Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.
2. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
3. *Young W.S.* Mean convergence of generalized Walsh – Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218, № 2. P. 311–320.
4. *Finet C., Tkebuchava G.E.* Walsh – Fourier series and their generalizations in Orlicz spaces // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 221, № 2. P. 405–418.
5. *Karamata J., Tomic M.* Sur la summation des series de Fourier des fonctions continues // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 1955. V. 8. P. 123–138.
6. *Katayama M.* Fourier series. XIII. Transformation of Fourier series // Proc. Japan Acad. 1957. V. 33, № 3. P. 229–311.
7. *Goes G.* Multiplikatoren für starke konvergenz von Fourier Reihen // Studia Math. 1958. V. 17. P. 299–311.
8. *Волосивец С.С., Агафонова Н.Ю.* О мультипликаторах равномерной сходимости рядов по мультипликативным системам // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3. С. 3–23.
9. *Агафонова Н.Ю.* О мультипликаторах рядов борелевских мер // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып.4. С. 3–10.
10. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
11. *Конюшков А.А.* Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сборник. 1958. Т. 44, № 1. С. 53–84.
12. *Лебедь Г.К.* О тригонометрических рядах с коэффициентами, удовлетворяющими некоторым условиям // Мат. сборник. 1967. Т. 74, № 1. С. 100–118.
13. *Leindler L.* On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Analysis Math. 2001. V. 27, № 4. P. 279–285.
14. *Волосивец С.С.* О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам // Analysis Math. 2007. V. 33, № 3. P. 227–246.
15. *Агафонова Н.Ю.* О наилучших приближениях функций по мультипликативным системам и свойствах их коэффициентов Фурье // Analysis Math. 2007. V. 33, № 4. P. 247–262.

УДК 517.51

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА ДУГАХ ОКРУЖНОСТИ С НУЛЯМИ НА ЭТИХ ДУГАХ

А.Л. Лукашов, С.В. Тышкевич

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: LukashovAL@info.sgu.ru, s_tyshkevich@yahoo.com

Приводится решение экстремальной задачи о рациональной функции с фиксированными знаменателем и старшим коэффициентом числителя, наименее уклоняющейся от нуля на нескольких дугах окружности, при ограничении на расположение нулей и дополнительных условиях на взаимное расположение дуг окружности и нулей знаменателя. Экстремальная функция записывается через плотность гармонической меры.

Ключевые слова: наилучшее приближение, экстремальная рациональная функция, гармоническая мера.

Extremal Rational Functions on Several Arcs of the Unit Circle with Zeros on these Arcs

A.L. Lukashov, S.V. Tyshkevich

The solution of an extremal problem about rational function with fixed denominator and leading coefficient of nominator which is deviated least from zero on several arcs of the unit circle is given under restrictions on the location of zeros and additional conditions on mutual position of the arcs and zeros of denominator. The extremal function is represented in terms of the density of harmonic measure.

Key words: best approximation, extremal rational function, harmonic measure.

Задача нахождения полиномов и рациональных функций с заданным знаменателем, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке действительной оси, была поставлена и решена П.Л. Чебышёвым в 1853 году. Именно с неё началась теория приближений как математическая дисциплина. Наименее уклоняющиеся от нуля на компактах комплексной плоскости многочлены с единичным старшим коэффициентом изучались многими математиками [1]. На дуге окружности без ограничений на расположение нулей многочлены Чебышёва изучались в работе [2]. Отметим также основополагающую статью Г. Видома [3], в которой рассматривались вопросы асимптотического поведения экстремальных многочленов для нескольких дуг или кривых в комплексной плоскости. Хотя многочлены Чебышёва получили большую известность из-за многочисленных теоретических и практических приложений, их рациональный аналог известен гораздо меньше.

Цель настоящей работы — найти рациональную функцию с фиксированными знаменателем и старшим коэффициентом числителя, наименее уклоняющуюся от нуля на нескольких дугах окружности, с нулями на этих дугах при дополнительных условиях на взаимное расположение дуг и нулей знаменателя.

