2,0}\right) \cdot \beta\left(\vartheta V_2^{2,1}\right) - \alpha\left(\vartheta V_2^{2,0}\right) \cdot \beta\left(\vartheta V_1^{2,1}\right) = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) = -1.$$

Таким образом, $\beta \smile \alpha$ — базисный элемент двумерных когомологий тора. Далее,

$$(\beta \smile \alpha)(\vartheta) = \beta\left(\vartheta V_1^{2,0}\right) \cdot \alpha\left(\vartheta V_2^{2,1}\right) - \beta\left(\vartheta V_2^{2,0}\right) \cdot \alpha\left(\vartheta V_1^{2,1}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

Итак, в кольце когомологий $H^*(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ есть две образующие α, β. Причём выполнены соотношения: $\alpha \smile \beta = -\beta \smile \alpha$, а это, в свою очередь, означает, что кольцо когомологий тора с коэффициентами в кольце целых чисел есть внешняя алгебра, т. е. $H^*(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[\alpha, \beta]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведём итог сказанному. Мы связали с каждым полукубическим множеством $X \in \square_+^{op}\mathrm{Ens}$ и некоторым кольцом R, некоторое градуированное кольцо когомологий $H^*(X; R)$. Если в R существует единичный элемент, то такой же элемент существует и в $H^*(X; R)$, и если R коммутативно, то $H^*(X; R)$ кососоммутативно.

Библиографический список

1. *Хусаинов, А. А.* О группах гомологий полукубических множеств / А. А. Хусаинов // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 224–237. http:// www.emis.de/ journals/SMZ/2008/01/224.html
2. *Хилтон, П.* Теория гомологий / П. Хилтон, С. Уайли. – М.: Мир, 1966. – 452 с.
3. *Маклейн, С.* Гомология / С. Маклейн. – М.: Мир, 1966. – 544 с.

УДК 517.5

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ В СЛУЧАЕ ЦЕЛЫХ α И β

А.А. Нурмагомедов

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Махачкала,
лаборатория теории функций и приближений
E-mail: alimn@mail.ru

В этой работе исследуются асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных с весом $(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\Delta t_j$ на произвольных сетках, состоящих из конечного числа N точек отрезка $[-1, 1]$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N, асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Якоби.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, вес, весовая оценка, асимптотическая формула.

Asymptotic Properties of Polynomials $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, Orthogonal on Any Sets in the Case of Integers α and β

A.A. Nurmagomedov

South Mathematical Institute of Vladikavkaz Science Center of the RAS, Mahachkala,
Laboratory of the Theory of Functions and Approximations
E-mail: alimn@mail.ru

Asymptotic properties of polynomials $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, orthogonal with weight $(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\Delta t_j$ on any finite set of N points from segment $[-1, 1]$ are investigated. Namely an asymptotic formula is proved in which asymptotic behaviour of these polynomials as n tends to infinity together with N is closely related to asymptotic behaviour of the Jacobi polynomials.

Key words: polynomial, ortogonal system, set, weight, weighted estimate, approximation formula.

ВВЕДЕНИЕ

Последовательность многочленов, ортогональных на конечном множестве точек действительной прямой R, впервые была введена и исследована в целом ряде работ П. Л. Чебышева в связи с задачами математической статистики. В работах А. А. Маркова, Шарлье, М. Ф. Кравчука, Мейкснера, Хана