УДК 517.51

О РЯДАХ ХААРА НА КОМПАКТНОЙ НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЕ

С.Ф. Лукомский

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: LukomskiiSF@info.sgu.ru

На компактной нуль-мерной группе $(G, \dot{+})$ строится система Хаара как система степеней и сдвигов некоторой системы характеров. Указываются условия, при которых ряд Фурье – Хаара непрерывной на G функции сходится равномерно. Указываются группы, для которых система Хаара получается из одной функции с использованием сжатий, сдвигов и возведения в степень.

Ключевые слова: компактные нуль-мерные группы, сжатия и сдвиги, функции Хаара, p-адические числа.

Haar Series on Compact Zero-Dimensional Abelian Group

S.F. Lukomskii

In this article we construct a Haar system on compact zero-dimensional abelian group as shifts and powers of some characters system. We find conditions under which a Fourier-Haar series of continuous function converge uniformly. We find groups for which Haar functions generated from one function by the operation of shifts, powers and dilations.

Key words: compact zero-dimensional abelian group, Haar system, shifts, dilations, p-adic numbers.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая система Хаара есть система сжатий и сдвигов одной функции $r_0(t)$, которая есть нулевая функция Радемахера на полуинтервале $[0, 1)$ [1, с. 69]. В связи с потребностями математической физики в последнее время изучаются системы Хаара на полях p-адических чисел. Впервые система Хаара на поле p-адических чисел была указана в 2002 г. в работе С. Козырева [2]. Такая система порождается не одной, а $(p-1)$ функциями $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{p-1}$. В [3] подробно рассмотрены 2-адические базисы Хаара. В работе [4] p-адическая система Хаара получена как всплесковый базис, возникающий в p-адическом КМА. В работах [5–6] рассматривались всплесковые базисы на группах Виленкина. В [7] рассмотрены вопросы построения сплесковых базисов Хаара на произвольной локально-компактной группе, содержащей открытую подгруппу. Мы приведем принцип построения базиса Хаара на произвольной нуль-мерной группе (сюда как частные случаи входят группы p-адических чисел и группы Виленкина), но ограничимся случаем компактной группы. Каждой такой группе соответствует некоторая последовательность $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ простых чисел. В перечисленных выше работах [2–6] рассматривался случай $p_n = p$. Мы покажем, что в этом частном случае система Хаара может быть определена (в отличие от [2–6]) одной функцией $r_0(x)$, из которой остальные функции Хаара получаются с помощью сжатий, сдвигов и возведения в степень. Кроме этого мы укажем условия, при которых ряд Фурье – Хаара непрерывной функции сходится равномерно.

1. ХАРАКТЕРЫ НА КОМПАКТНОЙ НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЕ

Пусть $(G, \dot{+})$ — коммутативная компактная группа, топология в которой задана системой вложенных подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \dots \tag{1.1}$$

таких, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$. Это означает, что базу топологии в G образуют смежные классы $(G_n \dot{+} g)$ $(n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},\ g \in G)$, из которых любые два либо не пересекаются, либо один включается в другой. Такую группу называют нуль-мерной [8]. Из компактности G следует, что все фактор-группы G_n/G_{n+1} конечны. Обозначим через p_n порядок такой фактор-группы. Можно считать, что все p_n — простые числа, так как в противном случае, используя теорему Силова [9, с. 99], можно уплотнить цепочку подгрупп так, что порядки фактор-групп G_n/G_{n+1} станут простыми числами. Обозначим $m_0 = 1, m_{n+1} = m_n \cdot p_n$. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ группа G есть дизъюнктное объединение m_n смежных классов $G_n \dot{+} q_j$ $(j = \overline{0, m_n - 1})$. Все смежные классы в объединении с пустым множеством образуют полукольцо $\mathcal{K}$. На $\mathcal{K}$ можно ввести меру μ равенством $\mu(G_n \dot{+} q_j) = \mu G_n = \frac{1}{m_n}$. После этого меру μ можно продолжить на σ-алгебру μ^* измеримых множеств, например, по схеме Каратеодори. Получим меру, инвариантную относительно сдвига. Ее обычно называют мерой Хаара.