На множестве $\Gamma_{\mathcal{E}} = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathcal{E}\}$, где $\mathcal{E} = [\alpha_1, \alpha_2] \cup \dots \cup [\alpha_{2l-1}, \alpha_{2l}]$, $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2l} < 2\pi$, будем рассматривать функции

$$R_N(z) = \frac{P_N(z)}{\sqrt{D(z)}}, \quad P_N(z) = \prod_{j=1}^{N}(z - z_j), \quad z_j \in \Gamma_{\mathcal{E}}, \quad j = \overline{1, N},$$

$D(z)$ – многочлен степени $2a$, $z^{-a}D(z) > 0$ при $z \in \Gamma_{\mathcal{E}}$; ветвь корня выбирается таким образом, что $\sqrt{z^{-a}D(z)} > 0$ при $z \in \Gamma_{\mathcal{E}}$. Класс таких функций обозначим $\mathcal{R}_N^D(\mathcal{E})$.

Введем еще несколько обозначений.

Пусть $\mathcal{T}_N^{(A,B,\mathcal{A})}$ — класс «рациональных тригонометрических» функций вида

$$r_N(\varphi) = \frac{A\cos\frac{N}{2}\varphi + B\sin\frac{N}{2}\varphi + a_1\cos\left(\frac{N}{2} - 1\right)\varphi + \ldots + b_{\left[\frac{N}{2}\right]}\sin\left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}},$$

где $N \in \mathbb{N}; A, B \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 \neq 0,$ — фиксированные числа; $\mathcal{A}(\varphi)$ — фиксированный действительный тригонометрический полином порядка $a \leq N$, положительный на заданной конечной системе отрезков $\mathcal{E}$; $D(e^{i\varphi}) = e^{ia\varphi}\mathcal{A}(\varphi)$; $\mathcal{T}_N^{(A,B,\mathcal{A})}(\mathcal{E})$ — класс «рациональных тригонометрических» функций того же вида с нулями в $\mathcal{E}$.

Кроме того, точками уклонения $r_N(\varphi)$ на $\mathcal{E}$ будем называть точки, в которых $|r_N(\varphi)|$ достигает своего максимума на $\mathcal{E}$. Через $T_n(x)$ будем обозначать многочлены Чебышёва $T_n(x) = \cos n \arccos x$.

Основной результат:

Теорема. *Пусть $g_{\mathcal{E}}(\xi, z)$ — функция Грина области $C \backslash \Gamma_{\mathcal{E}}$,*

$$\Gamma_{\mathcal{E}_j} = \{\xi : \ \xi = e^{i\varphi}, \ \varphi \in \mathcal{E}_j = [\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]\}.$$

Если для каждого j, $j = 1, \dots, l$, сумма гармонических мер дуги $\Gamma_{\mathcal{E}_j}$ относительно нулей многочлена $D(z) = e^{ia\varphi}\mathcal{A}(\varphi) = \prod_{j=1}^{m^*}(z - z_j)^{m_j}$ является натуральным числом, точнее,

$$(N - a)\omega_j(\infty) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m^*} m_k\omega_j(z_k) = q_{j-1}^{(N)}, \quad q_{j-1}^{(N)} \in \mathbb{N}, \quad j = 2, \dots, l,$$

$\overline{\omega}(z, x) = \frac{\partial}{\partial x}\omega\left(z, \ \Gamma_{\mathcal{E}} \cap \{e^{i\varphi} : \ b \leq \varphi \leq x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}\right)$ *— плотность гармонической меры, то минимум в экстремальной задаче*

$$\max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |R_N(z)| = \min_{R_N \in \mathcal{R}_N^D(\mathcal{E})} \max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |R_N(z)|$$

доставляют функции

$$R_N^*(e^{i\varphi}) = A_N^*\varepsilon e^{i\frac{N-a}{2}\varphi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\int\limits_{\mathcal{E}\cap[b,\varphi]}\left((N - a)(\overline{\omega}(\infty, \xi) + \overline{\omega}(0, \xi)) + \sum_{j=1}^{m^*} m_j\overline{\omega}(z_j, \xi)\right)d\xi\right), |\varepsilon| = 1,$$

A_N^* *— подходящая положительная константа.*

Перед доказательством теоремы приведем несколько лемм.

