УДК 517.997

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЧИСТО МНИМЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Н.М. Махмудов

Нахичеванский государственный университет, Азербайджан,
кафедра информатики
E-mail: nuralimaxmudov1@rambler.ru

В данной работе рассматриваются краевые задачи для нелинейного уравнения Шредингера, когда коэффициентом уравнения является квадратично-суммируемая функция, имеющая квадратично суммируемую производную. При этом доказаны теоремы существования и единственности решения рассматриваемых краевых.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, краевая задача, квадратично-суммируемый коэффициент.

Solvability of Boundary Value Problems for the Schrodinger Equation with Purely Imaginary Coefficient

N.M. Makhmudov

The Nakhichevan State University, Azerbaijan,
Chair of Computer Science
E-mail: nuralimaxmudov1@rambler.ru

The paper examines regional problems for nonlinear Schrodinger equation when factor of the equation is the square-summable function that has a square-summable derivative. In this process, theorems of existence and uniqueness of the solution of the boundary value problems under consideration have been proved.

Key words: nonlinear Schrodinger equation, a boundary value problem, square-summable factor.

ВВЕДЕНИЕ

Начально-краевые задачи для нелинейного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике, теории сверхпроводимости и других областях современной физики и техники [1, 2]. Поэтому изучение начально-краевых задач для нелинейного уравнения Шредингера представляет как теоретический, так и практический интерес. Подобные начально-краевые задачи для нелинейного уравнения Шредингера с ограниченно измеримым коэффициентом ранее изучены в работах [3–6] и др. Однако во многих практических задачах коэффициентами нелинейного уравнения Шредингера, т. е. потенциалами в уравнении Шредингера, оказываются квадратично суммируемые функции. При этом возникает необходимость изучения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера, которому посвящена данная работа. Следует отметить, что задача Коши для уравнения Шредингера со сингулярным коэффициентом ранее была изучена, например, в работах [7, 8].

Пусть $l>0$, $T>0$ — заданные числа, $x\in[0,\,l]$, $t\in[0,\,T]$, $\Omega_t=(0,\,l)\times(0,\,t)$, $\Omega=\Omega_T$. Рассмотрим следующую первую начально-краевую задачу об определении функции $\psi\,(x,\,t)$ из условий:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-v\,(x)\,\psi+ia_1\,|\psi|^2\,\psi=f\,(x,\,t)\,,\quad (x,\,t)\in\Omega, \tag{1}$$

$$\psi\,(x,\,0)=\varphi\,(x)\,,\quad x\in(0,\,l)\,, \tag{2}$$

$$\psi\,(0,\,t)=\psi\,(l,\,t)=0,\quad t\in(0,\,T)\,, \tag{3}$$

где $i^2=-1$, $a_0>0$, $a_1>0$ — заданные вещественные числа, $v(x)$ — измеримая и квадратично суммируемая вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\|v\|_{W_2^1(0,\,L)}\le b,\quad b=\text{const}>0, \tag{4}$$

а функции $\varphi\,(x)$, $f\,(x,\,t)$ — заданные измеримые комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\,l),\quad f\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1}(\Omega). \tag{5}$$

Под решением первой начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера (1)–(3) будем понимать функцию $\varphi(x,\,t)$ из пространства $B_1\equiv C^0\left([0,\,T]\,,\,\overset{\circ}{W}{}_2^2\,(0,\,l)\right)\cup C^1\,([0,\,T]\,,\,L_2\,(0,\,l))$, удовлетворяющую уравнению (1) для почти всех $x\in(0,\,l)$ и для всех $t\in[0,\,T]$, начальному условию (2) для почти всех $x\in(0,\,l)$, краевому условию (3) для почти всех $t\in(0,\,T)$.

Отметим, что подобная начально-краевая задача вида (1)–(3) для нелинейного уравнения Шредингера изучена в работе [4], с ограниченно измеримой функцией $v(x)$, имеющей измеримую ограниченную обобщенную производную первого порядка, когда уравнение Шредингера содержит нелинейное слагаемое с чисто мнимым коэффициентом. В то же время в работе [5] изучена начально-краевая задача вида (1)–(3) с функцией $v(x)$ из класса ограниченных измеримых функций для нелинейного уравнения Шредингера, содержащего нелинейное слагаемое с вещественным коэффициентом. Как видно, в рассматриваемой начально-краевой задаче потенциал $v(x)$ является квадратично суммируемой функцией, имеющей квадратично суммируемую обобщенную производную первого порядка. Этим данная начально-краевая задача отличается от задач, изученных в работах [4, 5]. В то же время даже в случае уравнения Шредингера, содержащего нелинейное слагаемое с чисто мнимым коэффициентом, класс функций $v(x)$ шире классов функций $v(x)$, рассмотренных в работе [4].

