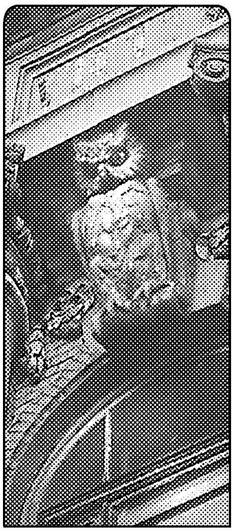
ИНФОРМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 519.1 : 519.8

НЕПРЕРЫВНОЕ РАСПИСАНИЕ С ДВУХЭЛЕМЕНТНЫМИ ПРЕДПИСАНИЯМИ

А.М. Магомедов

Дагестанский государственный университет, Махачкала,
кафедра дискретной математики и информатики
E-mail: Magomedtagir1@yandex.ru

Для двухэлементных предписаний найдены условия существования непререрывного расписания.

Ключевые слова: двудольная интерпретация, рёберная раскраска, непрерывное расписание.

The Continuous Schedule with Two-Element Instructions

A.M. Magomedov

Dagestan State University, Machachkala,
Chair of Descrete Mathematics and Computer Science
E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

For two-element instructions conditions of existence of the continuous schedule of service are found.

Key words: bipartite graph, edge-coloring, continuous schedule.

ВВЕДЕНИЕ

В статье использованы обозначения и определения из [1]. Заданы l приборов, n требований, $l \geqslant n$, и семейство $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ 2-элементных предписаний (неупорядоченных наборов) ω_i с элементами из множества $N = \{1, \ldots, n\}$. Каждый i-й прибор должен выполнить одну операцию над каждым требованием из ω_i, порядок выполнения операций произвольный, длительность каждой операции равна единице. В каждую единицу времени каждый прибор обслуживает не более одного требования и каждое требование обслуживается не более чем одним прибором (*условие неразделяемого доступа*).

Пусть $rep_{\omega_i} j$ — количество вхождений $j \in N$ в ω_i; $rep_{\Omega'} \omega_i$ — количество вхождений предписания ω_i в $\Omega' \subseteq \Omega$; $rep_{\Omega'} j = \sum_{\omega_i \in \Omega'} rep_{\omega_i} j$; $N(\Omega') = \{j \in N \,|\, rep_{\Omega'} j \neq 0\}$; $m = \max_{j \in N} rep_{\Omega} j$.

Согласно условию неразделяемого доступа, длительность любого расписания обслуживания не меньше m. В случае четного m всегда можно построить расписание длительности m, *непрерывное* в том смысле, что каждый прибор выполняет предписанные ему операции в последовательные единицы времени [2]. Поскольку отсюда вытекает существование непрерывного расписания длительности $m + 1$ для любого нечетного m, то вопрос о существовании непрерывного расписания длительности m сохраняет актуальность только для нечетных m. Сформулируем задачу.

Задача о непрерывном расписании: существует ли $(l \times m)$-матрица M с элементами из множества $\{0, 1, \ldots, n\}$, в каждом столбце

© Магомедов А.М., 2011

которой ненулевые элементы попарно различны, а ненулевые элементы любой строки $1 \leqslant i \leqslant l$ образуют предписание ω_i и размещаются в соседних ячейках строки?

Интерпретация: равенство $M_{i,j} = k$ означает при $k \in N$, что в j-й момент времени прибор i обслуживает требование k, а при $k = 0$ — что в j-й момент времени прибор i не обслуживает ни одного требования.

Непрерывные расписания востребованы, когда операции включения – выключения приборов сопряжены со значительными затратами, или стоимость простоев приборов неприемлемо велика. В.А. Струсевич и Е.Р. Ерошина [3, с. 199–200] установили NP-полноту задачи о непрерывном расписании при $l \geqslant 2$ в случае отсутствия ограничений на мощности предписаний ω_i. Из результата [4] следует, что утверждение работы [3] остается в силе и при ограничениях $|\omega_i| \leqslant (m+1)/2$, $1 \leqslant i \leqslant l$. В [5] найдены необходимые и достаточные условия существования непрерывного расписания для случая $m = 5$.