На G можно определить интеграл по схеме Лебега, который инвариантен относительно сдвига и является абсолютно сходящимся. Характеры группы G будем обозначать через χ, а группу всех характеров — через X. Совокупность характеров χ, таких что $\forall\, x \in G_n,\ \chi(x) = 1$, называют аннулятором группы G_n и обозначают $G_n^\perp$. Аннуляторы образуют возрастающую цепочку подгрупп группы X:

$$\{1\} = G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset G_2^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp \subset \dots, \tag{1.2}$$

$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} G_n^\perp = X$. Фактор-группы $G_{n+1}^\perp / G_n^\perp$ конечны и имеют порядок p_n. При каждом $n \in \mathbb{N}_0$ выберем элемент $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем. Каждый элемент $x \in G_0$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

где сходимость понимается в смысле топологии, порожденной цепочкой подгрупп (1.1). При каждом $n \in \mathbb{N}_0$ выберем характер $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$. Тогда характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде

$$\chi = \prod_{n=0}^{\infty} (r_n)^{a_n} \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}), \tag{1.3}$$

причем в произведении (1.3) лишь конечное число чисел a_n отлично от нуля, т.е.

$$\chi = \prod_{k=0}^{M} (r_k)^{a_n}, \tag{1.4}$$

где число M определяется характером χ. В группе характеров можно ввести нумерацию следующим образом. Если χ представлен в виде (1.4), то поставим ему в соответствие число

$$n = \sum_{k=0}^{M} a_k m_k,$$

и соответствующий характер будем обозначать через χ_n. Известно [8], что характеры $(\chi_n)_{n=0}^{\infty}$ образуют ортонормированную систему, замкнутую в $L_2(G)$. Через $\mathcal{L}_n$ обозначим множество комплекснозначных ступенчатых функций, постоянных на смежных классах $G_n \dot{+} g$. При введенной нумерации каждая функция $f \in \mathcal{L}_n$ однозначно представима в виде $\sum\limits_{j=0}^{m_n-1} c_j \chi_j \quad (c_j \in \mathbb{C})$. Через

$$D_m = \sum_{j=0}^{m-1} \chi_j$$

обозначим ядро Дирихле. Если $m = m_n$, то

$$D_{m_n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left((r_k(x))^0 + (r_k(x))^1 + \dots + (r_k(x))^{p_n - 1} \right) = \begin{cases} m_n, & x \in G_n \\ 0, & x \notin G_n, \end{cases}$$

и для частичной суммы $S_{m_n}(f, x)$ ряда Фурье функции f по системе характеров $(\chi_k)_{k=0}^{\infty}$ справедливо представление

$$S_{m_n}(f, x) = m_n \int\limits_{G_n \dot{+} x} f(t) d\mu(t).$$

Следующее утверждение очевидно [8].

Теорема 1.1. *Если f непрерывна на G, то $S_{m_n}(f, x)$ сходятся равномерно к f на G.*

2. СИСТЕМА ХААРА НА КОМПАКТНОЙ НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЕ

Определение 2.1. Определим функции H_{jm_n+k} ($j=\overline{1,p_n-1};\ k=\overline{0,m_n-1}$) равенством

$$H_0(x)\equiv 1,\quad H_{jm_n+k}(x)=r_n^j(x\dot{-}q)\mathbf{1}_{G_n\dot{+}q}(x),$$

где $q\in G$ и $k\in\mathbb{N}_0$ связаны соотношениями

$$q=a_0g_0\dot{+}a_1g_1\dot{+}\dots\dot{+}a_{n-1}g_{n-1}\Leftrightarrow k=a_0m_0+a_1n_m+\dots+a_{n-1}m_{n-1}$$

($a_\nu=\overline{0,p_\nu-1}$). Функции H_{jm_n+k} назовем *функциями Хаара.*

Теорема 2.1. *Функции H_0,H_{jm_n+k} ($n\in\mathbb{N}_0,\ j=\overline{1,p_n-1},\ k\in\overline{0,m_n-1}$) образуют ортогональную на G систему комплекснозначных функций.*

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1) H_0 ортогональна всем H_{jm_n+k}. В самом деле,

$$\int\limits_G 1\cdot\bar{H}_{jm_n+k}(x)d\,\mu(x)=\int\limits_{G_n\dot{+}q}\bar{r}_n^j(x\dot{-}q)d\,\mu(x)=\int\limits_G\bar{r}_n^j(x)d\,\mu(x)=\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n}\bar{r}_n^j(x)d\,\mu(x)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\bar{r}_n^j(G_{n+1}\dot{+}\nu g_n)\mu G_{n+1}=\mu G_{n+1}\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\bar{r}_n^j(\nu g_n)=\mu G_{n+1}\sum_{\nu=0}^{p_n-1}(\bar{r}_n^j(g_n))^\nu=0.$$

2) Функции H_{jm_n+k} и H_{jm_n+l} ортогональны, так как при $k\neq l$ их носители не пересекаются.

