Наконец, если следовать выводу функционального уравнения для L-функции Дирихле, приведенному в [5], то получим основной результат данной работы.

Теорема 4. *Пусть* $\{a_n\}$ *— периодическая последовательность, для которой выполняются условия:* 1) $\sum\limits_{n\leqslant x} a_n = O(1)$; 2) $\sum\limits_{l=1}^{d} a_l e^{\frac{2\pi i l m}{d}} = \overline{a_m}\sum\limits_{l=1}^{d} a_l e^{\frac{2\pi i l}{d}}$. *Тогда ряд Дирихле* (2) *определяет функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению типа Римана* (3).

Библиографический список

1. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.
2. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматгиз, 1994.
3. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
4. *Кузнецов В. Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36, вып. 9. С. 805–813.
5. *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции. М.: Наука, 1975.

УДК 517.51

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЙ КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ НА НУЛЬ-МЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

С. Ф. Лукомский

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: lukomskiisf@info.sgu.ru

Для решения масштабирующего уравнения, преобразование которого имеет компактный носитель, дано необходимое и достаточное условие, при котором это решение порождает неортогональный КМА.

Ключевые слова: нуль-мерные локально компактные группы, сжатия и сдвиги, система Рисса .

Nonorthogonal Multiresolution Analysis on Zero-Dimensional Locally Compact Groups

S. F. Lukomskii

Saratov State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: lukomskiisf@info.sgu.ru

We given necessary and sufficient condition under which the solution of refinement equation with compactly supported Fourier transform generate the multiresolution analysis.

Key words: zero-dimensional locally compact groups, shifts, dilations, Riesz systems.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительный интерес вызывают вопросы построения всплесковых базисов на локально компактных нуль-мерных абелевых группах, как общего вида, так и на конкретных группах. Для построения таких базисов обычно строят кратномасшабный анализ (КМА), а затем по известной схеме получают всплесковые базисы. В работах [1–3] эти вопросы рассмотрены на двоичной группе Кантора. Наибольший всплеск интереса к этой тематике проявился после работ С. В. Козырева [4, 5] в которых были впервые построены p-адические базисы Хаара. В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков в работах [6–8] охарактеризовали все двоичные финитные всплески на $\mathbb{R}_+$ и указали алгоритм их построения. Ю.А.Фарков в работах [9–10] указал метод построения ортогональных всплесков с компактным носителем на локально компактной группе Виленкина G с постоянной образующей последовательностью и нашел необходимые и достаточные условия, при которых решения масштабирующего уравнения генерируют КМА в $L_2(G)$. Большая группа работ связана с построением КМА на группах всех p-адических чисел. В. М. Шелкович, А. Ю. Хренников, М. А. Скопина в работах [11–13] ввели понятие p-адического КМА с ортогональной масштабирующей функцией и описали общую схему их построения. Отметим, что в работах [10] и [13] решалась одна и та же задача — построение КМА и на его основе построение ортонормированных базисов в $L_2(G)$ как сжатий и сдвигов нескольких функций. В [10] эта задача рассмотрена на группе Виленкина, а в [13] — на поле всех p-адических чисел. В работе [14] вопросы построения ортогонального КМА и ортогональных всплесковых базисов рассмотрены на произвольных локально компактных нуль-мерных группах.

В настоящей статье мы рассмотрим вопросы построения неортогонального КМА на произвольных локально компактных нуль-мерных группах, для которых порядки смежных классов соседних подгрупп совпадают и равны некоторому простому числу. Для решения масштабирующего уравнения, преобразование которого имеет компактный носитель, будет дано необходимое и достаточное условие, при котором это решение порождает неортогональный КМА.

1. ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ НУЛЬ-МЕРНЫЕ ГРУППЫ, ТОПОЛОГИЯ, ХАРАКТЕРЫ

Приведем основные понятия и факты, связанные с анализом на нуль-мерных группах. Более подробную информацию можно найти в [15]. Пусть $(G,\dot{+})$ — локально компактная абелева группа, топология в которой задана счетной системой открытых подгрупп:

$$\supset G_{-n} \supset \dots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots,$$

таких, что $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = \{0\}$ (0 — нулевой элемент группы G). При каждом фиксированном $N \in \mathbb{Z}$ подгруппа G_N является компактной абелевой группой относительно той же операции $\dot{+}$ в топологии, порожденной системой подгрупп

$$G_N \supset G_{N+1} \supset \dots \supset G_n \supset \dots \quad .$$

Пусть далее X — совокупность характеров группы G, которая является группой относительно операции умножения, $G_n^{\perp}$ — аннулятор группы G_n, т. е. $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \ \forall x \in G_n, \chi(x) = 1\}$.

Так как каждая группа G_n компактна, то каждая фактор-группа G_n/G_{n+1} конечна, и пусть p_n — ее порядок. Можно считать, что p_n — простые числа, так как используя теорему Силова [16], можно уплотнить цепочку подгрупп так, что порядки фактор-групп G_n/G_{n+1} станут простыми. В этом случае базой топологии являются всевозможные смежные классы $G_n\dot{+}g$ $(g \in G)$.

Определим далее числа $(\mathfrak{m}_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ следующим образом:

$$\mathfrak{m}_0 = 1, \quad \mathfrak{m}_{n+1} = \mathfrak{m}_n \cdot p_n.$$

Ясно, что при $n \ge 1$ $\mathfrak{m}_n = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$,

$$\mathfrak{m}_{-n} = \frac{1}{p_{-1}p_{-2}\dots p_{-n}}.$$

Смежные классы $G_n\dot{+}g$ $(n \in \mathbb{Z})$ вместе с пустым множеством образуют полукольцо $\mathcal{K}$. На каждом классе $G_n\dot{+}g$ мера μ определена равенством $\mu(G_n\dot{+}g) = \mu G_n = 1/\mathfrak{m}_n$. Таким образом, если $n \in \mathbb{N}$ и $p_n = p$, то $\mu G_n \cdot \mu G_{-n} = 1$. Меру μ можно продолжить с полукольца $\mathcal{K}$ на σ алгебру (например, по схеме Каратеодори). Получим меру μ, совпадающую на борелевских множествах с мерой Хаара на G, и которая инвариантная относительно сдвига. Пусть далее $\int\limits_G f(x)d\mu(x)$ абсолютно сходящийся интеграл, порожденный мерой μ.

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}), \tag{1.1}$$

причем в сумме (1.1) слагаемых с отрицательными номерами конечное число, т. е.

$$x = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1},\ a_N \ne 0). \tag{1.2}$$

Систему элементов (g_n) будем называть базисной.

Каждый аннулятор $G_n^\perp$ есть группа относительно умножения, $G_n^\perp$ образуют возрастающую последовательность:

$$\dots \subset G_{-n}^\perp \subset \dots \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset \dots, \tag{1.3}$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = X, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = \{1\},$$

причем фактор-группа $G_{n+1}^\perp / G_n^\perp$ имеет порядок p_n.

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $\chi \in X$ единственным образом представим в виде

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причем в произведении множителей с положительными номерами конечное число. Характеры r_n будем называть функциями Радемахера.

В группе характеров X можно ввести топологию, используя цепочку подгрупп (1.3) и выбирая в качестве базы топологии совокупность смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi$ $(\chi \in X)$. Совокупность таких смежных классов вместе с пустым множеством образует полукольцо $\mathcal{X}$. Для каждого смежного класса $G_n^\perp \cdot \chi$ определим его меру ν равенством $\nu(G_n^\perp \cdot \chi) = \nu(G_n^\perp) = \mathfrak{m}_n$. Таким образом, всегда $\mu(G_n)\nu(G_n^\perp) = 1$. Мера ν продолжается стандартным способом (например, по схеме Каратеодори) на σ-алгебру измеримых множеств. По этой мере строится абсолютно сходящийся интеграл $\int\limits_X F(\chi) d\nu(\chi)$.