Лемма 1. *Если*

$$r_N(\varphi) = \frac{A\cos\frac{N}{2}\varphi + B\sin\frac{N}{2}\varphi + a_1\cos\left(\frac{N}{2} - 1\right)\varphi + \ldots + b_{\left[\frac{N}{2}\right]}\sin\left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}},$$

$A^2+B^2=1$, наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ в классе $\mathcal{T}_N^{(A,B,\mathcal{A})}$, то существует такое $\psi\in\mathbb{R}$, что

$$\hat r_N(\varphi)=r_N(\varphi+\psi)=\frac{\cos\frac{N}{2}\varphi+\hat a_1\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi+\ldots+\hat b_{[\frac{N}{2}]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\hat{\mathcal{A}}(\varphi)}},$$

$\hat{\mathcal{A}}(\varphi)=\mathcal{A}(\varphi+\psi)$, наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}+\psi=\bigcup\limits_{j=1}^{l}[\alpha_{2j-1}+\psi,\alpha_{2j}+\psi]$ в классе $\mathcal{T}_N^{(1,0,\mathcal{A})}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любого $\psi\in\mathbb{R}$ дробь $r_N(\varphi+\psi)$ можно записать в виде

$$r_N(\varphi+\psi)=\frac{\tau_N(\varphi+\psi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi+\psi)}},$$

$$\tau_N(\varphi+\psi)=\left(A\cos\frac{N}{2}\psi+B\sin\frac{N}{2}\psi\right)\cos\frac{N}{2}\varphi+\left(B\cos\frac{N}{2}\psi-A\sin\frac{N}{2}\psi\right)\sin\frac{N}{2}\varphi+$$
$$+\hat a_1\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi+\hat b_1\sin\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi+\ldots+\hat a_{[\frac{N}{2}]}\cos\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi+\hat b_{[\frac{N}{2}]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi,$$

где

$$\hat a_k=a_k\cos\left(\frac{N}{2}-k\right)\psi+b_k\sin\left(\frac{N}{2}-k\right)\psi,$$
$$\hat b_k=b_k\cos\left(\frac{N}{2}-k\right)\psi-a_k\sin\left(\frac{N}{2}-k\right)\psi,\qquad k=\overline{1,\left[\frac{N}{2}\right]}.$$

Очевидно, что $\hat r_N(\varphi):=r_N(\varphi+\psi)$ наименее уклоняется от 0 на $\mathcal{E}+\psi=\bigcup\limits_{j=1}^{l}[\alpha_{2j-1}+\psi,\alpha_{2j}+\psi]$ в классе $\mathcal{T}_N^{(A_1,B_1,\mathcal{A})}$, где $A_1=A\cos\frac{N}{2}\psi+B\sin\frac{N}{2}\psi$, $B_1=B\cos\frac{N}{2}\psi-A\sin\frac{N}{2}\psi$.

Подберем ψ таким, чтобы

$$A\cos\frac{N}{2}\psi+B\sin\frac{N}{2}\psi=1,\qquad B\cos\frac{N}{2}\psi-A\sin\frac{N}{2}\psi=0.$$

Последние равенства равносильны

$$\cos\frac{N}{2}\psi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\qquad \sin\frac{N}{2}\psi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

При указанном ψ дробь

$$\hat r_N(\varphi)=\frac{\cos\frac{N}{2}\varphi+\hat a_1\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi+\hat b_1\sin\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi+\ldots}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi+\psi)}}$$

наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}+\psi$ в классе $\mathcal{T}_N^{(1,0,\mathcal{A})}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если функция*

$$r_N^*(\varphi)=\frac{\cos\frac{N}{2}\varphi+a_1^*\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi+\ldots+b^*_{[\frac{N}{2}]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}\in\mathcal{T}_N^{(1,0,\mathcal{A})}$$

имеет на $\mathcal{E}$ максимальное число точек уклонения, то она наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ в классе $\mathcal{T}_N^{\mathcal{A}}=\bigcup\limits_{A,B:\,A^2+B^2=1}\mathcal{T}_N^{(A,B,\mathcal{A})}$.

Доказательство (от противного). Пусть функция

$$r_N^*(\varphi)=\frac{\cos\frac{N}{2}\varphi+a_1^*\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi+\ldots+b^*_{[\frac{N}{2}]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}$$

имеет на $\mathcal{E}$ максимальное количество точек уклонения. Предположим, что для некоторого ψ имеет место

$$\|r_N^*\| > \|r_{N,\psi}^*\|,$$

где

$$r_{N,\psi}^*(\varphi) = \frac{\cos\psi\cos\frac{N}{2}\varphi + \sin\psi\sin\frac{N}{2}\varphi + a_{1,\psi}^*\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi + \ldots + b_{\left[\frac{N}{2}\right],\psi}^*\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}$$

— дробь, наименее уклоняющаяся от 0 на $\mathcal{E}$ в классе $\mathcal{T}_N^{(\cos\psi,\sin\psi,\mathcal{A})}$. Так как $\|r_{N,\psi}^*\|$ непрерывно зависит от ψ, можно считать, что $\frac{\psi}{2\pi}\in\mathbb{Q}$, т.е. $\psi=\frac{2\pi p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$.