3) Проверим ортогональность $H_{j_1m_n+k}$ и $H_{j_2m_n+k}$ при $j_1\neq j_2$. Пусть $j_1>j_2$, т.е. $j_1=j_2+\alpha$ ($1\le\alpha<p_n-1$). Тогда

$$\int\limits_G H_{j_1m_n+k}(x)\bar{H}_{j_2m_n+k}(x)d\,\mu(x)=\int\limits_{G_n}r_n^{j_1}(x)\bar{r}_n^{j_2}(x)d\,\mu(x)=\int\limits_{G_n}r_n^{\alpha}(x)d\,\mu(x)=0.$$

4) Проверим ортогональность $H_{j_1m_N+k_1}$ и $H_{j_2m_n+k_2}$ при $N\neq n$. Пусть $N>n$. Тогда смежные классы $G_N\dot{+}q_1$ и $G_n\dot{+}q_2$ либо не пересекаются, либо $G_N\dot{+}q_1\subset G_n\dot{+}q_2$. В последнем случае

$$\int\limits_G H_{j_1m_N+k_1}(x)\bar{H}_{j_2m_n+k_2}(x)d\,\mu(x)=\int\limits_{G_N\dot{+}q_1}r_N^{j_1}(x\dot{-}q_1)\bar{r}_n^{j_2}(x\dot{-}q_2)d\,\mu(x)=$$

$$=\bar{r}_n^{j_2}(G_N\dot{+}q_1\dot{-}q_2)\int\limits_{G_N\dot{+}q_1}r_N^{j_1}(x\dot{-}q_1)d\,\mu(x)=\bar{r}_n^{j_2}(G_N\dot{+}q_1\dot{-}q_2)\int\limits_{G_N}r_N^{j_1}(x)d\,\mu(x)=0,$$

и ортогональность доказана. $\square$

Положим по определению $\tilde{H}_{jm_n+k}=\sqrt{m_n}H_{jm_n+k}$, тогда $\tilde{H}_{jm_n+k}$ будет ортонормированной системой (ОНС) на G. Через $\tilde{\sigma}_N(f,x)$ обозначим частичные суммы ряда Фурье – Хаара по системе $\tilde{H}_{jm_n+k}(x)$. Отметим, что если j, n и k меняются так, что $0\le n\le N$, $j=\overline{1,p_n-1}$, $k=\overline{1,m_n-1}$, то числа m_n+k принимают все натуральные значения между 1 и $m_{N+1}-1$. Так как $\dim\mathcal{L}_{N+1}=m_{N+1}$, то отсюда следует, что любая функция $f\in\mathcal{L}_{N+1}$ представима в виде $f=\sum\limits_{\nu=0}^{m_{N+1}-1}\lambda_\nu H_\nu$ ($\lambda_\nu\in\mathbb{C}$). В частности, при $k=\overline{0,m_N-1}$ характер χ_k представим в виде $\chi_k=\sum\limits_{j=0}^{m_N-1}c_{kj}\tilde{H}_j$, и в силу ортонормированности систем (χ_k) и $(\tilde{H}_j)$ матрица c_{kj} ортогональна.

Лемма 2.2. *Имеет место равенство $S_{m_n}(f,x)=\tilde{\sigma}_{m_n}(f,x)$.*

Доказательство. Через (f,g) обозначим скалярное произведение функций f и g. Тогда

$$S_{m_n}(f,x)=\sum_{k=0}^{m_n-1}(g,\chi_k)\chi_k=\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(f,\ \sum_{l=0}^{m_n-1}c_{kl}\tilde{H}_l\right)\cdot\sum_{j=0}^{m_n-1}c_{kj}\tilde{H}_j=$$

$$=\sum_{j=0}^{m_n-1}\tilde{H}_j\sum_{l=0}^{m_n-1}(f,\tilde{H}_l)\sum_{k=0}^{m_n-1}\overline{c}_{kl}c_{kj}=\sum_{j=0}^{m_n-1}\tilde{H}_j(f,\tilde{H}_j)=\tilde{\sigma}_{m_n}(f,x).\qquad\square$$

Определение 2.2. Если f ограничена на G, то функцию $\omega_n(f)=\sup\limits_{x\dot{-}y\in G_n}|f(x)-f(y)|$ называют *модулем непрерывности* функции f [8].