Элементы множества $\{j \in N \mid rep_{\Omega'} j = k\}$, где $\Omega' \subseteq \Omega$, будем называть (Ω', k)-элементами. В разд. 2 данной статьи будут рассмотрены непрерывные расписания длительности 3, содержащие в первом (или третьем) столбце лишь $(\Omega, 3)$-элементы; в разд. 3 в терминах рёберной раскраски двудольных графов рассмотрена характеризация разбиения семейства Ω на такие подсемейства, для каждого из которых существует непрерывное расписание длительности 3; результаты разд. 2–3 использованы в разд. 4 для доказательства следующего основного результата статьи.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ *— семейство* 2*-элементных предписаний* ω_i*, заданных на множестве* N*,* $m = \max_{j \in N} rep_{\Omega} j = 2p+1$*;* $p \in Z^+$*. Непрерывное* $(l \times m)$*-расписание для семейства* Ω *существует тогда и только тогда, когда*

$$|\Omega'| \leqslant p|N(\Omega')| \qquad \forall\ \Omega' \subseteq \Omega. \tag{1}$$

Пусть $a, b \in \{<, \leqslant, =, \neq, \geqslant, >\}$. Двудольный граф $G = (X, Y, E)$, в котором для всех вершин $x \in X$ и $y \in Y$ выполнены соотношения вида

$$d_G x a A, \quad d_G y b B,$$

будем называть (aA, bB)-графом. Если знак операции опущен, подразумевается знак бинарной операции «=»; если условия для $x \in X$ или $y \in Y$ отсутствуют, будем использовать сокращенные записи: $(, bB)$ или $(aA,)$ соответственно.

Примеры. Термин «$(2, 0 \pmod 4)$-граф» примени́м к двудольному графу $G = (X, Y, E)$, в котором степени вершин $x \in X$ равны 2, а степени вершины $y \in Y$ кратны 4; термин «$(2, \leqslant k)$-граф» — к двудольному графу, в котором степени вершин $x \in X$ равны 2, а наибольшая степень вершины множества Y равна k; в «$(, k)$-графе» $G = (X, Y, E)$ степени вершин $y \in Y$ равны k.

1. НЕПРЕРЫВНОЕ РАСПИСАНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ $m = 3$

Рёберно-вершинным инцидентным паросочетанием графа G называется взаимно-однозначное отображение, сопоставляющее каждому ребру графа единственную вершину, инцидентную этому ребру. Граф обладает рёберно-вершинным инцидентным паросочетанием тогда и только тогда, когда каждая связная компонента графа содержит не более одного цикла [6, теорема 4.4.6].

Определим граф $G' = (V', E')$, *ассоциированный* с семейством Ω:

– каждому требованию $j \in N$ сопоставим вершину $v_j \in V'$ с индексом j, которую назовем *ассоциированной* с требованием j;

– для каждого $\omega = (k, j) \in \Omega$ соединим вершины $v_k, v_j \in V'$ (ассоциированные с требованиями $k, j \in N$) $rep_{\Omega}\omega$ ребрами.

Двудольным представлением графа $G' = (V', E')$, $V' = \{v_j\}$, $E' = \{e_i\}$, будем называть двудольный $(2,)$-граф:

$$G = (X, Y, E), \qquad X = \{x_i\}, \qquad Y = \{y_j\},$$

такой, что $(x_i, y_j) \in E$ в том и только в том случае, если ребро e_i и вершина v_j инцидентны в графе G'.

Замечание 1. Если $G = (X, Y, E)$ — двудольное представление графа $G' = (V', E')$, то:

1) в графе G существует полное паросочетание множества X с множеством Y тогда и только тогда, когда в G' существует рёберно-вершинное инцидентное паросочетание;

2) количество циклов в связной компоненте графа G равно количеству циклов в соответствующей связной компоненте графа $G' = (V', E')$.

