4. *Козырев С. В.* Вейвлет анализ как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. математическая. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158.

5. *Козырев С. В.* p-адические псевдодифференциальные операторы и p-адические вейвлеты // Теор. мат. физ. 2004. Т. 138, № 3. С. 1–42.

6. *Протасов В. Ю., Фарков Ю. А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 10. С. 129–160.

7. *Фарков Ю. А.* Биортогональные диадические вейвлеты на полупрямой // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 6. С. 189–190.

8. *Протасов В. Ю.* Аппроксимация диадическими всплесками // Мат. сборник. 2007. Т. 198, № 11. С. 135–152.

9. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных Абелевых группах // Изв. РАН, Сер. математическая. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.

10. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952.

11. *Shelkovich V. M., Skopina M. A.* p-adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators // J. Fourier Anal. and Appl. 2009. Vol. 15, № 3. P. 366–393. URL: http://arxiv.org/abs/0705.2294.

12. *Shelkovich V. M., Khrennikov A. Yu., Skopina M. A.* p-adic refinable functions and MRA-based wavelets // J. Approx. Th. 2009. Vol. 161, № 1. P. 226–238.

13. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-adic nonorthogonal wavelet bases // Тр. МИАН. 2009. Т. 265. С. 7–18.

14. *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ на нуль-мерных группах и всплесковые базисы // Мат. сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–65.

15. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.

16. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

17. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.

УДК 517.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

З. М. Магомедова

Филиал Российского государственного университета туризма и сервиса в г. Махачкале,
кафедра экономики, бухучета, финансов и аудита,
E-mail: alimn@mail.ru

В статье исследуются асимптотические свойства многочленов $l_n(x)$, ортогональных с весом $e^{-x_j}\Delta t_j$ на произвольных сетках, состоящих из бесконечного числа точек полуоси $[0,\infty)$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лагерра.

Ключевые слова: полином, ортогональная система, сетка, вес, весовая оценка, асимптотическая формула.

About Asymptotic Polynomials, Orthogonal on Any Grids

Z. M. Magomedova

Branch of the Russian State University of Tourism and Service
in Makhachkala,
Chair of Economy, Book Keeping, Finansce and Audit
E-mail: alimn@mail.ru

Asymptotic properties of polynomials orthogonal $l_n(x)$, with weight $e^{-x_j}\Delta t_j$ on any infinite set points from semi-axis $[0,\infty)$ are investigated. Namely an asymptotic formula is proved in which asymptotic behaviour of these polynomials as n tends to infinity together with N is closely related to asymptotic behaviour of the polynomials by Lagerra.

Key words: polynomial, ortogonal system, set, weight, weighted estimate, approximation formula.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $T=\{t_0,t_1,\dots\}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из бесконечного числа различных точек, расположенных на $[0,\infty)$, и таких, что $0=t_0<t_1<t_2\dots$. Рассмотрим также еще одну сетку $X=\{x_0,x_1,\dots\}$, состоящую из бесконечного числа точек x_j, где $x_j=(t_j+t_{j+1})/2$, $j=0,1,\dots$ Через $l_k(x)=l_k(x,T)$, $k=0,1,\dots$ обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке X в следующем смысле $(n,m=0,1,\dots)$:

$$(l_n,l_m)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-x_j}l_n(x_j)l_m(x_j)\Delta t_j=\delta_{nm}, \qquad (1)$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \dots$, причем предполагается, что $\sup\limits_{0\le j<\infty} \Delta t_j < \infty$, $\sup\limits_{0\le j<\infty} t_j = +\infty$.

Обозначим $\delta = \sup\limits_{0\le j<\infty} \Delta t_j$. Для определенности будем считать, что старший коэффициент многочлена $l_n(x)$ положителен, т. е.

$$l_n(x) = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \ldots + k_0, \qquad k_n > 0. \tag{2}$$

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства многочлена $l_n(x)$ при $n, N \longrightarrow \infty$, где $N = 1/\delta$. Всюду в дальнейшем через C, $C(\lambda), \dots$ будут обозначаться разные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров.