Лемма 2.3. *Если f ограничена на G, то $|(\tilde{H}_{jm_n+k},f)|\le \dfrac{1}{\sqrt{m_n}}\omega_n(f)$.*

Доказательство. По определению функций Хаара

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}(\tilde{H}_{jm_n+k},f)=\int\limits_G f(x)\bar{H}_{jm_n+k}(x)d\,\mu(x)=\int\limits_{G_n\dot{+}q} f(x)\bar{r}_n^j(x\dot{-}q)d\,\mu(x).$$

Выполняя замену $x\dot{-}q=y$ и учитывая инвариантность интеграла, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}(f,\tilde{H}_{jm_n+k})=\int\limits_{G_k} f(y\dot{+}q)\bar{r}_n^j(y)d\,\mu(y)=\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} f(y\dot{+}q)\bar{r}_n^j(y)d\,\mu(y)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\bar{r}_n(y_n)^{\nu j}\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} f(y\dot{+}q)d\,\mu(y)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\bar{r}_n(y_n)^{\nu j}\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n}(f(y\dot{+}q)-f(y_n))d\,\mu(y)+\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\bar{r}_n(y_n)^{\nu j}f(y_n)\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n}d\,\mu(y). \tag{2.1}$$

Так как p_n простые и

$$\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n}d\,\mu(y)=\mu(G_{n+1}\dot{+}\nu g_n)=\frac{1}{m_{n+1}},$$

то

$$\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\bar{r}_n(y_n)^{\nu j}f(y_n)\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n}d\,\mu(y)=\frac{f(y_n)}{m_{n+1}}\overline{\sum_{\nu=0}^{p_n-1}(r_n(y_n)^j)^\nu}=0.$$

Поэтому из (2.1) находим

$$\left|\frac{1}{\sqrt{m_n}}(f,\tilde{H}_{jm_n+k})\right|\le\frac{\omega_n(f)}{m_{n+1}}\cdot p_n=\frac{\omega_n(f)}{m_n}.\qquad\square$$

Теорема 2.4. *Если f непрерывна на G и $\omega_n(f)=o\left(\frac{1}{p_n}\right)$, то ряд Фурье – Хаара сходится равномерно на G.*

Доказательство. Используем лемму 2.2. Запишем частичные суммы $\tilde{\sigma}_l(f,x)$ при $m_n\le l<m_{n+1}$ в виде

$$\tilde{\sigma}_l(f,x)=\tilde{\sigma}_{jm_n+k}(f,x)=\tilde{\sigma}_{m_n}(f,x)+\sum_{\nu=m_n}^{l-1}(f,\tilde{H}_\nu)\tilde{H}_\nu(x)=S_{m_n}(f,x)+\sum_{\nu=m_n}^{l-1}(f,\tilde{H}_\nu)\tilde{H}_\nu(x), \tag{2.2}$$

где $S_{m_n}(f,x)$ — частичные суммы ряда Фурье по системе характеров. По теореме 1.1 $S_{m_n}(f,x)$ сходятся к f равномерно. Покажем, что второе слагаемое в правой части (2.2) стремится к нулю равномерно.

В самом деле, при каждом фиксированном x в сумме

$$S_l(f,x)-S_{m_n}(f,x)=\sum_{\nu=m_n}^{l-1}(f,\tilde{H}_\nu)\tilde{H}_\nu(x)$$

содержится не более p_n-1 отличных от нуля слагаемых. Поэтому по лемме 2.3

$$|S_l(f,x)-S_{m_n}(f,x)|\le(p_n-1)\frac{\omega_n(f)}{\sqrt{m_n}}\sqrt{m_n}\le p_n\omega_n(f)\to 0.\qquad\square$$

Следствие. *Если p_n ограничены в совокупности, то ряд Фурье – Хаара непрерывной функции сходится равномерно.*

3. СИСТЕМА ХААРА НА НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЕ С ПОСТОЯННОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

Рассмотрим компактную нуль-мерную группу $(G,\dot+)$, для которой все $p_n = p$. Последовательность (p_n) будем называть *образующей*. Оператор $A:\ G\to G$ назовем *оператором растяжения*, если

1) $A(G_{n+1}) = G_n$ $(n\geq 0)$,

2) $\forall\, x,y\in G_n$ $A(x\dot+y) = A(x)\dot+A(y)$ $(n\geq 1)$.