Пусть $G' = (V', E')$, $V' = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E' = \{e_1, \dots, e_l\}$, $m = \Delta(G')$. Если для ассоциированного с графом G' семейства предписаний существует непрерывное $(l \times m)$-расписание, то граф G' и его двудольное представление $G = (X, Y, E)$ будем называть *графами непрерывного расписания.*

Лемма 1. *Двудольный* $(2, \leqslant 3)$*-граф* $G = (X, Y, E)$ *является графом непрерывного расписания тогда и только тогда, когда существует полное паросочетание множества* X *с множеством* Y.

Доказательство. Докажем необходимость. Если для семейства 2-элементных предписаний, ассоциированного с графом G, существует непрерывное $(l \times 3)$-расписание M, то элемент $k_i \equiv M_{i,2}$ принадлежит множеству N для любого $1 \leqslant i \leqslant l$, и все ненулевые элементы второго столбца попарно различны; следовательно, набор рёбер $\{(x_i, y_{k_i}) \,|\, 1 \leqslant i \leqslant l\}$ служит полным паросочетанием множества X с множеством Y.

Докажем достаточность. Без ограничения общности будем считать, что граф G — связный. Из замечания 1 и работы [6, теорема 4.4.6] следует, что возможны два случая:

- G является деревом;
- G состоит из единственной замкнутой цепи C и некоторого множества деревьев (может быть, пустого), каждое из которых имеет с C точно одну общую вершину — «точку прикрепления».

В первом случае обозначим произвольную вершину дерева через y и продолжим доказательство, начиная с пункта «начало операции» (см. ниже). Во втором случае выберем направление обхода C, ориентируя тем самым каждое ребро из C, и выполним помечивание μ дуг цепи C метками 1 и 2 следующим образом (в качестве индекса вершины $x \in X$ для удобства чтения указан список индексов обеих вершин Y, смежных вершине x):

$$\text{если} \quad x_{ij} \in X, \quad y_i, y_j \in Y, \quad (y_i, x_{ij}), (x_{ij}, y_j) \in E, \quad \text{то} \quad \mu(y_i, x_{ij}) = 1, \quad \mu(x_{ij}, y_j) = 2. \qquad (2)$$

Понятно, что 1) степень точки прикрепления равна 3; 2) точка прикрепления не принадлежит X. Если множество точек прикрепления не пусто, то выполним для каждой точки прикрепления y следующую операцию.

Начало операции. Сориентируем ребра соответствующего дерева так, чтобы получить ориентированное корневое дерево с корнем в вершине y. Пометим дуги ориентированного корневого дерева по правилу (2) со следующим уточнением: если из вершины y_i выходит, кроме дуги (y_i, x_{ij}), еще одна дуга (y_i, x_{ik}), то положим $\mu(y_i, x_{ik}) = 3$. *Конец операции.*

Для получения искомого непрерывного расписания разместим для каждой вершины x_{ij} элементы $i, j \in N$ в отдельной строке $(l \times 3)$-матрицы: i — в столбце с номером, равным $\mu(y_i, x_{ij})$, а j — в столбце с номером, равным $\mu(x_{ij}, y_j)$. Затем во все незаполненные ячейки матрицы занесем нулевые значения.

Поскольку $|\mu(y_i, x_{ij}) - \mu(x_{ij}, y_j)| = 1$, то элементы i и j размещаются в соседних ячейках строки; а поскольку для любой невисячей вершины y_i метки инцидентных дуг (двух либо трех) различны, то никакое $i \in N$ не размещается в одном столбце дважды, другими словами, ненулевые элементы в каждом столбце попарно различны. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если* G' *является графом непрерывного расписания, а его двудольное представление* $G = (X, Y, E)$ *является* $(, \leqslant 3)$*-графом, то для семейства* Ω*, ассоциированного с* G'*, существует «левостороннее»* [4] (*«правостороннее»*) *непрерывное расписание, в котором элемент* $i \in N$ *размещается в* 3*-м столбце* (*соответственно в* 1*-м столбце*) *в том и только в том случае, когда степень вершины* y_i *в графе* G *равна* 3 (*другими словами, когда* i *является* $(\Omega, 3)$*-элементом*).