Сначала приведем некоторые сведения о многочленах Лагерра. Определим многочлены Лагерра с помощью обобщенной формулы Родрига

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}), \tag{3}$$

где α — произвольное действительное число, и отметим следующие их свойства [1, 2]:

ортонормированность

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}x^\alpha \hat{L}_n^\alpha(x)\hat{L}_m^\alpha(x)\,dx = \delta_{nm}, \qquad \alpha > -1,$$

где $\hat{L}_n^\alpha(x) = (h_n^\alpha)^{-1/2} L_n^\alpha(x)$, $h_n^\alpha = \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}$;

равенства

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{4}$$

$$L_n^{-k} = (-x)^k \frac{(n-k)!}{n!} L_{n-k}^k(x), \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x); \tag{6}$$

весовая оценка

$$|L_n^\alpha(x)| \le C(\alpha) A_n^\alpha(x), \qquad 0 \le x < \infty, \tag{7}$$

где

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} e^{x/2}s^\alpha, & 0 \le x \le 1/s, \\ e^{x/2}s^{\alpha/2-1/4}x^{-\alpha/2-1/4}, & 1/s \le x \le s/2, \\ e^{x/2}[s(s^{1/3}+|x-s|)]^{-1/4}, & s/2 \le x \le 3s/2, \\ e^{x/4}, & 3s/2 \le x, \end{cases} \tag{8}$$

$\alpha > -1$, $s = 4n + 2\alpha + 2$.

При $\alpha = 0$ мы будем писать $A_n(x)$ вместо $A_n^0(x)$ и $L_n(x)$ — вместо $L_n^0(x)$.

Ниже нам также понадобится формула Кристоффеля – Дарбу для многочленов Лагерра [1, § 5.1, с. 110]

$$\Gamma(\alpha+1)K_n^\alpha(x,y) = \sum_{\nu=0}^n \left\{ \binom{\nu+\alpha}{\nu} \right\}^{-1} L_\nu^\alpha(x) L_\nu^\alpha(y) =$$

$$= (n+1)\left\{ \binom{n+\alpha}{n} \right\}^{-1} \frac{L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(y) - L_{n+1}^\alpha(x)L_n^\alpha(y)}{x-y}. \tag{9}$$

Пусть $L^2_{x^\alpha e^{-x}}$ — пространство всех функций f, непрерывных на $[0,\infty)$, для которых $\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}|f(x)|^2\,dx < \infty$. Положим

$$\|f\| = \left(\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}|f(x)|^2\,dx \right)^{1/2}. \tag{10}$$

Тогда, очевидно, что $L^2_{x^\alpha e^{-x}}$ — линейное нормированное пространство с нормой (10).

Пусть далее P_n — множество всех алгебраических полиномов степени не выше n. Очевидно, что если $p_n \in P_n$, то

$$\|p_n'\| \le M_n \|p_n\|, \tag{11}$$

где $M_n = \sup\limits_{p_n \in P_n} \|p_n'\|/\|p_n\|$.

Для случая $\alpha = 0$ П. Туран в 1960 г. получил результат [3]:

$$M_n = \frac{1}{2\sin(\pi/(4n+2))}.$$

А в 2000 г. для $\alpha > -1$ А.И. Аптекаревым, А. Дро и В.А. Калягиным получен результат [4]:

$$M_n = \frac{n}{x_1}[1 + O(1)],$$

где x_1 — ближайший к началу координат ноль функции Бесселя $J_\beta(x)$, $\beta = (\alpha - 1)/2$.

Основные результаты настоящей работы приводятся в разд. 2 (теоремы 1 и 2).