Теорема 1. *Пусть функции* $v\,(x)$, $\varphi\,(x)$, $f\,(x,\,t)$ *удовлетворяют условиям* (4), (5). *Тогда начально-краевая задача* (1)–(3) *имеет единственное решение из* B_1 *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|\psi\,(\cdot,\,t)\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\,l)}+\left\|\frac{\partial\psi\,(\cdot,\,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,\,l)}\le M_1\left(\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\,l)}+\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}}(\Omega)+\|\varphi\|^3_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\,l)}+\|f\|^3_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,0}(\Omega)}\right) \quad (6)$$

для всех $t\in[0,\,T]$.

Доказательство. Для доказательства будем использовать метод Галеркина как в работах [4, 5]. Возьмем фундаментальную систему функций $u_m=u_m(x)$, $m=1,\,2,\ldots$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\,l)$ в виде системы собственных функций спектральной задачи

$$-a_0\frac{d^2u_m}{dx^2}=\lambda_m u_m(x), \quad (7)$$

$$u_m(0)=u_m(l)=0,\quad m=1,\,2,\ldots,$$

соответствующих собственным значениям λ_m, $m=1,\,2,\ldots$ Предположим, что собственные функции ортонормированы в $L_2(0,\,l)$ и справедливо неравенство

$$\|u_m\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(D)}\le d_m,\quad m=1,\,2,\ldots, \quad (8)$$

$d_m>0$, $m=1,\,2,\ldots,$ — некоторые постоянные.

Кроме того, как отмечалось в работе [4], эти функции ортогональны в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\,l)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\,l)$.

Согласно методу Галеркина приближения к решению начально-краевой задачи (1)–(3) будем искать в виде $\psi^N(x,\,t)=\sum\limits_{m=1}^{N}c_m^N(t)u_m(x)$, где коэффициенты $c_m^N\,(t)=\left(\psi^N\,(\cdot,\,t)\,,\,u_m\right)_{L_2(0,\,l)}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t},\,u_m\right)_{L_2(0,\,l)}=\left(a_0\frac{\partial\psi^N}{\partial x},\,\frac{du_m}{dx}\right)_{L_2(0,\,l)}+$$

$$+\left(v(\cdot)\psi^N,\,u_m\right)_{L_2(0,\,l)}-\left(ia_1\left|\psi^N\right|^2\psi^N,\,u_m\right)_{L_2(0,\,l)}+f_m(t),\qquad t\in[0,\,T], \quad (9)$$

$$c_m^N(0)=\left(\psi^N(\cdot,\,0),\,u_m\right)_{L_2(0,l)}=(\varphi,\,u_m)_{L_2(0,\,l)},\quad m=1,\,2,\ldots,\,N, \quad (10)$$

$$f_m(t)=(f(\cdot,\,t),\,u_m)_{L_2(0,\,l)},\quad m=1,\,2,\ldots,\,N.$$

Система (9), (10) представляет собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой правая часть уравнений (9) является суммой многочлена относительно $c_m^N(t)$ с постоянными коэффициентами и функций $f_m(t)$, $m=1,\,2,\ldots,\,N$, где $f_m(t)$ — непрерывные функции на $[0,\,T]$, имеющие $\frac{df_m(t)}{dt}$ обобщенные производные из $L_2\,(0,\,T)$. Известно, что эта задача Коши имеет хотя бы одно решение [9]. Для существования решения в целом достаточно установить равномерную ограниченность всевозможных решений уравнений (9) на отрезке $[0,\,T]$. Для установления такой ограниченности докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$\left\|\psi^N(\cdot,\, t)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\,l)} + \left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\, t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,\,l)} \le M_1\left(\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\,l)} + \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} + \right.$$

$$\left. + \|\varphi\|^3_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\,l)} + \|f\|^3_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,0}(\Omega)}\right), \quad \forall\, t\in[0,\, T]\,. \tag{11}$$