2. РЁБЕРНАЯ P-РАСКРАСКА ДВУДОЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Лемма 2. *Пусть в связном двудольном* $(2, 0 \pmod 2)$*-графе* $G = (X, Y, E)$ *существует* $(1, \leqslant 2)$*-подграф* $G' = (X, Y', E')$. *Тогда*

- *либо найдется вершина* $y \in Y$ *такая, что* $d_G y = 2$,
- *либо* $d_G y = 4$ *для всех* $y \in Y$.

Доказательство. Подграф графа G, дополнительный к подграфу G', обозначим $\overline{G'}$. Рассмотрим случай, когда не существует вершины $y \in Y$ степени 2, другими словами (ввиду четности $d_G y$), $d_G y \geqslant 4$ для всех $y \in Y$. Докажем, что тогда $d_G y = 4$ для всех $y \in Y$.

Допустим противное: пусть имеется вершина $y_0 \in Y$, такая, что $d_G y_0 > 4$; ввиду ограничений $d_{G'} y \leqslant 2$ для всех $y \in Y'$ и тривиального тождества $d_G y = d_{\overline{G'}} y + d_{G'} y$, отсюда вытекает, что

$$d_{\overline{G'}} y_0 - d_{G'} y_0 > 0. \tag{3}$$

Если $d_{\overline{G'}} y < d_{G'} y$ для какой-либо вершины $y \in Y$, то из $d_{G'} y \leqslant 2$ для всех $y \in Y'$ следует неравенство $d_G y \leqslant 3$, которое ввиду четности $d_G y$ эквивалентно равенству $d_G y = 2$, что в нашем случае невозможно. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$d_{\overline{G'}} y \geqslant d_{G'} y \quad \forall\ y \in Y. \tag{4}$$

Тогда, с одной стороны,

$$\sum_{y \in Y} (d_{\overline{G'}} y - d_{G'} y) = (d_{\overline{G'}} y_0 - d_{G'} y_0) + \sum_{y \in Y \setminus \{y_0\}} (d_{\overline{G'}} y - d_{G'} y) > 0,$$

согласно (3) и (4). С другой стороны, из равенств

$$d_G x = 2 \ \ \forall\ x \in X \quad \text{и} \quad d_{G'} x = 1 \ \ \forall\ x \in X$$

следует

$$\sum_{y \in Y} (d_{\overline{G'}} y - d_{G'} y) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что либо существует вершина $y \in Y$, степень которой равна 2, либо $d_G y = 4$ для всех $y \in Y$. Лемма доказана.

Далее через $c(v, i)$ обозначается число рёбер, инцидентных вершине v и раскрашенных в цвет i.

Лемма 3. *Пусть в сязном двудольном* $(2,)$*-графе* $H = (X_H, Y_H, E_H)$ *существует* $(1, \leqslant 2)$*-подграф* $G' = (X_H, Y', E')$*;* i *и* j *— заданные целые положительные числа,* $i \neq j$*.*

Тогда существуют $(1, \leqslant 2)$*-подграф* $G'' = (X_H, Y'', E'')$ *и реберная* 2*-раскраска графа* H *цветами* i *и* j*, такая, что:*

(c_1) *для каждой вершины* $x \in X_H$ *обоим инцидентным* x *ребрам присвоен один и тот же цвет;*

(c_2) *если* $y \in Y''$ *и* $d_{G''} y = 2$*, то ребрам множества* E''*, инцидентным вершине* y*, присвоены разные цвета;*

(c_3) *если* $y \in Y$ *и* $d_H y > 2$*, то* $|c(y, i) - c(y, j)| \leqslant 1$.