Поскольку

$$\left(\cos\psi\cos\frac{N}{2}\varphi+\sin\psi\sin\frac{N}{2}\varphi\right)^q = \left(\cos\left(\frac{N}{2}\varphi-\psi\right)\right)^q = \frac{1}{2^{q-1}}\cos\left(\frac{N}{2}\varphi-\psi\right)q+\ldots,$$

то у дробей $T_q\left(\frac{r_N^*(\varphi)}{\|r_N^*\|}\right)$ и $T_q\left(\frac{r_{N,\psi}^*(\varphi)}{\|r_{N,\psi}^*\|}\right)$ со знаменателем $\sqrt{\mathcal{A}^q(\varphi)}$ пары старших коэффициентов числителей равны соответственно $\left(\frac{1}{\|r_N^*\|^q},0\right)$ и $\left(\frac{1}{\|r_{N,\psi}^*\|^q},0\right)$, а нормы совпадают. Следовательно, дроби

$$\|r_N^*\|^q T_q\left(\frac{r_N^*(\varphi)}{\|r_N^*\|}\right) = r_{Nq}^*(\varphi) \qquad \text{и} \qquad \|r_{N,\psi}^*\|^q T_q\left(\frac{r_{N,\psi}^*(\varphi)}{\|r_{N,\psi}^*\|}\right) = r_{Nq,\psi}^*(\varphi)$$

имеют в числителе одинаковые пары старших коэффициентов $(1,0)$, при этом нормы удовлетворяют неравенству

$$\|r_{Nq}^*\| > \|r_{Nq,\psi}^*\|.$$

С другой стороны, $\frac{r_N^*(\varphi)}{\|r_N^*\|}$ на $\mathcal{E}$ пробегает отрезок $[-1,1]$ N раз, поэтому $r_{Nq}^*(\varphi)=\|r_N^*\|T_q\left(\frac{r_N^*(\varphi)}{\|r_N^*\|}\right)$ пробегает на $\mathcal{E}$ отрезок $[-\|r_{Nq}^*\|,\|r_{Nq}^*\|]$ Nq раз, а значит, наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ в классе $\mathcal{T}_{Nq}^{(1,0,\mathcal{A}^q)}$, что противоречит последнему неравенству. Лемма доказана.

Лемма 3 [4]. *Пусть $\mathcal{A}(\varphi)$ — тригонометрический полином порядка a, положительный на системе отрезков $\mathcal{E}$. Тогда существуют такие $A,B\in\mathbb{R}$, $A^2+B^2\neq 0$, что тригонометрическая рациональная функция*

$$r(\varphi) = \frac{A\cos\frac{N}{2}\varphi + B\sin\frac{N}{2}\varphi + a_1\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi + \ldots + b_{\left[\frac{N}{2}\right]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}},$$

наименее уклоняющаяся от 0 на $\mathcal{E}$ среди всех функций этого вида, имеет на $\mathcal{E}$ максимальное число точек уклонения, т.е.

$$\max_{\varphi\in\mathcal{E}}\left|\frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}\right| = \min_{a_i,b_i\in\mathbb{R}}\max_{\varphi\in\mathcal{E}}|r(\varphi)|, \tag{1}$$

$$\frac{\tau_N(\varphi_{2j})}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi_{2j})}} = \frac{\tau_N(\varphi_{2j+1})}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi_{2j+1})}}, \qquad j=\overline{1,l},$$

в том и только том случае, когда для каждого j, $j=1,\ldots,l$, сумма гармонических мер дуги $\Gamma_{\mathcal{E}_j}$ относительно нулей многочлена $A(z)=e^{ia\varphi}\mathcal{A}(\varphi)=\prod_{j=1}^{m^*}(z-z_j)^{m_j}$ является натуральным числом, точнее,

$$(N-a)\omega_j(\infty)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m^*}m_k\omega_j(z_k)=q_{j-1}^{(N)}, \qquad q_{j-1}^{(N)}\in\mathbb{N}, \quad j=2,\ldots,l.$$