Последовательность многочленов, ортогональных на конечном множестве точек, впервые была введена и исследована П.Л. Чебышевым. В работах А.А. Маркова, Шарлье, М.Ф. Кравчука, Мейкснера, Хана и других изучались системы ортогональных многочленов дискретного переменного, различающиеся выбором сетки и веса. В частности, подробно исследовались разностные свойства дискретных аналогов классических многочленов Эрмита и Лагерра — многочленов соответственно Кравчука и Мейкснера. Дальнейшее развитие теории многочленов, ортогональных на дискретных системах точек, связано с работами Хана, Вебера и Эрдейи, А.Ф. Никифорова, В.Б. Уварова, С.К. Суслова и многих других математиков и физиков. Были получены многочисленные приложения многочленов, ортогональных на дискретных системах точек в генетике, теории кодирования, квантовой механике, математической статистике и т.д. В связи с приложениями указанных многочленов часто возникает вопрос об асимптотических свойствах в том случае, когда степень n растет (вместе с параметром N, где N —величина, обратная максимальному шагу сетки). Целенаправленное его изучение было проведено в работах Шарапудинова И.И. Задача состояла в том, чтобы получить такие оценки для остаточных членов асимптотичеких формул, из которых и известных весовых оценок для классических многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита вытекали бы неулучшаемые по порядку при $n \longrightarrow \infty$ весовые оценки для многочленов Чебышева, Мейкснера и Кравчука, стремясь одновременно к тому, чтобы эти оценки оставались верны при минимальных ограничениях на рост степени n в зависимости от N. В работе [5, § 4.9, с. 88–90] И.И. Шарапудиновым для ортонормированных на равномерной сетке многочленов Мейкснера $m^\alpha_{n,N}(x)$ доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $0 \le \alpha$ — целое, $\lambda, \delta > 0$, $N = 1/\delta$, $x \in [0, \infty)$. Тогда имеет место асимптотичекая формула:*

$$m^\alpha_{n,N}(x) = l^\alpha_{n,N}(x) + v^\alpha_{n,N}(x),$$

для остаточного члена $v^\alpha_{n,N}(x)$ которой при $0 < \delta < 1$, $1 \le n \le \lambda N$ справедлива оценка

$$|v^\alpha_{n,N}(x)| \le C(\alpha,\lambda) A^\alpha_n(x) \sqrt{\frac{n}{N}} n^{-\alpha/2},$$

где $A^\alpha_n(x)$ определена равенством (8).

При $\alpha = 0$ нам удалось перенести эту теорему на произвольный случай.

1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, \infty)$. Тогда, если ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |f(x_j)| \Delta t_j$ сходится и интегралы $\int\limits_0^\infty |f(x)|\,dx$, $\int\limits_0^\infty |f'(x)|\,dx$, $\int\limits_0^\infty |f''(x)|\,dx$ сходятся, то имеет место следующее равенство:*

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_j)\Delta t_j + r(f),$$

в котором для остаточного члена $r(f)$ имеет место следующая оценка:

$$|r(f)| \leq \frac{1}{8}\delta^2 \int\limits_0^\infty |f''(t)|\,dt, \tag{12}$$

где $\delta = \sup\limits_{0\leq j<\infty} \Delta t_j$.

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{j=0}^\infty \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и формулой Ньютона – Лейбница, мы можем записать:

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left[f(x_j) + f'(x_j)(x-x_j) + \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt \right] dx = f(x_j)\Delta t_j + f'(x_j)\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (x-x_j)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt\,dx = f(x_j)\Delta t_j + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt\,dx. \tag{13}$$

Интеграл в равенстве (13) запишем в виде

$$J = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt\,dx = \int\limits_{t_j}^{x_j} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt\,dx + \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt\,dx = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим J_1 :

$$|J_1| = \int\limits_{t_j}^{x_j} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt\,dx = -\int\limits_{t_j}^{x_j} f''(t)\,dt \int\limits_{t_j}^{t} (x-t)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{t_j}^{x_j} (t_j-t)^2|f''(t)|\,dt. \tag{14}$$

Займемся теперь J_2 :

$$|J_2| = \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt\,dx = \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} f''(t)\,dt \int\limits_{t}^{t_{j+1}} (x-t)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1}-t)^2|f''(t)|\,dt. \tag{15}$$

Из (14) и (15) имеем

$$|J| \leq |J_1| + |J_2| \leq \frac{1}{8}\delta^2 \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(t)|\,dt. \tag{16}$$

Тогда из (13) и (16) мы находим

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{j=0}^\infty f(x_j)\Delta t_j + r(f),$$

где

$$|r(f)| = \left| \sum_{j=0}^\infty \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt\,dx \right| \leq \frac{1}{8}\delta^2 \sum_{j=0}^\infty \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(t)|\,dt = \frac{1}{8}\delta^2 \int\limits_0^\infty |f''(t)|\,dt.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для ортонормированного многочлена Лагерра $L_n(x)$ имеет место формула*

$$\sum_{j=0}^\infty e^{-x_j} L_n^2(x_j)\Delta t_j = 1 + r_n,$$

в которой $|r_n| \leq C\delta^2 n$.