Значение $\chi(g)$ характера χ на элементе $g \in G$ будем обозначать через (χ, g). Преобразование Фурье $\hat{f}$ для $f \in L_2(G)$ определяется равенством

$$\hat{f}(\chi) = \int\limits_G f(x)\overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_{-n}} f(x)\overline{(\chi, x)} d\mu(x), \tag{1.4}$$

где $\lim$ понимается в смысле сходимости по норме $L_2(X)$. Для $f \in L_2(G)$ справедливо равенство Планшереля

$$f(x) = \int\limits_X \hat{f}(\chi)(\chi, x) d\nu(\chi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n^\perp} \hat{f}(\chi)(\chi, x) d\nu(x), \tag{1.5}$$

в котором $\lim$ также понимается в смысле сходимости по норме $L_2(X)$.

Группа характеров X с такой топологией является нуль-мерной локально компактной группой, и имеет место двойственная ситуация: каждый элемент $x \in G$ является характером группы X и G_n есть аннулятор группы $G_n^\perp$. В дальнейшем в определении 2.1 мы зададим на группе G оператор растяжения. Однако определить такой оператор удается только в случае, когда $p_n = p$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому всюду в дальнейшем будем рассматривать группы G, для которых $p_n = p$. Символом $f_{\dot{+}g}$ будем обозначать сдвиг функции f на элемент $g \in G$ т. е. $f_{\dot{+}g}(x) = f(x \dot{+} g)$.

2. ОПЕРАТОР РАСТЯЖЕНИЯ В НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЕ И ГРУППЕ ЕЕ ХАРАКТЕРОВ

В этом и следующем параграфе мы будем рассматривать локально компактную группу $(G, \dot{+})$ с основной цепочкой подгрупп

$$\dots \subset G_n \subset \dots \subset G_1 \subset G_0 \subset G_{-1} \subset \dots \subset G_{-n} \subset \dots,$$

в которой $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ (символом $X^\sharp$ обозначено количество элементов множества X). Будем также предполагать, что операция $\dot{+}$ в группе G удовлетворяет условию

$$pg_n = \alpha_1 g_{n+1} \dot{+} \alpha_2 g_{n+2} \dot{+} \dots \dot{+} \alpha_s g_{n+s} \tag{2.1}$$

при некоторых фиксированных числах $\alpha_j = \overline{0, p-1}$ $(j = \overline{1, s})$.

Отметим, что если $pg_n = 0$, то группа G есть группа Виленкина, если $pg_n = g_{n+1}$ — группа всех p-адических чисел.

Определение 2.1. Определим оператор $\mathcal{A}: G \to G$ равенством

$$\mathcal{A}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_{n-1} \tag{2.2}$$

при $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_n$. Если оператор $\mathcal{A}$ аддитивен, то будем называть его *оператором растяжения*.

Замечание. Оператор $\mathcal{A}$ будет аддитивным, если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию (2.1). Чтобы убедиться в этом, заметим, что каждый элемент $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_n$ можно отождествить с последовательностью коэффициентов $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и тогда оператор растяжения $\mathcal{A}$ осуществляет сдвиг последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ на единицу. В этом случае равенство $\mathcal{A}(x\dot{+}y) = \mathcal{A}(x)\dot{+}\mathcal{A}(y)$ означает, что если мы сложим последовательности коэффициентов элементов x и y и затем сдвинем эту сумму на единицу, то получим последовательность, которая есть сумма сдвигов. Последнее, очевидно, выполняется, если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию (2.1). В частности, оператор $\mathcal{A}$ будет аддитивным в наиболее важных группах: группах Виленкина с условием $pg_n = 0$ и группах p-адических чисел ($pg_n = g_{n+1}$).