Доказательство. Для каждой вершины $y \in Y_H$ такой, что $d_H y \geqslant 3$ и $d_{G'} y = 2$, обозначим инцидентные ей в графе G' ребра через $(x_{i_1}, y), (x_{i_2}, y)$ и выполним замену «родительских элементов», — вершины y и всех инцидентных ей в графе H рёбер $(x_{i_1}, y), \ldots, (x_{i_k}, y)$, — на конструкцию «дочерних элементов», состоящую из двух новых вершин y', y'' и k новых рёбер:

$$(x_{i_1}, y'), (x_{i_2}, y') \quad \text{и} \quad (x_{i_3}, y''), \ldots, (x_{i_k}, y'').$$

Полученный двудольный граф обозначим $G_0 = (X_H, Y_0, E_0)$.

Случай 1. Если граф G_0 — не эйлеров, то соединим все его нечетные вершины фиктивными ребрами с фиктивной вершиной v_0 и получим эйлеров граф с эйлеровой цепью:

$$v_0,\ e_1,\ v_1,\ e_2,\ \ldots,\ v_{q-1},\ e_q,\ v_0. \tag{5}$$

Выполним рёберную 2-раскраску эйлеровой цепи по следующему правилу:

– ребру e_1 присвоим цвет i;

– пусть некоторому ребру e_k присвоен цвет c, равный i или j; тогда ребру e_{k+1} присвоим цвет c, если $v_k \in X_H$, и цвет $(i + j - c)$ — в противном случае; $k = 1, \ldots, q - 1$.

Затем удалим фиктивные элементы, отождествляя дочерние вершины каждой пары с восстановлением родительских вершин и сохраняя за рёбрами присвоенные цвета.

Случай 2. Если граф G_0 — эйлеров, то удобно рассмотреть следующие подслучаи.

2.1. Все вершины множества $|Y_0|$ имеют четные степени, $|X_H|$ четно.

2.2. Все вершины множества $|Y_0|$ имеют четные степени, $|X_H|$ нечетно. Применив лемму 2, получим, что Y_0 содержит некоторую вершину y_0 степени 2.

2.2.1. Y_0 содержит такую вершину y_0 степени 2, что для одного (и только для одного) из ребер, инцидентных y_0, родительское ребро принадлежит E'.

2.2.2. Для каждой вершины степени 2 из Y_0 выполнено свойство: для каждого из двух инцидентных ребер соответствующее «родительское» ребро принадлежит E'.

Рассмотрение каждого из перечисленных случаев не представляет труда, причем за исключением случая 2.2.2 в качестве G'' может быть выбран исходный подграф G'. Лемма доказана.

Далее $\Gamma(S)$ — множество вершин, смежных вершинам множества S.

Лемма 4. *Пусть p — целое положительное число, $G = (X, Y, E)$ — двудольный $(2, \leqslant 2p{+}1)$-граф, $\Delta(G) = 2p + 1$,*

$$|S| \leqslant p\,|\Gamma(S)| \quad \forall\ S \subseteq X. \tag{6}$$

Тогда существуют $(1, p)$-подграф $G' = (X, Y', E')$ графа G и рёберная p-раскраска C графа G такие, что

$$\text{если} \quad y \in Y, \quad (x', y), (x'', y) \in E', \quad \text{то} \quad C(x', y) \neq C(x'', y); \tag{7}$$

$$\text{если} \quad x \in X, \quad (x, y'), (x, y'') \in E, \quad \text{то} \quad C(x, y') = C(x, y''); \tag{8}$$

$$(c(y, i) - 2)(c(y, j) - 2) \geqslant 0 \quad \forall\ y \in Y, \ \ 1 \leqslant i, j \leqslant p. \tag{9}$$

Доказательство. Заменим каждую вершину y_k и набор всех инцидентных y_k рёбер $(x_{i_1}, y_k), \ldots, (x_{i_q}, y_k)$ на конструкцию из новых вершин $y_k^{(1)}, \ldots, y_k^{(p)}$ и рёбер

$$(x_{i_1}, y_k^{(1)}), \ldots, (x_{i_q}, y_k^{(1)}); \quad \ldots \quad (x_{i_1}, y_k^{(p)}), \ldots, (x_{i_q}, y_k^{(p)}).$$