Доказательство. Полагая $f(x) = e^{-x}L_n^2(x)$ воспользуемся леммой 1. Тогда

$$1 = \int\limits_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)\,dx = \sum_{j=0}^\infty e^{-x_j}L_n^2(x_j)\Delta t_j + r_n,$$

где $r_n = r(e^{-x}L_n^2(x))$, и стало быть в силу (12)

$$|r_n| \le \frac{1}{8}\delta^2 \int\limits_0^\infty |(e^{-x}L_n^2(x))''|\,dx. \tag{17}$$

Далее в силу (6)

$$(e^{-x}L_n^2(x))'' = e^{-x}L_n^2(x) - 4e^{-x}L_n(x)L_n'(x) + 2e^{-x}L_n'^2(x) + 2e^{-x}L_n(x)L_n''(x) =$$

$$= e^{-x}(L_n(x))^2 - 4e^{-x}L_{n-1}^1(x)L_n(x) + 2e^{-x}(L_{n-1}^1(x))^2 + 2e^{-x}L_n(x)L_{n-2}^2(x).$$

Поэтому в силу весовой оценки (7) получим

$$|(e^{-x}L_n^2(x))''| \le Ce^{-x}((A_n(x))^2 + A_{n-1}^1(x)A_n(x) + (A_{n-1}^1(x))^2 + A_n(x)A_{n-2}^2(x)).$$

Из (8) следует, что $A_n(x)A_{n-2}^2(x) \le C(A_{n-1}^1(x))^2$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty |(e^{-x}L_n^2(x))''|\,dx \le C\int\limits_0^\infty e^{-x}\left[(A_n(x))^2 + A_{n-1}^1(x)A_n(x) + (A_n^1(x))^2\right]\,dx. \tag{18}$$

Исходя из (8) имеем

$$e^{-x}(A_n(x))^2 = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/s, \\ s^{-1/2}x^{-1/2}, & 1/s \le x \le s/2, \\ [s(s^{1/3} + |x-s|)]^{-1/2}, & s/2 \le x \le 3s/2, \\ e^{-x/2}, & 3s/2 \le x, \end{cases}$$

$$e^{-x}A_{n-1}^1(x)A_n^0(x) \le C\begin{cases} s, & 0 \le x \le 1/s, \\ x^{-1}, & 1/s \le x \le s/2, \\ [s(s^{1/3} + |x-s|)]^{-1/2}, & s/2 \le x \le 3s/2, \\ e^{-x/2}, & 3s/2 \le x, \end{cases}$$

$$e^{-x}(A_n^1(x))^2 = \begin{cases} s^2, & 0 \le x \le 1/s, \\ s^{1/2}x^{-3/2}, & 1/s \le x \le s/2, \\ [s(s^{1/3} + |x-s|)]^{-1/2}, & s/2 \le x \le 3s/2, \\ e^{-x/2}, & 3s/2 \le x. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}(A_n(x))^2\,dx = \left(\int\limits_0^{1/s} + \int\limits_{1/s}^{s/2} + \int\limits_{s/2}^{3s/2} + \int\limits_{3s/2}^\infty\right) e^{-x}(A_n(x))^2dx =$$

$$= \int\limits_0^{1/s} dx + \int\limits_{1/s}^{s/2} s^{-\frac12}x^{-\frac12}\,dx + \int\limits_{s/2}^{3s/2} [s(s^{\frac13} + |x-s|)]^{-\frac12}dx + \int\limits_{3s/2}^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{19}$$

Оценим все интегралы.