Лемма 2.1. *Если $\mathcal{A}$ — оператор растяжения, то $\mathcal{A}G_n = G_{n-1}$, $\mathcal{A}^{-1}G_n = G_{n+1}$.*

Доказательство. Равенство $\mathcal{A}G_n = G_{n-1}$ очевидно следует из представления $G_n = \{x \in G : x = a_n g_n \dot{+} a_{n+1} g_{n+1} \dot{+} \ldots\}$. □

Лемма 2.2. *Если $f \in L(G)$, $\mathcal{A}$ — оператор растяжения, то*

$$\int\limits_G f(\mathcal{A}x)\,d\,\mu x = \frac{1}{p}\int\limits_G f(x)\,d\,\mu x. \tag{2.3}$$

Доказательство. Равенство (2.3) очевидно верно, если $f(x) = \mathbf{1}_{G_n \dot{+} g}(x)$. Поэтому (2.3) верно для ступенчатых функций, а значит, и для $f \in L(G)$. □

Обозначим $H_0 = \{x \in G : \ x = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N}g_{-N},\ N \in \mathbb{N},\ a_{-j} = \overline{0, p-1}\}$. Множество H_0 играет роль натуральных чисел.

Лемма 2.3. *Если $h, g \in H_0$, то*

$$\int\limits_{G_0^\perp} \overline{(\chi, g)}(\chi, g)\,d\,\nu(x) = \delta_{g,h} = \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим элементы $x \in G$ как характеры группы X и пусть $\tilde{x} = x|_{G_0^\perp}$ — сужение этих характеров на группу $G_0^\perp$. Тогда

$$\tilde{x} = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N}g_{-N} \in H_0,$$

(здесь надо учесть, что $(G_0^\perp, g_k) = 1$ при $k \geq 0$). Поэтому H_0 есть группа характеров компактной группы $G_0^\perp$, и, значит, элементы из H_0 образуют ортонормированную систему в $L_2(G_0^\perp)$. □

Следствие. $\int\limits_{G_0^\perp} (\chi, x)d\nu(\chi) = \mathbf{1}_{G_0}(x)$.

Доказательство. Если $x \in G_0$, то для $\chi \in G_0^\perp$ $(\chi, x) = 1$, и, значит, $\int\limits_{G_0^\perp} (\chi, x)d\nu(\chi) = 1$. Если $x \notin G_0$, то $x \in H_0$ и $x \neq 0$. Поэтому по лемме 2.3

$$\int\limits_{G_0^\perp} (\chi, x)\overline{(\chi, 0)}d\nu(\chi) = 0. \qquad \square$$

Определение 2.2. Определим действие оператора растяжения $\mathcal{A}$ на характеры $\chi \in X$ равенством $(\chi\mathcal{A})(x) = \chi(\mathcal{A}x)$.

Замечание. Оператор растяжения $\mathcal{A}$ действует на элемент $x \in G$ слева, а на характер $\chi \in X$ — справа.

Лемма 2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — оператор растяжения в G. Тогда:* 1) $G_n^\perp \mathcal{A} = G_{n+1}^\perp$; 2) $G_n^\perp \mathcal{A}^{-1} = G_{n-1}^\perp$; 3) $G_n^\perp r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \dots r_{n+s}^{\alpha_{n+s}} \mathcal{A} = G_{n+1}^\perp r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} r_{n+2}^{\alpha_{n+2}} \dots r_{n+1+s}^{\alpha_{n+1+s}}$.

Доказательство. 1) пусть $\chi \in G_n^\perp \mathcal{A}$. Это равносильно тому, что $\chi = \chi_n \mathcal{A}$, где $\chi_n \in G_n^\perp$. Последнее верно тогда и только тогда, когда для всех $x \in G_{n+1}$, $\chi(x) = \chi_n \mathcal{A} x = 1$, что эквивалентно принадлежности $\chi \in G_{n+1}^\perp$.

2) очевидно следует из 1).