Доказательство. Умножим m-е уравнение из (9) на $\bar{c}_m^N(t)$. Полученные равенства просуммируем по m от 1 до N и результат проинтегрируем по интервалу $(0,\, t)$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\psi^N}{\partial\tau}\bar{\psi}^N - a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 - v(x)\left|\psi^N\right|^2 + ia_1\left|\psi^N\right|^4\right]dx\,d\tau = \int\limits_{\Omega} f(x,\,\tau)\bar{\psi}^N(x,\,\tau)\,dx\,d\tau$$

для всех $t\in[0,\, T]$. Если вычесть из этого равенства его комплексное сопряжение, то, используя неравенство $\|\psi^N(\cdot,\, 0)\|^2_{L_2(0,\,l)} \le \|\varphi\|^2_{L_2(0,\,l)}$, нетрудно установить справедливость оценки

$$\left\|\psi^N(\cdot,\, t)\right\|^2_{L_2(0,\,l)} \le M_2\left(\|\psi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right), \quad \forall\, t\in[0,\, T]. \tag{12}$$

Ввиду того что $f\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1}(\Omega)$, функции $f_m(t)$, $m=1,\,2,\ldots,\,N$, имеют обобщенные производные первого порядка из $L_2(0,\, T)$. Поэтому, продифференцировав обе части уравнений (9) по t, имеем

$$\left(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2},\, u_m\right)_{L_2(0,\,l)} = \left(a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x},\, \frac{du_m}{dx}\right)_{L_2(0,\,l)} + \left(v(\cdot)\frac{\partial\psi^N}{\partial t},\, u_m\right)_{L_2(0,\,l)} -$$

$$-\left(ia_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right),\, u_m\right)_{L_2(0,\,l)} + f'_m(t), \qquad m=1,\,N, \quad t\in[0,\, T],$$

где $f'_m(t) = \frac{df_m(t)}{dt}$.

Теперь умножим m-е уравнение из (9) на $\frac{d\bar{c}_m^N(t)}{dt}$. Полученные равенства просуммируем по m от 1 до N и результат проинтегрируем по интервалу $(0,\, t)$. Тогда, вычитая из полученного равенства его комплексное сопряженное, имеем

$$\int\limits_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial\tau}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial\tau}\right|^2 dx\,d\tau + a_1\int\limits_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left|\psi^N\right|^2\bar{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial\tau}\right]dx\,d\tau =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega_t} I_m\left(\frac{\partial f(x,\,\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\bar{\psi}^N(x,\tau)}{\partial\tau}\right)dx\,d\tau. \tag{13}$$

Учитывая, что $a_1>0$ и

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\bar{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t} = 2\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2\right)^2 \ge 0, \tag{14}$$

из (13) имеем

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\, t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,\,l)} \le \left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\, 0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,\,l)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,\tau)}{\partial\tau}\right\|^2_{L_2(0,\,l)} d\tau. \tag{15}$$

Теперь оценим первое слагаемое правой части этого неравенства. С этой целью систему (9) запишем в виде

$$\left(i\frac{\partial\psi^N(\cdot,\, t)}{\partial t},\, u_m\right)_{L_2(0,\,l)} = \left(L\psi^N(\cdot,\, t)\,,\, u_m\right)_{L_2(0,l)} + \left(v(\cdot)\psi^N(\cdot,\, t)\,,\, u_m\right)_{L_2(0,l)} -$$

$$-\left(ia_1\left|\psi^N(\cdot,\, t)\right|^2\psi^N(\cdot,\, t)\,,\, u_m\right)_{L_2(0,l)} + f_m(t), \quad m=1,N, \quad t\in[0,\, T], \tag{16}$$

где $L\psi^N = -a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}$.

При $t = 0$ m-е уравнение из (16) умножим на $\frac{dc_m^N(0)}{dt}$ и полученные уравнения просуммируем по m от 1 до N. В результате справедливо равенство

$$\int_0^l i\left|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,0)}{\partial t}\right|^2 dx = \int_0^l \left[L\psi^N(x,\,0) + v(x)\psi^N(x,\,0) - ia_1\left|\psi^N(x,\,0)\right|^2\psi^N(x,\,0) + f(x,\,0)\right]\frac{\partial\bar{\psi}^N(x,\,0)}{\partial t}dx.$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,\,l)} \le \int_0^l \left|L\psi^N(x,\,0) + v(x)\psi^N(x,\,0) - ia_1\left|\psi^N(x,\,0)\right|^2\psi^N(x,\,0) + f_1(x,\,0)\right|^2 dx.$$