$$I_1 = \int\limits_0^{1/s} dx = x|_0^{1/s} \le C, \qquad I_2 = \int\limits_{1/s}^{s/2} s^{-\frac12}x^{-\frac12}\,dx = 2s^{-\frac12}x^{\frac12}\Big|_{1/s}^{s/2} \le C,$$

$$I_3=\int\limits_{s/2}^{3s/2}[s(s^{\frac{1}{3}}+|x-s|)]^{-\frac{1}{2}}\,dx=s^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-s/2}^{s/2}[s^{\frac{1}{3}}+|t|]^{-\frac{1}{2}}\,dt=2s^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{s/2}(s^{\frac{1}{3}}+t)^{-\frac{1}{2}}\,dt=4s^{-\frac{1}{2}}\,(s^{\frac{1}{3}}+t)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{s/2}\le C,$$

$$I_4=\int\limits_{3s/2}^{\infty}e^{-\frac{x}{2}}\,dx=-2\,e^{\frac{-x}{2}}\Big|_{3s/2}^{\infty}=2e^{\frac{-3s}{4}}\le C.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-x}(A_n(x))^2\,dx\le C. \tag{20}$$

Аналогично,

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-x}A_n(x)A^1_{n-1}(x)\,dx\le\left(\int\limits_0^{1/s}+\int\limits_{1/s}^{s/2}+\int\limits_{s/2}^{3s/2}+\int\limits_{3s/2}^{\infty}\right)e^{-x}A_n(x)A^1_{n-1}(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/s}s\,dx+\int\limits_{1/s}^{s/2}\frac{dx}{x}+\int\limits_{s/2}^{3s/2}[s(s^{\frac{1}{3}}+|x-s|)]^{-\frac{1}{2}}\,dx+\int\limits_{3s/2}^{\infty}e^{-\frac{x}{2}}\,dx=$$

$$=1+\ln(\frac{s^2}{2})+s^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-s/2}^{s/2}[s^{\frac{1}{3}}+|t|]^{-\frac{1}{2}}\,dt+2e^{\frac{-3s}{4}}=1+\ln(\frac{s^2}{2})+2s^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{s/2}(s^{\frac{1}{3}}+t)^{-\frac{1}{2}}\,dt+2e^{\frac{-3s}{4}}=$$

$$=1+\ln(\frac{s^2}{2})+4s^{-\frac{1}{2}}\,(s^{\frac{1}{3}}+t)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{s/2}+2e^{\frac{-3s}{4}}\le C\ln(n+1). \tag{21}$$

Оценим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-x}(A^1_n(x))^2\,dx=\left(\int\limits_0^{1/s}+\int\limits_{1/s}^{s/2}+\int\limits_{s/2}^{3s/2}+\int\limits_{3s/2}^{\infty}\right)e^{-x}(A^1_n(x))^2dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/s}s^2\,dx+\int\limits_{1/s}^{s/2}s^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}\,dx+\int\limits_{s/2}^{3s/2}[s(s^{\frac{1}{3}}+|x-s|)]^{-\frac{1}{2}}\,dx+\int\limits_{3s/2}^{\infty}e^{-\frac{x}{2}}\,dx=J_1+J_2+J_3+J_4. \tag{22}$$

Третий и четвертый интегралы ограничены константой по всем s. Оценим первый и второй интегралы:

$$J_1=\int\limits_0^{1/s}s^2\,dx=\,s^2x\big|_0^{1/s}=s,\qquad J_2=\int\limits_{1/s}^{s/2}s^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}\,dx=\,-2s^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\Big|_{1/s}^{s/2}\le Cs.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-x}(A^1_n(x))^2dx\le Cn. \tag{23}$$

Сопоставляя (18)–(23), получим $\int\limits_0^{\infty}|(e^{-x}L^2_n(x))''|\,dx\le Cn$. Отсюда и из (17) следует, что

$$|r_n|\le\frac{1}{8}\delta^2\int\limits_0^{\infty}|(e^{-x}L^2_n(x))''|\,dx\le C\delta^2n.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\frac{\delta^2}{8}(1+2M_n)^2<1$. *Тогда для ортонормированного многочлена* (2) *имеет место следующая формула:*

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx=1+R_n,$$

в которой $|R_n| \le \dfrac{\phi_n}{1-\phi_n}$, *где* $\phi_n = \phi_n(\delta) = \dfrac{\delta^2}{8}(1+2M_n)^2$, $M_n = \dfrac{1}{2\sin(\pi/(4n+2))}$.