3) следует из равенств $G_n^\perp \mathcal{A} = G_{n+1}^\perp$ и $r_n \mathcal{A} = r_{n+1}$. □

Лемма 2.5. *Пусть $r_0 \in G_1^\perp \setminus G_0^\perp$ – функция Радемахера. Тогда при любом $n \in \mathbb{Z}$ характер $r_0 A^n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$, т. е. является n-й функцией Радемахера.*

Доказательство. По лемме 2.4

$$(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) A^n = G_1^\perp A^n \setminus G_0^\perp A^n = G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp,$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Лемма 2.6. *Пусть $\mathcal{A}$ — оператор растяжения в G и $\chi = \prod\limits_{k=-\infty}^{N} r_k^{\alpha_k}$. Тогда $\chi \mathcal{A} = \prod\limits_{k=-\infty}^{N} r_{k+1}^{\alpha_k}$.*

Доказательство. Пусть $\chi = \prod\limits_{k=-\infty}^{N} r_k^{\alpha_k}$, т. е. $\chi = \prod\limits_{k=n}^{N} r_k^{\alpha_k} \cdot \chi_n$, где $\chi_n \in G_n^\perp$. Тогда $\chi \mathcal{A} = \left(\prod\limits_{k=n}^{N} r_{k+1}^{\alpha_k} \right) \times$ $\times \chi_n \mathcal{A}$, и $\chi_n \mathcal{A} \in G_{n+1}^\perp$, т. е. $\chi \mathcal{A} = \prod\limits_{k=-\infty}^{N} r_{k+1}^{\alpha_k}$. □

Замечание. Из леммы 2.6 следует, что оператор $\mathcal{A}$ является оператором растяжения в группе характеров, и по аналогии с леммой 2.2 имеем для $f \in L(X)$

$$\int\limits_X f(\chi A) d\nu(\chi) = \frac{1}{p} \int\limits_X f(\chi) d\nu(\chi).$$

3. СДВИГИ ФУНКЦИИ КАК СИСТЕМА РИССА

Напомним [17], что система функций $(\varphi_n) \subset L_2(G)$ называется системой Рисса с постоянными A и B $(A, B > 0)$, если для любой последовательности $C = (c_j) \in l_2$ ряд $\sum\limits_n c_n \varphi_n$ сходится в $L_2(G)$ и

$$A ||C||_{l_2}^2 \le \left\| \sum c_n \varphi_n \right\|_{L_2(G)}^2 \le B ||C||_{l_2}^2. \tag{3.1}$$

Отметим, что из условия (3.1) уже следует сходимость ряда $\sum c_n \varphi_n$. Очевидно также, что система Рисса будет базисом в пространстве:

$$V := \left\{ f = \sum c_n \varphi_n : \ \sum |c_k|^2 < +\infty \right\}.$$

Известно [17, теорема 1.1.7], что если $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, то система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} k))_{k \in \mathbb{Z}}$ будет системой Рисса с постоянными A и B тогда и только тогда, когда п.в. на $\mathbb{R}$:

$$A \le \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(x - k)|^2 \le B.$$

Следующая теорема является аналогом этого утверждения для локально компактных нуль-мерных групп.

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi \in L_2(G)$ и $\operatorname{supp} \hat{\varphi}(\chi) \subset \mathrm{G}_0^\perp$. Тогда система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ будет системой Рисса с постоянными A и B тогда и только тогда, когда п.в. на $G_0^\perp$:*

$$A \le |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \le B. \tag{3.2}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $H \subset H_0$ — конечное подмножество. По теореме Планшереля

$$\left\| \sum_{h \in H} c_h \varphi(x \dot{-} h) \right\|_2^2 = \int\limits_G \left(\sum_{h \in H} c_h \varphi(x \dot{-} h) \right) \overline{\left(\sum_{h \in H} c_h \varphi(x \dot{-} h) \right)} d\mu =$$

$$= \int\limits_X \left(\sum_{h\in H} c_h \hat{\varphi}_{\dot{-}h}(\chi)\right)\overline{\left(\sum_{h\in H} c_h \hat{\varphi}_{\dot{-}h}(\chi)\right)} d\nu(\chi) = \int\limits_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \left|\sum_{h\in H} c_h \overline{(\chi, h)}\right|^2 d\nu(\chi). \tag{3.3}$$

Так как элементы $h \in H_0$ образуют ортонормированную систему в $L_2(G_0^\perp)$, то отсюда, с учетом (3.2), получается:

$$A\sum_{h\in H} |c_h|^2 \le \left\|\sum_{h\in H} c_h \varphi(x\dot{-}h)\right\|_2^2 \le B\sum_{h\in H} |c_h|^2$$

для любого конечного $H \subset H_0$, а значит, и для H_0.