Свойства оператора растяжения.

1) Если $g\in G_n\setminus G_{n+1}$, то $A^n(g)\in G_0\setminus G_1$.

2) Если $g\in G_n\setminus G_{n+1}$, то $A^n(G_{n+1}\dot+g) = A^n(G_{n+1})\dot+A^n(g) = G_1\dot+A^n g$, т.е. смежный класс $G_{n+1}\dot+g$, составляющий G_n, оператор A^n переводит в смежный класс, составляющий G_0.

3) Если $y_1,y_2\in G_n\setminus G_{n+1}$ и $y_1\dot-y_2\notin G_{n+1}$, то $A^n(G_{n+1}\dot+y_1)\cap A^n(G_{n+1}\dot+y_2) = \emptyset$, т.е. образы различных смежных классов $G_{n+1}\dot+y$ при отображении A^n есть различные смежные классы. В самом деле, $A^n(G_{n+1}\dot+y_1) = G_1\dot+A^n y_1$, $A^n(G_{n+1}\dot+y_2) = G_1\dot+A^n y_2$ и по свойству 1) $A^n y_1, A^n y_2\in G_0\setminus G_1$. Так как $y_1\dot-y_2\notin G_{n+1}$, то $y_1 = y_2\dot+\alpha$ и $\alpha\in G_n\setminus G_{n+1}$. Поэтому $A^n y_1 = A^n y_2\dot+A^n\alpha$, причем $A^n\alpha\in G_0\setminus G_1$. Это и означает, что $A^n y_1\dot-A_n y_2\notin G_1$, т.е. смежные классы $G_1\dot+A^n y_1$ и $G_1\dot+A^n y_2$ различны.

4) $r_0(A^n x)$ есть характер подгруппы G_n, причем $r_0(A^n x)\in G_{n+1}^\perp\setminus G_n^\perp$. Действительно, $r_0(A^n x)$ постоянна на каждом смежном классе $G_{n+1}\dot+g$, составляющем G_{n+1}, следовательно, $r_0(A^n x)$ непрерывна на G_n. Кроме того, если $x,y\in G_n$, то $r_0(A^n(x\dot+y)) = r_0(A^n x\dot+A^n y) = r_0(A^n x)\cdot r_0(A^n y)$, т.е. $r_0(A^n x)$ характер на G_n. По свойству 2) $r_0(A^n(G_{n+1})) = r_0(G_1) = 1$, т.е. $r_0(A^n x)\in G_{n+1}^\perp$ и $r_0(A^n(G_{n+1}\dot+y)) = r_0(A^n y)\neq 1$ при $y\notin G_{n+1}$. Таким образом, $r_0(A^n x)\in G_{n+1}^\perp\setminus G_n^\perp$.

5) $r_0(A^n x)$ можно продолжить до характера $r_n(x)\in G_{n+1}^\perp\setminus G_n^\perp$ на всей группе G.

Из этих свойств и теоремы 2.4 сразу следует

Теорема 3.5. *Если все $p_n = p$, то функции*

$$\tilde H_0(x)\equiv 1,\qquad \tilde H_{jp^n+k}(x) = p^{\frac{n}{2}} r_0^j(A^n(x\dot-q))\mathbf{1}_{G_n\dot+q}(x)\qquad (j=1,\dots,p-1)$$

образуют ортонормированную систему (ОНС) на G, которые будем называть функциями Хаара.

Как мы видим в случае $p_n = p$ функции Хаара можно получить как степени, сжатия и сдвиги одной функции $r_0(x)$. Если $p=2$, то для j возможно только одно значение $j=1$, и мы получаем классическую двоичную систему Хаара как сжатия и сдвиги одной функции.