Доказательство. В силу леммы 1

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} {l_n}^2(x)\,dx = \sum_{j=0}^\infty e^{-x_j} {l_n}^2(x_j)\Delta t_j + R_n, \tag{24}$$

где $R_n = r(e^{-x}{l_n}^2(x))$, и стало быть в силу (12)

$$|R_n| \le \frac{1}{8}\delta^2 \int\limits_0^\infty |(e^{-x}{l_n}^2(x))''|\,dx. \tag{25}$$

Далее,

$$\int\limits_0^\infty (e^{-x}{l_n}^2(x))''\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx - 4\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}'(x)l_n(x)\,dx +$$

$$+2\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n'}^2(x)\,dx + 2\int\limits_0^\infty e^{-x}l_n(x){l_n}''(x)\,dx = I_1 - I_2 + I_3 + I_4. \tag{26}$$

К интегралам I_2, I_3 и I_4 применим неравенство Коши – Буняковского:

$$|I_2| = \int\limits_0^\infty e^{-x}|l_n(x){l_n}'(x)|\,dx \le \left(\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n'}^2(x)\,dx\right)^{1/2}, \tag{27}$$

$$|I_3| = \int\limits_0^\infty e^{-x}|{l_n'}^2(x)|\,dx \le \left(\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n'}^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n'}^2(x)\,dx\right)^{1/2}, \tag{28}$$

$$|I_4| = \int\limits_0^\infty e^{-x}|l_n(x){l_n}''(x)|\,dx \le \left(\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n''}^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{29}$$

Из (26)–(29) и (11) [3, 4] следует , что

$$\int\limits_0^\infty (e^{-x}{l_n}^2(x))''\,dx \le \int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx + 4M_n\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx + 2M_n^2\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx + 2M_n^2\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx + 4M_n\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx + 4M_n^2\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx \le (1+2M_n)^2\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx. \tag{30}$$

Сопоставляя (25) и (30), получим:

$$|R_n| \le \phi_n \int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx. \tag{31}$$

Кроме того, из (24) и (31) следует, что $\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx \le 1 + \phi_n\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}{l_n}^2(x)\,dx \le \frac{1}{1-\phi_n}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* k_n — *старший коэффициент полинома* $l_n(x)$, *а* λ_n — *старший коэффициент полинома Лагерра* $L_n(x)$. *Тогда*

$$\frac{k_n}{\lambda_n} \ge \frac{1}{1+C\delta^2 n}. \tag{32}$$

Доказательство. Как известно [1], минимум суммы $\sum\limits_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} {p_n}^2(x_j)\Delta t_j$ по всевозможным полиномам $p_n(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, доставляет $\dfrac{l_n(x)}{k_n}$, т. е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-x_j} {l_n}^2(x_j)\Delta t_j}{{k_n}^2} \le \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} {p_n}^2(x_j)\Delta t_j.$$

Взяв $p_n(x) = \dfrac{L_n(x)}{\lambda_n}$, получим:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-x_j} {l_n}^2(x_j)\Delta t_j}{{k_n}^2} \le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-x_j} {L_n}^2(x_j)\Delta t_j}{{\lambda_n}^2}.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} {l_n}^2(x_j)\Delta t_j = 1$, приходим к

$$\frac{{k_n}^2}{{\lambda_n}^2} \ge \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} {L_n}^2(x_j)\Delta t_j}.$$

Ввиду леммы 2 имеем:

$$\frac{{k_n}^2}{{\lambda_n}^2} \ge \frac{1}{1 + C\delta^2 n}.$$

Тогда в силу неравенства $(1+h)^{1/2} \le 1 + \dfrac{1}{2}h$, $h \ge -1$, получим (32). Лемма 4 доказана.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $l_n(x)$

Здесь мы получим асимптотическую формулу для многочленов $l_n(x)$, ортонормированных на X в смысле (1).