Через плотности гармонической меры $\overline{\omega}(z,x) = \frac{\partial}{\partial x}\omega\left(z,\ \Gamma_{\mathcal{E}}\cap\{e^{i\varphi}:\ b\le\varphi\le x\},\mathbb{C}\setminus\Gamma_{\mathcal{E}}\right)$ дробь $\frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}$ может быть записана следующим образом:

$$\frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} = A_N\varepsilon\cos\left(\frac{\pi}{2}\int\limits_{\mathcal{E}\cap[b,\varphi]}\left((N-a)(\overline{\omega}(\infty,\xi)+\overline{\omega}(0,\xi))+\sum_{j=1}^{m^*}m_j\overline{\omega}(z_j,\xi)\right)d\xi\right),$$

где $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, A_N — *подходящая положительная константа.*

Доказательство теоремы. Так как сумма гармонических мер дуг $\Gamma_{\mathcal{E}_j}$, $j = \overline{1,l}$, является натуральным числом, то по лемме 3 существуют такие $A, B \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, что рациональная тригонометрическая функция

$$r_N^*(\varphi) = \frac{A\cos\frac{N}{2}\varphi + B\sin\frac{N}{2}\varphi + a_1\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi + \ldots + b_{\left[\frac{N}{2}\right]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}$$

наименее уклоняется от 0 на $\mathcal{E}$, имеет на $\mathcal{E}$ максимальное число точек уклонения, причем её нули $\varphi_j \in \mathcal{E}$ (так как расположены между точками уклонения, лежащими на $\mathcal{E}$). То есть дробь $r_N^*(\varphi)$ является решением задачи (1) и в классе функций $\mathcal{T}_N^{(A,B,\mathcal{A})}(\mathcal{E})$. Можно также считать, что $A^2+B^2=1$, умножая при необходимости на подходящую константу полином $\mathcal{A}(\varphi)$.

Значит, по лемме 1 существует ψ такое, что дробь $\hat{r}_N^*(\varphi) = r_N^*(\varphi+\psi)$ наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}+\psi$ в классе функций $\mathcal{T}_N^{(1,0,\mathcal{A})}$, а следовательно, по лемме 2 наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}+\psi$ в классе функций $\mathcal{T}_N^{\mathcal{A}} = \bigcup\limits_{A,B\in\mathbb{R}:\ A^2+B^2=1} \mathcal{T}_N^{(A,B,\mathcal{A})}$. Следовательно, $r_N^*(\varphi)$ наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ и в классе $\mathcal{T}_N^{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$.

Рассмотрим теперь произвольную дробь класса

$$\mathcal{T}_N^{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) = \Big\{ r_N(\varphi):\ r_N(\varphi) = \frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}},\ \tau_N(\varphi) = A\cos\frac{N}{2}\varphi + B\sin\frac{N}{2}\varphi + a_1\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi + \ldots +$$
$$+ b_{\left[\frac{N}{2}\right]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi,\ r_N(\varphi_j)=0,\ \varphi_j\in\mathcal{E},\ j=\overline{1,n}\Big\}.$$

Через свои нули φ_j, $j = \overline{1,N}$, числитель этой дроби может быть записан следующим образом:

$$\tau_N(\varphi) = c_\tau \prod_{j=1}^{N} \sin\frac{\varphi-\varphi_j}{2} = c_\tau \frac{1}{(2i)^N} e^{-\frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j} z^{-\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N}(z-z_j),$$

$z = e^{i\varphi}$,$z_j = e^{i\varphi_j}$,$j = 1,\ldots,N$, $|c_\tau| = 1$. Тогда найдется c_1, $|c_1| = 1$, такая, что $\pi_N(z) = c_1\prod\limits_{j=1}^{N}(z-z_j)$ — самовзаимный многочлен, причем $z_j \in \Gamma_{\mathcal{E}}$, $j = \overline{1,N}$. В явном виде константа c_1 может быть найдена по формуле

$$c_1 = \frac{(2i)^N}{c_\tau} e^{\frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j}.$$