Полученный граф обозначим $G_1 = (X, Y_1, E_1)$; ясно, что $d_{G_1} x = 2p$ для всех $x \in X$. Множество вершин, смежных с вершинами S в графе G_1, обозначим $\Gamma_1(S)$. Так как $\Gamma_1(y_k^{(1)}) = \cdots = \Gamma_1(y_k^{(p)}) = \Gamma(y_k)$, то $|\Gamma_1(S)| = p|\Gamma(S)|$ для всех $S \subseteq X$. Из (6) следует, что $|S| \leqslant |\Gamma_1(S)|$ для любого $S \subseteq X$; по теореме Холла [1, теорема 8.13] в графе G_1 существует полное паросочетание M_1 множества X с множеством Y_1.

Пусть $Y_2 = \{\, y \in Y_1 \,|\, 2p \leqslant d_{G_1} y \leqslant 2p + 1 \,\}$; $G_2 = (X_2, Y_2, E_2)$ — подграф графа G_1, порожденный множеством Y_2. Так как

$$\max_{x \in X_2} d_{G_2} x \leqslant 2p \leqslant \min_{y \in Y_2} d_{G_2} y,$$

то, согласно следствию теоремы Холла [1, следствие 8.16.1], в G_2 существует полное паросочетание M_2 множества Y_2 с множеством X_2.

По теореме Мендельсона – Далмеджа [1, теорема 8.21] из рёбер M_1 и M_2 можно построить полное паросочетание M' множества X в Y_1, насыщающее все $2p$- и $(2p + 1)$-вершины в графе G_1.

Восстановим граф G, для чего выполним отождествление каждого дочернего набора вершин $y_k^{(1)}, \ldots, y_k^{(p)}$ с возвратом к родительской вершине y. Затем среди рёбер графа G, инцидентных каждой вершине y_k, *выделим* каждое такое ребро (x, y_k), для которого одно из рёбер набора $(x, y_k^{(1)}), \ldots, (x, y_k^{(p)})$ принадлежит M'.

Обозначим множество выделенных рёбер через E', а подграф графа G, порожденный множеством E', через $G' = (X, Y', E')$. Поскольку каждой вершине $x \in X$ инцидентно точно одно ребро из E', а каждой вершине $y \in Y$ не более p рёбер из E', то (8) выполнено.

Для каждой вершины $y \in Y$ выполним действия:

– пусть $\{(x_{i_1}, y), \ldots, (x_{i_k}, y)\}$ — подмножество, образованное в E' рёбрами, инцидентными вершине y;

– присвоим цвет j каждому ребру (x_{i_j}, y) этого подмножества, а также ребру, смежному ребру (x_{i_j}, y); $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant p$.

Для построения требуемой рёберной p-раскраски выполним следующий алгоритм.

Пока имеются вершина $y \in Y$ и два цвета i и j такие, что $d_G y > 2$, $|c(y,i)-c(y,j)| > 1$, **выполним** действия:

начало

- обозначим $E_k = \{e \in E \,|\, \text{цвет ребра } e \text{ равен } k\}; \quad k = 1, \ldots, p;$
- для каждой связной компоненты $H = (X_H, Y_H, E_H)$ подграфа, порожденного в графе G множеством рёбер $E_i \cap E_j$:
  - заметим, что H удовлетворяет условиям леммы 3;
  - построим новую рёберную 2-раскраску для H цветами i и j такую, что для любой вершины y степени больше 2 выполняется неравенство $|c(y,i) - c(y,j)| \leqslant 1$.

конец

В результате получим ребёрную p-раскраску графа G, удовлетворяющую (7)–(8), для которой выполняется следующее условие, равносильное (9): ни в одной вершине $y \in Y$ цвет не представлен более двух раз, если какой-либо другой цвет представлен в ней менее двух раз. Лемма доказана.

3. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПИСАНИЙ

Приведем доказательство теоремы 1.