Теорема 1. *Пусть* $0 < \lambda < 1$, $0 < \delta \le 1$, $N = 1/\delta$, $x \in [0, \infty)$. *Тогда имеет место асимптотическая формула:*

$$l_n(x) = L_n(x) + v_n(x), \tag{33}$$

для остаточного члена которой при $1 \le n \le \lambda N^{2/3}$ *справедлива оценка*

$$|v_n(x)| \le C(\lambda) \frac{n^{3/2}}{N} A_n(x), \tag{34}$$

где

$$A_n(x) = \begin{cases} e^{x/2}, & 0 \le x \le 1/s, \\ e^{x/2} s^{-1/4} x^{-1/4}, & 1/s \le x \le s/2, \\ e^{x/2}[s(s^{1/3} + |x-s|)]^{-1/4}, & s/2 \le x \le 3s/2, \\ e^{x/4}, & 3s/2 \le x, \end{cases} \qquad s = s(n) = 4n+2.$$

Доказательство. Оценим следующий интеграл:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}(v_n(x))^2\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x}(L_n(x) - l_n(x))^2\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} L_n^2(x)\,dx - 2\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) l_n(x)\,dx + \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x)\,dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Ясно, что

$$I_1 = 1, \qquad I_2 = -2\frac{k_n}{\lambda_n}, \qquad I_3 \le 1 + \frac{\phi_n}{1 - \phi_n}.$$

Тогда, учитывая (32) и неравенство $\phi_n \le C_1 n^2\delta^2$,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}(v_n(x))^2\,dx \le 2-2\frac{k_n}{\lambda_n}+\frac{\phi_n}{1-\phi_n} = 2\left(1-\frac{k_n}{\lambda_n}\right)+\frac{\phi_n}{1-\phi_n} \le 2\left(1-\frac{1}{1+C\delta^2 n}\right)+\frac{\phi_n}{1-\lambda} =$$

$$= \frac{2C\delta^2 n}{1+C\delta^2 n}+\frac{\phi_n}{1-\lambda} \le \frac{2C\delta^2 n}{1+C\delta^2 n}+\frac{C_1\delta^2 n^2}{1-\lambda} \le \left(2C+\frac{C_1}{1-\lambda}\right)\delta^2 n^2 \le C(\lambda)\delta^2 n^2.$$

Отсюда и из результатов [1, §7.71, с. 189–190] следует, что

$$|v_n(x)| \le \left(C(\lambda)\delta^2 n^2 \sum_{\nu=0}^n [\hat{L}_\nu(x)]^2\right)^{1/2}. \tag{35}$$

Далее, в силу (4) формулу Кристоффеля – Дарбу (9) можно переписать в виде

$$K_n(t,x) = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+1)(x-t)}[L_{n+1}(x)L^{-1}_{n+1}(t) - L^{-1}_{n+1}(x)L_{n+1}(t)] =$$

$$= (n+1)\left[L_{n+1}(x)\frac{L^{-1}_{n+1}(x)-L^{-1}_{n+1}(t)}{t-x} - L^{-1}_{n+1}(x)\frac{L_{n+1}(x)-L_{n+1}(t)}{t-x}\right].$$

Переходя здесь к пределу при $t \longrightarrow x$ и используя равенство (6), имеем

$$K_n(x,x) = \sum_{\nu=0}^n [\widehat{L}_\nu(x)]^2 = (n+1)\left[-L_{n+1}(x)[L^{-1}_{n+1}(x)]' - L^{-1}_{n+1}(x)[L_{n+1}(x)]'\right] =$$

$$= (n+1)[L_{n+1}(x)L_n(x) + L^{-1}_{n+1}(x)L^1_n(x)]. \tag{36}$$

Сопоставляя (36) с (35), имеем

$$|v_n(x)| \le C(\lambda)\frac{n^{3/2}}{N}[|L_n(x)L_{n+1}(x)| + |L^1_n(x)L^{-1}_{n+1}(x)|]^{1/2}. \tag{37}$$