Необходимость. Пусть

$$A\sum_{h\in H_0} |c_h|^2 \le \left\|\sum_{h\in H_0} c_h \varphi(x\dot{-}h)\right\|_2^2 \le B\sum_{h\in H_0} |c_h|^2.$$

Из (3.3) получается неравенство

$$A\sum_{h\in H_0} |c_h|^2 \le \int\limits_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \left|\sum_{h\in H_0} c_h \overline{(\chi, h)}\right|^2 d\nu\chi \le B\sum_{h\in H_0} |c_h|^2. \tag{3.4}$$

Правое неравенство в (3.4) означает, что

$$\sup_{||f||_{L_2}\le 1} \int\limits_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 |f(\chi)|^2 d\nu(\chi) \le B,$$

т. е. $|| \, |\hat{\varphi}(\chi)|^2 ||_{L^\infty} \le B$ или иначе $|\hat{\varphi}(\chi)|^2 \le B$ п.в. на $G_0^\perp$. Покажем теперь, что $A \le |\hat{\varphi}(\chi)|^2$ п.в. на $G_0^\perp$. Пусть это не так, т. е. существует множество $E \subset G_0^\perp$ с $\nu(E) > 0$ и такое, что $|\hat{\varphi}(\chi)|^2 < A - \varepsilon$ на E. Рассмотрим характеристическую функцию $\mathbf{1}_E(\chi)$ и пусть $\mathbf{1}_E(\chi) = \sum\limits_{h\in H_0} c_h \overline{(\chi, h)}$. Тогда

$$\int\limits_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \left|\sum_{h\in H_0} c_h \overline{(\chi, h)}\right| d\nu(\chi) = \int\limits_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \mathbf{1}_E^2(\chi) d\nu(\chi) \le (A-\varepsilon)\int\limits_{G_0^\perp} \mathbf{1}_E^2(\chi) d\nu(\chi) = (A-\varepsilon)\sum |c_h|^2,$$

что противоречит (3.4). □

В качестве следствия получается

Теорема 3.2. *Пусть* $\varphi \in L_2(G)$ *и* $\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\chi) \subset \mathrm{G}_0^\perp$. *Тогда система сдвигов* $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ *есть ортонормированная система на* G_0 *тогда и только тогда, когда* $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ *п.в. на* $G_0^\perp$.

Доказательство. *Необходимость*. Если $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ — ортонормированная система на G_0, то она есть система Рисса с границами $A = B = 1$ и по теореме 3.1 $1 \le |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \le 1$ п.в. на $G_0^\perp$.

Достаточность очевидна. □

4. НЕОРТОГОНАЛЬНЫЙ КМА

Совокупность замкнутых подпространств $V_n \subset L_2(G)$ назовем КМА, если выполнены условия:

A.1. $V_n \subset V_{n+1}$.

A.2. $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(G)$; $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.

A.3. $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathcal{A}x) \in V_{n+1}$.

A.4. $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x\dot{-}h) \in V_0$.

A.5. Существует функция $\varphi \in L_2(G)$ такая, что сдвиги $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ образуют базис Рисса в V_0.

КМА с такой аксиомой A.5 будем называть *неортогональным*.