Отсюда нетрудно установить справедливость неравенства

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,\,l)} \le 4\left\|L\psi^N(\cdot,\,0)\right\|^2_{L_2(0,\,l)} + 4\left\|v(x)\psi^N(\cdot,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+4\left\|ia_1\left|\psi^N(\cdot,\,0)\right|^2\psi^N(\cdot,\,0)\right\|^2_{L_2(0,\,l)} + 4\left\|f(\cdot,\,0)\right\|^2_{L_2(0,\,l)}. \tag{17}$$

Ввиду того что $v \in W_2^1(0,\,l)$, имеем

$$\|v\|_{L_\infty(0,\,l)} \le M_1\|v\|_{W_2^1(0,\,l)}. \tag{18}$$

Кроме того, известны следующие неравенства [10]:

$$\left\|\psi^N(\cdot,t)\right\|_{L_\infty(0,l)} \le \beta\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,t)}{\partial t}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(\cdot,\,t)\right\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(0,\,l)}, \quad \forall\ t \in [0,\,T], \tag{19}$$

$$\|f(\cdot,\,t)\|_{L_2(0,l)} \le M_2\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}, \quad \forall\ t \in [\cdot,\,T], \tag{20}$$

где $\beta > 0$, $M_2 > 0$ постоянные, не зависящие от N. В силу неравенств (18)–(20) из (17) получим справедливость неравенства

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 4\left\|L\psi^N(\cdot,\,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + M_3\left\|\psi^N(\cdot,\,0)\right\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} +$$

$$+M_4\left\|\psi^N(\cdot,\,0)\right\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} + M_5\|f\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{0,\,1}(\Omega)}. \tag{21}$$

Используя формулу $\psi^N(x,\,0) = \sum\limits_{k=1}^N \varphi_{1k}u_k$, нетрудно установить неравенства

$$\left\|L\psi^N(\cdot,0)\right\|_{L_2(0,l)} \le M_6\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)}, \tag{22}$$

$$\left\|\psi^N(\cdot,0)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} \le M_7\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}. \tag{23}$$

В силу неравенств (22), (23) из (21) имеем

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le M_8\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0.1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}\right). \tag{24}$$

Если учесть оценку (24) в неравенстве (15), то после применения леммы Гроноулла получим справедливость оценки

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le M_9\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0.1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}\right), \quad \forall\ t \in [0,\,T]. \tag{25}$$

Теперь установим оценку для $\frac{\partial\psi^N}{\partial x}$. С этой целью m-е уравнение из (16) умножим на $\lambda_m \bar{c}_m^N(t)$. Полученные равенства просуммируем по m от 1 до N и результат проинтегрируем по интервалу $(0,\,t)$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\psi^N}{\partial\tau}L\bar{\psi}^N-\left|L\psi^N\right|^2-\left(v(x)\psi^N\right)L\bar{\psi}^N+\left(ia_1\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)L\bar{\psi}^N\right]dx\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{\Omega_t}f(x,\,\tau)L\bar{\psi}^N\,dx\,d\tau,\quad\forall\;t\in[0,\,T].$$

Применяя формулу интегрирования по частям в первом, третьем и четвертом слагаемых левой части, а также в правой части этого равенства и учитывая граничные условия $u_m(0)=u_m(l)=0$, $m=1,\,2,\ldots,\,N$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_t}\left[ia_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial\tau\partial x}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial x}\right]dx\,d\tau-\int\limits_{\Omega_t}\left|L\psi^N\right|^2dx\,d\tau-\int\limits_{\Omega_t}a_0\frac{\partial}{\partial x}\left(v(x)\psi^N\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial x}\,dx\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{\Omega_t}ia_0a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial x}\,dx\,d\tau=\int\limits_{\Omega_t}a_0\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial x}\,dx\,d\tau.$$

Вычитая из последнего равенства его комплексное сопряжение, а затем используя неравенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N\right|^2\bar{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}=2\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left|\psi^N\right|^2\right)^2\geq 0$$

и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\leq\frac{a_0b^2}{2}\int\limits_0^t\left\|\psi^N(x,\,\tau)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}d\tau+\frac{3a_0}{2}\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_\infty(0,l)}d\tau+$$

$$+a_0\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)},\quad\forall\;t\in[0,\,T]\,.\tag{26}$$