Необходимость. Пусть для семейства Ω существует непрерывное $(l \times m)$-расписание M. Рассмотрим произвольное подсемейство $\Omega' \subseteq \Omega$ и (l', m')-подматрицу M', образованную в M строками и столбцами, содержащими все предписания из Ω', и обозначим: $p' = \lfloor m'/2 \rfloor$, n'_i — количество ненулевых элементов в столбце $2i$ матрицы M'; $1 \leqslant i \leqslant p'$.

Поскольку каждое 2-элементное предписание из Ω' содержит точно один из своих элементов в одном из столбцов матрицы M' с чётным номером, то $|\Omega'| = n'_1 + \cdots + n'_{p'}$. Из условия бесповторности ненулевых элементов в каждом столбце расписания следует, что $n'_i \leqslant |N(\Omega')|$. Тогда $n'_1 + \cdots + n'_{p'} \leqslant p'|N(\Omega')|$; следовательно, $|\Omega'| \leqslant p'|N(\Omega')|$.

Достаточность. Для двудольного представления $G = (X, Y, E)$ графа, ассоциированного с семейством Ω, выполнены условия леммы 4. Поэтому существуют $(1, p)$-подграф $G' = (X, Y', E')$ графа G и рёберная p-раскраска C графа G, удовлетворяющие (7)–(9).

Рассмотрим индуцированное раскраской C разбиение множества E на подмножества $E_1, \ldots, E_p$, где E_i — множество ребер i-го цвета ($l_i = |E_i|$). Подграф графа G, порожденный множеством ребер E_i, обозначим $G_i = (X_i, Y_i, E_i)$, а подсемейство семейства Ω, ассоциированное с E_i, — через Ω_i; $1 \leqslant i \leqslant p$.

Выделим три важных свойства G_i.

Заметим, прежде всего, что неравенство $d_{G_i} y \geqslant 3$, согласно (9), влечет $d_{G_j} y \geqslant 2$ для всех $j \in P \setminus \{i\}$, где $P = \{1, \ldots, p\}$; отсюда и из тривиальных соотношений

$$d_G y = d_{G_i} y + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} d_{G_j} y \leqslant \Delta(G) = 2p + 1,$$

имеем

$$d_G y = 2p + 1; \quad d_{G_i} y = 3; \quad d_{G_j} y = 2 \quad \forall\, j \in P \setminus \{i\}.$$

Сформулируем первые два свойства.

Свойство 1: $\Delta(G_i) \leqslant 3$ для всех G_i.

Свойство 2: Пусть $y \in Y$. Тогда $(d_G y = 2p + 1) \Leftrightarrow (\exists i : \, d_{G_i} y = 3) \Rightarrow (d_{G_j} y = 2 \;\forall\; j \in P \setminus \{i\})$.

Далее, существование $(1, p)$-подграфа $G' = (X, Y', E')$ и рёберной p-раскраски C графа G, где для каждой вершины $y \in Y'$ цвета рёбер множества E', инцидентных y, различны, означает, согласно (8), что множество $E' \cap E_i$ образует в графе G_i паросочетание множества X_i с Y_i.

Таким образом, каждый G_i является $(2, \leqslant 3)$-графом, удовлетворяющим условиям леммы 1, что позволяет сформулировать *свойство 3: G_i — граф непрерывного расписания.*

Согласно следствию 1, для каждого G_i можно указать такое «правостороннее» («левостороннее») непрерывное расписание, в котором элемент $i \in N$ размещается в 3-м столбце (соответственно в 1-м столбце) в том и только в том случае, когда степень вершины y_i в графе G равна 3.

Удобно доказать следующее «расширенное утверждение»: *для* Ω *существует непрерывное* $l \times (2p+1)$*-расписание, в котором все ненулевые элементы столбца* $2p+1$ *суть* $(\Omega, 2p+1)$*-элементы.*

Доказательство проведем индукцией по p. В случае $p=1$ достаточно предъявить правостороннее непрерывное расписание для Ω.