Для построения КМА используем традиционную схему. Выбираем функцию $\varphi \in L_2(G)$, для которой сдвиги $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ образуют систему Рисса с границами $0 < A < B < +\infty$ и положим

$$V_j = \overline{\operatorname{span}(\varphi(A^j x\dot{-}h))_{h\in H_0}}. \tag{4.1}$$

В этом случае система $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ есть базис Рисса в V_0, и справедливо неравенство

$$A||f||^2 \le \sum_{h\in H_0} |(f,\varphi\dot{-}h)|^2 \le B||f||^2 \tag{4.2}$$

для любой функции $f \in V_0$. Если подпространства, определенные в (4.1), образуют КМА, то говорят, что φ порождает КМА. Будем искать условия, при которых φ порождает КМА. Условие

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H_0} \beta_h \varphi(Ax\dot{-}h) \tag{4.3}$$

является необходимым для выполнения аксиомы А.1. Соотношение (4.3) называют масштабирующим уравнением.

Следующие две леммы доказаны в [14].

Лемма 4.1. *Если* $\varphi \in L_2(G)$ *удовлетворяет масштабирующему уравнению* (4.3), $\operatorname{supp}\hat\varphi \subset \mathrm{G}_0^\perp$, *то выполнена аксиома А.1.*

Лемма 4.2. *Пусть* $\varphi \in L_2(G)$ — *решение уравнения* (4.3) *и* $\operatorname{supp}\hat\varphi \subset \mathrm{G}_0^\perp$. *Равенство* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = L_2(G)$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp}\hat\varphi(\cdot\mathcal{A}^{-\mathrm{n}}) = \mathrm{X}$.

Следствие. *Если* $\varphi \in L_2(G)$ *решение уравнения* (4.3) *и* $\operatorname{supp}\hat\varphi = \mathrm{G}_0^\perp$, $A \le |\hat\varphi(\chi)| \le B$ *п.в. на* $G_0^\perp$, *то* $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(X)$.

Лемма 4.3. *Пусть* $\varphi \in L_2(G)$, $A \le |\hat\varphi(\chi)|^2 \le B$ *п.в. на* $G_0^\perp$ *и* $\operatorname{supp}\hat\varphi \subset \mathrm{G}_0^\perp$. *Тогда* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $f \in V_{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $f(\mathcal{A}^n x) \in V_0$ и с учетом (4.2) имеем

$$\frac{1}{p^n}\sum_{h\in H_0}\left|\int_G f(x)\overline{\varphi(\mathcal{A}^{-n}x\dot{-}h)}d\,\mu x\right|^2 = \sum_{h\in H_0}\left|\int_G f(\mathcal{A}^n x)\overline{\varphi(x\dot{-}h)}d\,\mu x\right|^2 \le$$

$$\le B||f(\mathcal{A}^n\cdot)||_{L_2}^2 = B\int_G |f(\mathcal{A}^n x)|^2 d\,\mu(x) = \frac{B}{p^n}\int_G |f(x)|^2 d\,\mu(x) = \frac{B}{p^n}||f||_{L_2}^2. \tag{4.4}$$

По теореме 3.1 система $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ есть базис Рисса в V_0 с границами A и B, поэтому система $(p^{n/2}\varphi(\mathcal{A}^n x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ — базис Рисса в V_n с теми же границами. Следовательно, для $f \in V_n$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$||f||_{L_2}^2 \le \frac{1}{A}\sum_{h\in H_0} |(f, p^{n/2}\varphi(\mathcal{A}^n\cdot\dot{-}h))|^2 = \frac{p^n}{A}\sum_{h\in H_0} |(f,\varphi(\mathcal{A}^n\cdot\dot{-}h))|. \tag{4.5}$$

Соединяя (4.4) и (4.5), получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$||f||_{L_2}^2 \le \frac{B}{A}\frac{1}{p^n}||f||_{L_2}^2.$$

Отсюда следует $||f||_{L_2}^2 = 0$, а значит, $f = 0$ п.в. в G. □

Теорема 4.4. *Пусть* $\varphi \in L_2(G)$, $\operatorname{supp}\hat\varphi(\chi) = \mathrm{G}_0^\perp$, $A \le |\hat\varphi(\chi)|^2 \le B$ *п.в. на* $G_0^\perp$ *и* $\varphi(x)$ — *решение масштабирующего уравнения* (4.3). *Тогда функция* φ *порождает КМА.*

Доказательство. Аксиомы А.3. и А.4. очевидны. Аксиомы А.1. и А.2. вытекают из лемм 4.1–4.3.□

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00097-а) *и гранта Президента по государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект НШ*-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Lang W. C.* Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group // SIAM J. Math. Anal. 1996. Vol. 27, № 1. P. 305–312.