В силу неравенств (19), (23) и оценки (12) из (26) имеем

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\leq M_{10}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}+\|f_1\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega)}\right)+M_{11}\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau,\quad\forall\;t\in[0,\,T]\,.$$

Применяя лемму Гронуолла, получим справедливость оценки

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\leq M_{12}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right),\quad\forall\;t\in[0,\,T]\,.\tag{27}$$

Теперь оценим $\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}$. С этой целью m-е уравнение из (16) умножим на $\lambda_m\bar{c}_m^N(t)$ и результат проинтегрируем по x от 0 до l. Тогда получим справедливость равенства

$$\left\|L\psi^N(\cdot,\,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}=\int\limits_0^l\left[i\frac{\partial\psi^N(x,\,t)}{\partial t}-v(x)\psi^N(x,t)+\right.$$

$$\left.+ia_1\left|\psi^N(x,\,t)\right|^2\psi^N(x,\,t)-f_1(x,\,t)\right]L\bar{\psi}^N(x,\,t)\,dx,\quad\forall\;t\in[0,\,T]\,.$$

Применяя неравенства Коши – Буняковского, из этого равенства имеем

$$\left\|L\psi^N(\cdot,\,t)\right\|^2\leq\int\limits_0^l\left|i\frac{\partial\psi^N(\cdot,\,t)}{\partial t}-v(x)\psi^N(\cdot,\,t)+ia_1\left|\psi^N(x,t)\right|^2\psi^N(x,t)-f(x,t)\right|^2dx,\quad\forall\;t\in[0,T].$$

Отсюда следует неравенство

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 4\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} + 4\left\|v(\cdot)\psi^N(\cdot,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+4\left\|a_1\left|\psi^N(\cdot,t)\right|^2\psi^N(\cdot,t)\right\|^2_{L(0,l)_2} + 4\left\|f(\cdot,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}, \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Используя условия на функции $v(x)$, получим

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 4\left(\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} + b^2\left\|\psi^N(\cdot,t)\right\|^2_{L_\infty(0,l)} +\right.$$

$$\left.+a_1^2\left\|\psi^N(\cdot,t)\right\|^6_{L_6(0,l)} + \left\|f(\cdot,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\right), \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{28}$$

В силу неравенства (19) и оценок (12), (25), (27) из (28) следует справедливость оценки

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le M_{13}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^2_2(0,l)} + \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2}(0,l)^6 + \|f\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Omega)} + \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(\Omega)}\right), \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{29}$$

Если использовать формулу для оператора L в неравенстве (29), то получим

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N(\cdot,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le M_{14}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f_1\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^6_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)} + \|f\|^6_{\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(\Omega)}\right), \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{30}$$

Таким образом, используя оценки (12), (21), (27) и (30) получим справедливость оценки (11). Лемма 1 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. С помощью формулы $c_m^N(t) = \left(\psi^N(\cdot,t), u_m\right)_{L_2(0,l)}$ из оценки (11) имеем

$$\sum_{m=1}^N\left|c_m^N(t)\right|^2 + \sum_{m=1}^N\left|\frac{dc_m^N(t)}{dt}\right|^2 \le M_{15}\left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f_1\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)} + \|f\|^3_{\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(\Omega)}\right) \tag{31}$$

для всех $t\in[0,T]$. Из оценки (31) и выше сделанных рассуждений следует, что задача Коши (9), (10) имеет хотя бы одно глобальное решение на отрезке $[0,T]$.

Рассмотрим функции $l_{N,m}(t) = \left(\psi^N(\cdot,t), u_m\right)_{L_2(0,l)}$, $m,N = 1,2,\ldots$ Из оценки (11) следует, что эти функции равномерно ограничены. Кроме того, их производные $\frac{dl_{N,m}(t)}{dt}$ также ограничены на отрезке $[0,T]$, т. е.

$$\max_{0\le t\le T}|l_{N,m}(t)| \le M_{16}, \quad \max_{0\le t\le T}\left|\frac{dl_{N,m}(t)}{dt}\right| \le M_{17}, \quad m,N = 1,2,\ldots, \tag{32}$$

где постоянные $M_{16}>0$, $M_{17}>0$ не зависят от N, m. Кроме того, с помощью неравенства (8) и оценки (11) нетрудно установить справедливость неравенств

$$|l_{N,m}(t+\Delta t) - l_{N,m}(t)| \le M_{18}d_m|\Delta t|^{\frac12}, \qquad \left|\frac{dl_{N,m}(t+\Delta t)}{dt} - \frac{dl_{N,m}(t)}{dt}\right| \le M_{19}d_m|\Delta t|^{\frac12} \tag{33}$$