В качестве индуктивного предположения допустим, что «расширенное утверждение» справедливо при $p' = p-1$: для семейства $\Omega' = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_{p'}\}$ существует непрерывное расписание M', в котором все ненулевые элементы $(2p'+1)$-го столбца есть $(\Omega', 2p'+1)$-элементы. Для каждого из этих элементов a:

- найдется i, $1 \leqslant i \leqslant p'$, для которого $rep_{\Omega_i} a \geqslant 3$;
- согласно свойствам 1–2, $rep_{\Omega_i} a = 2$ для любого $j \in P \setminus \{i\}$; в частности, $rep_{\Omega_p} a = 2$, т.е. a является $(\Omega_p, 2)$-элементом.

В соответствии с леммой 1 и следствием 1 построим для Ω_p левостороннее непрерывное $(l_p \times 3)$-расписание M'', которое содержит:

- в первом столбце — по одному экземпляру каждого из $(\Omega_p, 3)$-элементов и только их; согласно свойству 2, каждый из них является $(\Omega', 2p-1)$-элементом;
- в третьем столбце — по одному экземпляру каждого из $(\Omega_p, 2)$- и $(\Omega_p, 3)$-элементов и только их, — $(\Omega_p, 1)$-элементы в третьем столбце отсутствуют (а $(\Omega_p, 2)$-элементы отсутствуют в первом столбце).

Построим $l \times (2p+1)$-матрицу M, $l = l' + l_p$: в левом-верхнем углу разместим $l' \times (2p'+1)$-матрицу M', в правом-нижнем углу — $(l_p \times 3)$-матрицу M'', все элементы вне этих двух матриц положим равными 0.

Поскольку каждый ненулевой элемент последнего столбца матрицы M' является $(\Omega_p, 2)$-элементом, а каждый ненулевой элемент первого столбца матрицы M'' — $(\Omega_p, 3)$-элементом, то все ненулевые элементы в столбце $2p-1$ матрицы M различны. Поэтому M является непрерывным расписанием для семейства Ω. Первая часть расширенного утверждения доказана. Осталось показать, что M можно преобразовать к виду, где каждый элемент столбца $2p+1$ является $(\Omega, 2p+1)$-элементом.

Множество всех ненулевых элементов последнего столбца матрицы M разобьем на подмножества S_1 и S_2 следующим образом. В S_1 включим все $(\Omega, 2p+1)$-элементы: все $(\Omega_p, 3)$-элементы и те из $(\Omega_p, 2)$-элементов столбца, которые являются одновременно и $(\Omega', 2p-1)$-элементами.

К S_2 отнесем все остальные ненулевые элементы столбца, а именно $(\Omega_p, 2)$-элементы, не являющиеся $(\Omega', 2p-1)$-элементами. Поскольку, как уже отмечалось, $(\Omega_p, 2)$ отсутствуют в первом столбце матрицы M''; по предположению индукции они отсутствуют также и в последнем столбце матрицы M'.

Таким образом, элементы $M_{i,2p+1}$ множества S_2 отсутствуют в столбце $2p-1$ матрицы M: поскольку ненулевые элементы в i-й строке расположены рядом, то $M_{i,2p} \neq 0, M_{i,2p-1} = 0$.

Переместив каждый из этих элементов $M_{i,2p+1}$ в ячейку $M_{i,2p-1}$ (с обнулением ячейки $M_{i,2p+1}$), получим непрерывное расписание, удовлетворяющее «расширенному утверждению». Теорема доказана.

В статье [5] показано, что проверка условий (1) осуществима за полиномиальное время.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 09-01-96504-*р_юг_а и* 07-01-00143-*а*).

Библиографический список

1. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984. 455 с.

2. *Магомедов А.М.* Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 1. С. 65–72.

3. *Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А.* Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989. 328 с.

4. *Магомедов А.М.* Непрерывное расписание для специализированных процессоров без отношения предшествования // Вестн. Моск. энерг. ин-та. Сер. Автоматика, вычислительная техника, информатика. 2009. № 5. С. 14–17.

5. *Магомедов А.М., Сапоженко А.А.* Условия существования непрерывных расписаний длительности пять // Вестн. МГУ. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. 2010. Т. 34, № 1. С. 39–44.

6. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 336 с.