2. *Lang W.C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Housten J. Math. 1998. Vol. 24, № 3. P. 533–544.

3. *Lang W. C.* Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. Math. Sci. 1998. Vol. 21, № 2. P. 307–314.

4. *Козырев С. В.* Вейвлет анализ как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. математическая. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158.

5. *Козырев С. В.* p-адические псевдодифференциальные операторы и p-адические вейвлеты // Теор. мат. физ. 2004. Т. 138, № 3. С. 1–42.

6. *Протасов В. Ю., Фарков Ю. А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 10. С. 129–160.

7. *Фарков Ю. А.* Биортогональные диадические вейвлеты на полупрямой // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 6. С. 189–190.

8. *Протасов В. Ю.* Аппроксимация диадическими всплесками // Мат. сборник. 2007. Т. 198, № 11. С. 135–152.

9. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных Абелевых группах // Изв. РАН, Сер. математическая. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.

10. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952.

11. *Shelkovich V. M., Skopina M. A.* p-adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators // J. Fourier Anal. and Appl. 2009. Vol. 15, № 3. P. 366–393. URL: http://arxiv.org/abs/0705.2294.

12. *Shelkovich V. M., Khrennikov A. Yu., Skopina M. A.* p-adic refinable functions and MRA-based wavelets // J. Approx. Th. 2009. Vol. 161, № 1. P. 226–238.

13. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-adic nonorthogonal wavelet bases // Тр. МИАН. 2009. Т. 265. С. 7–18.

14. *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ на нуль-мерных группах и всплесковые базисы // Мат. сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–65.

15. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.

16. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

17. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.

УДК 517.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

З. М. Магомедова

Филиал Российского государственного университета туризма и сервиса в г. Махачкале,
кафедра экономики, бухучета, финансов и аудита,
E-mail: alimn@mail.ru

В статье исследуются асимптотические свойства многочленов $l_n(x)$, ортогональных с весом $e^{-x_j}\Delta t_j$ на произвольных сетках, состоящих из бесконечного числа точек полуоси $[0,\infty)$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лагерра.

Ключевые слова: полином, ортогональная система, сетка, вес, весовая оценка, асимптотическая формула.

About Asymptotic Polynomials, Orthogonal on Any Grids

Z. M. Magomedova

Branch of the Russian State University of Tourism and Service
in Makhachkala,
Chair of Economy, Book Keeping, Finansce and Audit
E-mail: alimn@mail.ru

Asymptotic properties of polynomials orthogonal $l_n(x)$, with weight $e^{-x_j}\Delta t_j$ on any infinite set points from semi-axis $[0,\infty)$ are investigated. Namely an asymptotic formula is proved in which asymptotic behaviour of these polynomials as n tends to infinity together with N is closely related to asymptotic behaviour of the polynomials by Lagerra.

Key words: polynomial, ortogonal system, set, weight, weighted estimate, approximation formula.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $T=\{t_0,t_1,\dots\}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из бесконечного числа различных точек, расположенных на $[0,\infty)$, и таких, что $0=t_0<t_1<t_2\dots$. Рассмотрим также еще одну сетку $X=\{x_0,x_1,\dots\}$, состоящую из бесконечного числа точек x_j, где $x_j=(t_j+t_{j+1})/2$, $j=0,1,\dots$ Через $l_k(x)=l_k(x,T)$, $k=0,1,\dots$ обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке X в следующем смысле $(n,m=0,1,\dots)$:

$$(l_n,l_m)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-x_j}l_n(x_j)l_m(x_j)\Delta t_j=\delta_{nm}, \tag{1}$$