для всех $t\in[0,T]$. Из (33) следует, что функции $l_{N,m}(t)$ и $\frac{dl_{N,m}(t)}{dt}$ при фиксированном m равностепенно непрерывны на отрезке $[0,T]$, ибо постоянные $M_{18}>0$, $M_{19}>0$ не зависят от m и N. Кроме того, на основе неравенств (32) эти функции равномерно ограничены на отрезке $[0,T]$. Тогда обычным диагональным процессом можем выделить подпоследовательность N_k, $k=1,2,\ldots$, по которой функции $\left\{l_{N_k,m(t)}\right\}$ и $\left\{\frac{dl_{N_k,m}(t)}{dt}\right\}$ будут сходиться равномерно на отрезке $[0,T]$ к непрерывным функциям $l_m(t)$ и $\frac{dl_m(t)}{dt}$ соответственно для каждого $m=1,2,\ldots$

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} l_m(t)u_m(x), \tag{34}$$

которая имеет производную

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{dl_m(t)}{dt}u_m(x). \tag{35}$$

Как и в работах [4, 5, 11] нетрудно проверить, что последовательности $\left\{\psi^{N_k}(x,\,t)\right\}$ и $\left\{\frac{\partial\psi^{N_k}(x,\,t)}{\partial t}\right\}$ равномерно по $t\in[0,\,T]$ слабо сходятся в $L_2(0,\,l)$ к функциям $\psi(x,\,t)$ и $\frac{\partial\psi(x,\,t)}{\partial t}$, определенным формулами (34) и (35) соответственно. Предельные функции $\psi(x,\,t)$, $\frac{\partial\psi(x,\,t)}{\partial t}$ принадлежат пространству $C^0\left([0,\,T],\,L_2(0,\,l)\right)$, т.е. предельная функция $\psi(x,\,t)$ принадлежит пространству $C^1\left([0,\,T],\,L_2(0,\,l)\right)$.

Благодаря оценке (14) из последовательности $\left\{\psi^{N}(x,\,t)\right\}$ при $N=N_k$, $k=1,\,2,\ldots$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится к функции слабо в $W_2^2(0,l)$ для каждого $t\in[0,\,T]$. Для простоты изложения эту последовательность снова обозначим через $\left\{\psi^{N_k}(x,\,t)\right\}$. Используя методику работ [4, 5, 11], можем доказать, что $\psi(x,\,t)$ принадлежит пространству $C^0\left([0,\,T],\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\,l)\right)$. Таким образом, предельная функция $\psi(x,\,t)$ принадлежит пространству B_1. Далее аналогично [4, 5, 11] доказывается, что $\psi(x,\,t)$ является почти всюду решением первой начально-краевой задачи (1)–(3) и для этого решения справедлива оценка (6), которая следует непосредственно из оценки (11) после перехода к пределу на сходящиеся подпоследовательности. Наряду с этим устанавливается и единственность решения задачи.

Теорема 1 доказана. □

Теперь рассмотрим вторую начально-краевую задачу об определении функции $\psi=\psi(x,\,t)$ из условий

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi-v(x)\psi+ia_1\left|\psi\right|^2\psi=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{36}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l), \tag{37}$$

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}=0,\quad t\in(0,T), \tag{38}$$

где $i^2=-1$, $a_0>0$, $a_1>0$ — заданные числа, $v(x)$ удовлетворяет условию (4), а функции $a(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$ удовлетворяют условиям $0<\mu_1\le a(x)\le\mu_0$, $\overset{\circ}{\forall}\,x\in(0,l)$,

$$\varphi\in W_2^2(0,l),\quad \frac{d\varphi(0)}{dx}=\frac{d\varphi(l)}{dx}=0,\quad f\in W_2^{1,1}(\Omega),$$

где μ_0, μ_1 — заданные числа.