Замечание. При $p_n = 3$ образуем функции $\psi_1(x) = \sqrt{2}Re(r_0(x))$ и $\psi_2(x) = \sqrt{2}Im(r_0(x))^2$. Нетрудно проверить, что

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & x\in G_1,\\ -\frac{1}{\sqrt2}, & x\in G_1\dot+g_1,\\ -\frac{1}{\sqrt2}, & x\in G_1\dot+2g_1,\end{cases}\qquad \psi_2(x) = \begin{cases} 0, & x\in G_1,\\ \frac{\sqrt3}{\sqrt2}, & x\in G_1\dot+g_1,\\ -\frac{\sqrt3}{\sqrt2}, & x\in G_1\dot+2g_1.\end{cases}$$

Тогда функции

$$\tilde H_0(x)\equiv 1,\qquad 3^{\frac{n}{2}}\psi_1(A^n(x\dot-q))\mathbf{1}_{G_n\dot+q}(x),\qquad 3^{\frac{n}{2}}\psi_2(A^n(x\dot-q))\mathbf{1}_{G_n\dot+q}(x)$$

образуют ОНС на G. Когда G есть группа всех p-адических чисел и $p=3$, эта система была построена в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Кашин С.Б., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.

2. *Козырев С.В.* Теория всплесков как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–159.

3. *Shelkovich V., Skopina M.* p-Adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators // 2008. http: // arxiv.org/ abs/ 0705.2294.

4. *Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., Skopina M.* p-Adic refinable function and MRA-based wavelets // 2008. http:// arxiv.org/ abs/ 0711.2820.

5. *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты с компакт-

ными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 193–220.

6. *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952.

7. *Benedetto J.J., Benedetto R.L.* A wavelet theory for local fields and related groups // The J. of Geometric Analysis. 2004. V. 14, № 3. P. 423–456.

8. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981.

9. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

УДК 517.535.4

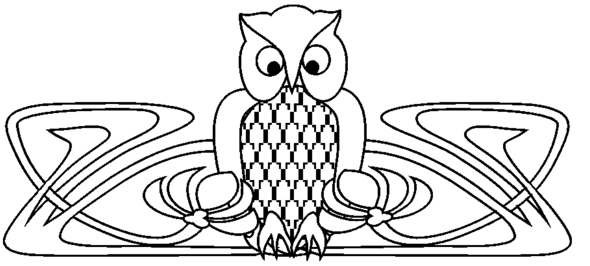
О РАЗЛОЖЕНИИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НА ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Р.Г. Письменный

Славянский-на-Кубани государственный педагогический институт,
кафедра математики и методики ее преподавания
E-mail: Pirogen@mail.ru

Статья содержит развитие известной теоремы И.Ф. Красичкова-Терновского о расщеплении на случай уточненного порядка. При этом охватывается ситуация с нулевым порядком. Доказательство осуществляется по той же схеме и основано на факторизационной теореме Адамара.

Ключевые слова: целая функция, конечный порядок, нулевой порядок, факторизационная теорема.



Factoring of an Entire Function Into Two Equivalent Functions

R.G. Pismennyi

The article contains the development of the known Krasichkov-Ternovskii's theorem about fission on event of the proximate order. Herewith event of the zero order is covered. Proof is realized on the same scheme and is founded on Adamara's theorem.

Key words: entire function, finit order, order zero, factorization theorem.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Выберем неотрицательную функцию μ, определённую на луче $t \geq 0$. Считаем, что она возрастает, дифференцируема в окрестности $+\infty$ и

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mu(t)}{\ln t} = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} = \rho < +\infty. \tag{1}$$

Отметим, что из условий (1) вытекает, что функция $\rho(t) = \frac{\ln \mu(t)}{\ln t}$ является уточнённым порядком, то есть

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(t) = \rho < +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} t\rho'(t)\ln t = 0. \tag{2}$$

Действительно, $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln \mu(t) = +\infty$, значит, по известному правилу

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \mu(t)}{\ln t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} = \rho$$

и при этом

$$t\rho'(t)\ln t = \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} - \frac{\ln \mu(t)}{\ln t} \to 0,$$

если $t \to +\infty$. При $\rho > 0$ верно и обратное, то есть для любого уточненного порядка $\rho(t) \to \rho$ функция $\mu(t) = t^{\rho(t)}$ удовлетворяет соотношениям (1). Действительно, при $\rho > 0$ имеем

$$\frac{\mu(t)}{\ln t} = \frac{t^{\rho(t)}}{\ln t} \to +\infty \quad \text{и} \quad \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} = t\rho'(t)\ln t + \rho(t) \to \rho \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Таким образом, при $\rho > 0$ условия (1) и (2) эквивалентны.