Оценим здесь многочлены Лагерра с помощью неравенства (7). Заметим, что

$$C_1|A_n(x)| \le |A_{n+1}(x)| \le C_2|A_n(x)|, \qquad n=1,2,\ldots.$$

равномерно относительно $x \in [0,\infty)$. Поэтому из (37) имеем

$$(|L_n(x)L_{n+1}(x)|)^{1/2} \le CA_n(x), \qquad 0 \le x < \infty. \tag{38}$$

Из формулы (5) следует, что $L^{-1}_{n+1}(x) = -\dfrac{x}{n+1}L^1_n(x)$. Следовательно,

$$\left(|L^1_n(x)L^{-1}_{n+1}(x)|\right)^{1/2} = \left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2}|L^1_n(x)|. \tag{39}$$

Покажем, что при всех $x>0$

$$|L^1_n(x)L^{-1}_{n+1}(x)| \le C\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2}A^1_n(x) \le CA_n(x). \tag{40}$$

Воспользуемся формулой (3) и интегральной формулой Коши. Тогда при $x>0$ имеем

$$|L^1_n(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{e^{x-t}t^n}{(x-t)^{n+1}}\frac{t}{x}\,dt\right|,$$

где γ — замкнутый контур, охватывающий точку $t=x$. Составим контур γ из отрезка $t = 5x/6 + i\tau(\tau_{-1} \le \tau \le \tau_1)$ и дуги окружности $|t| = 7x/6$, где τ_{-1} и τ_1 означают точки пересечения прямой $t = 5x/6 + i\tau$ и окружности $|t| = 7x/6$. Будем иметь:

$$|L^1_n(x)| \le \frac{7}{12\pi}\int\limits_\gamma \left|e^{x-t}\left(\frac{t}{x-t}\right)^n\right|\frac{|\,dt|}{|x-t|} \le \frac{1}{6}e^{x/6}7^{n+2} = \frac{49}{6}7^n e^{-x/12}e^{x/4}. \tag{41}$$

При $x \geq (12\ln 7)n$ имеем

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} 7^n e^{-x/12} = \exp\left[\frac{(12\ln 7)n - x}{12} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{n+1}\right] \leq C. \qquad (42)$$

Из (41) и (42) находим

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} |L_n^1(x)| \leq Ce^{x/4} \leq CA_n(x), \qquad x \geq (12\ln 7)n. \qquad (43)$$

Сравнивая (39) и (43) убеждаемся в справедливости оценки (40). Утверждение теоремы вытекает из (37), (38) и (40). □

Сопоставляя (33), (34) с (7), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существует постоянная* $c(\lambda)$ *такая, что*

$$|l_n(x)| \leq C(\lambda)\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{N} + 1\right) A_n(x).$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю И.И. Шарапудинову и М.Ш. Джамалову за поставленную задачу и ряд полезных замечаний.

Библиографический список

1. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
2. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
3. *Turan P.* Remarks on a theorem of Erhard Schmidt // Mathematica. 1960. Vol. 2, № 25. С. 373–378.
4. *Аптекарев А. И., Дро А., Калягин В. А.* Об асимптотике точных констант в неравенствах Маркова – Бернштейна в интегральных метриках с классическим весом // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 1. С. 173–174.
5. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: ДНЦ РАН, 2004.

УДК 519.872

АНАЛИЗ НЕОДНОРОДНЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Ю. И. Митрофанов, Е. С. Рогачко, Е. П. Станкевич

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: MitrophanovYuI@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru, StankevichElena@mail.ru

Рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с несколькими классами требований и групповыми переходами. Для моделирования эволюции данной сети используются цепи Маркова. Приводятся два способа вычисления стационарного распределения сетей обслуживания данного типа. Даются формулы для основных стационарных характеристик сети.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, групповые переходы требований, анализ сетей массового обслуживания, стационарные характеристики сетей обслуживания.

Analysis of Heterogeneous Queueing Networks with Batch Movements of Customers

Yu. I. Mitrophanov, E. S. Rogachko, E. P. Stankevich

Saratov State University,
Chair of Systems Analysis and Automatic Control
E-mail: MitrophanovYuI@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru, StankevichElena@mail.ru

Closed exponential queueing network with different classes of customers and batch movements is considered. To model evolution of given network Markov chains are used. Two approaches to stationary distribution calculation for given type queueing networks are presented. Formulas for basic stationary characteristics are given.

Key words: queueing networks, batch movements of customers, analysis of queueing networks, stationary characteristics of the networks.