Первому (старшему) и последнему коэффициентам многочлена $\pi_N(z)$ соответствует пара старших коэффициентов тригонометрического полинома $\tau_N(\varphi)$. Опишем подробнее это соответствие:

$$\frac{1}{(2i)^N} e^{-\frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j} e^{i\frac{N}{2}\varphi} + \frac{(-1)^N e^{\frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j}}{(2i)^N} e^{-i\frac{N}{2}\varphi} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(2i)^N}\left(e^{-\frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j} + (-1)^N e^{\frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j}\right)\cos\frac{N}{2}\varphi + \frac{i}{(2i)^N}\left(e^{-\frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j} - (-1)^N e^{\frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j}\right)\sin\frac{N}{2}\varphi + \ldots =$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{2m}\varphi_j}{(-1)^m 2^{2m-1}}\cos m\varphi + \dfrac{\sin\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{2m}\varphi_j}{(-1)^m 2^{2m-1}}\sin m\varphi + \ldots, \quad N = 2m, \\ \dfrac{-\sin\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{2m-1}\varphi_j}{(-1)^{m-1} 2^{2m-2}}\cos\frac{2m-1}{2}\varphi + \dfrac{\cos\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{2m-1}\varphi_j}{(-1)^{m-1} 2^{2m-2}}\sin\frac{2m-1}{2}\varphi + \ldots, \quad N = 2m-1, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}
$$

Обратно, каждому многочлену с нулем в $\Gamma_{\mathcal{E}}$ вида

$$
P_N(z) = \prod_{j=1}^{N}(z - z_j), \quad z_j \in \Gamma_{\mathcal{E}}, \quad j = \overline{1, N},
$$

ставится в соответствие самовзаимный многочлен $\pi_N(z) = c_{P_N}P_N(z)$, $|c_{P_N}| = 1$, которому, в свою очередь, по вышеописанной процедуре соответствует тригонометрический полином $\tau_N(\varphi)$ с парой старших коэффициентов A, B, $A^2 + B^2 = 1$, определяемой нулями z_j.

Каждому самовзаимному многочлену $D(z)$ степени $2a$ соответствует тригонометрический полином $\mathcal{A}(\varphi)$ (полуцелого) порядка a, необращающийся в нуль на $\mathcal{E}$ и имеющий действительные коэффициенты.

Поскольку $r_N^*(\varphi)$ наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ в $\mathcal{T}_N^{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$, то она соответствует дроби $R_N^*(z)$, наименее уклоняющейся от 0 на $\Gamma_{\mathcal{E}}$ в $\mathcal{R}_N^D(\mathcal{E})$, причем, учитывая (2),

$$
\min_{R_N \in \mathcal{R}_N^D(\mathcal{E})} \max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |R_N(z)| = 2^{N-1} \min_{r_N \in \mathcal{T}_N^{\mathcal{A}}(\mathcal{E})} \max_{\varphi \in \mathcal{E}} |r_N(\varphi)|.
$$

Воспользовавшись представлением рациональной тригонометрической функции из леммы 3, получаем

$$
R_N^*(e^{i\varphi}) = A_N^* \varepsilon e^{i\frac{N-a}{2}\varphi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\int\limits_{\mathcal{E}\cap[b,\varphi]}\left((N-a)(\overline{\omega}(\infty,\xi) + \overline{\omega}(0,\xi)) + \sum_{j=1}^{m^*} m_j \overline{\omega}(z_j,\xi)\right)d\xi\right), |\varepsilon| = 1,
$$

A_N^* — подходящая положительная константа.

Теорема доказана.

Замечание 1. Краткая схема доказательства теоремы для $D(z) \equiv 1$ была опубликована в [5], полная версия сдана в печать.

Замечание 2. В работе [5], так же как и в формулировке теоремы 2 работы [4] (здесь это лемма 3), присутствовало ограничение $l \geq 2$. Фактически, оба утверждения справедливы и при $l = 1$, но этот случай не был сформулирован явно, так как тогда нет надобности использовать аппарат автоморфных функций, а условия на гармонические меры выполняются автоматически (ср. также обсуждение случая $l = 1$ в [4, §5]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-00167) *и гранта Президента по поддержке ведущих научных школ* (*проект* НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Смирнов В.И., Лебедев Н.А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Наука, 1964.

2. *Thiran J.-P., Detaille C.* Polynomials on Circular Arcs in the Complex Plane // Progress in Approximation Theory. Boston; QA: Academic Press. 1991. P. 771–786.

3. *Widom H.* Extremal polinomials associated with a system of curves in the complex plane // Adv. Math. 1969. V. 3. P. 127–232.

4. *Лукашов А.Л.* Неравенства для производных рациональных функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, № 3. С. 115–138.

5. *Тышкевич С.В.* О чебышёвских полиномах на дугах окружности // Мат. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 952–954.