Под решением второй начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера (36)–(38) будем понимать функцию $\psi(x)$ из пространства $B_2\equiv C^0\left([0,\,T],\,W_2^2(0,\,l)\right)\cap C^1\left([0,\,T],\,L_2(0,\,l)\right)$, удовлетворяющую уравнению (36) для всех $t\in[0,T]$ и почти всех $x\in(0,l)$, начальному условию (37) для почти всех $x\in(0,l)$, краевому условию (38) для почти всех $t\in[0,T]$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции* $v(x)$, $a(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,\,t)$ *удовлетворяют условиям* (4), (7). *Тогда вторая начальная краевая задача* (36)–(38) *имеет единственное решение из* B_2 *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|\psi(\cdot,\,t)\|_{W_2^2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\psi(\cdot,\,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\le M_{20}\left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}+\|f\|_{W_2^{1,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^3_{W_2^1(0,l)}+\|f\|^3_{W_2^{1,0}(\Omega)}\right)$$

для всех $t\in[0,T]$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 с учетом свойств фундаментальной системы функций $u_m=u_m(x)$, $m=1,\,2,\ldots$ и мультипликативных неравенств для функций, не обязательно равных нулю на границе области.

Библиографический список

1. *Буккель, В.* Теория сверхпроводимости. Основы и приложения / В. Буккель. М., 1975. 361 с.
2. *Воронцов, М.А.* Принципы адаптивной оптики / М.А. Воронцов, В.Н. Шмальгаузен. М., 1985. 336 с.
3. *Искендеров, А.Д.* Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантомеханического потенциала / А.Д. Искендеров, Г.Я. Ягубов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 5. С. 1044–1048.
4. *Ягубов, Г.Я.* Оптимальное управление коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера: дис. … д-ра физ.-мат. наук / Ягубов Г.Я. Киев, 1994. 318 с.
5. *Искендеров, А.Д.* Оптимальное управление нелинейными квантомеханическими системами / А.Д. Искендеров, Г.Я. Ягубов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 12. С. 27–38.
6. *Ягубов, Г.Я.* О вариационном методе решения многомерной обратной задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера / Г.Я. Ягубов, М.А. Мусаева// Изв. АН. Аз. ССР. Сер. Физ.-тех. и мат. науки. 1994. Т. XV, № 5–6. С. 58–61.
7. *Baudouin, L.* Regularity for a Schrödinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control / L. Baudouin, O. Kavian, J.P. Puel // J. Differential Equations. 2005. Vol. 216. P. 188–222.
8. *Cances, E.* Controle optimal bilineare d'uno equation de Schrodinger / E. Cances, C. Le Bris, M. Pilot // C.R. Acad. Sci. Paris. 2000. Vol. 330, № 1. P. 567–571 /controle optimal/.
9. *Понтрягин, Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М., 1982. 332 с.
10. *Ладыженская, О.А.* Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. М., 1973. 408 с.
11. *Искендеров, А.Д.* Определение потенциала в нестационарном уравнении Шредингера / А.Д. Искендеров // Проблемы математического моделирования и оптимального управления: сб. науч. ст. Баку, 2001. С. 6–36.

УДК 514.133+514.17

КОНЕЧНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ 5-КОНТУРЫ РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Л.Н. Ромакина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: romakinaln@mail.ru

На расширенной гиперболической плоскости H^2 проведена классификация конечных замкнутых 5-контуров, выделены их четыре типа, инвариантных относительно фундаментальной группы G плоскости H^2. Доказано, что выпуклые 5-контуры принадлежат двум типам. Внутренность 5-контура первого типа совпадает с плоскостью H^2, 5-контур второго типа может быть составлен из двух простых конечных замкнутых контуров размерности 3 и 4. Его внутренность совпадает с внутренностью составляющего простого 4-контура. Исследованы топологические свойства 5-контуров.

Ключевые слова: расширенная гиперболическая плоскость, тип конечного замкнутого 5-контура, выпуклый конечный замкнутый 5-контур, род вершины 5-контура, особые точки 5-контура.

Finite Closed 5-Loops of Extended Hyperbolic Plane

L.N. Romakina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: romakinaln@mail.ru

There are four types of finite closed 5-loops which are invariant by the fundamental group G and singled out on the extended hyperbolic plane H^2. It is proved that convex 5-loops belong to two types. The interior of the first type 5-loop coincides with the plane H^2. The 5-loop of the second type allows the partition into two simple loops of three and four dimension. Its interior coincides with the interior of the component of the simple 4-loop. The topological 5-loop properties are researched.

Key words:extended hyperbolic plane, type of finite closed 5-loop, convex finite closed 5-loop, sort of 5-loop apex, special points of 5-loop.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматриваются замкнутые конечные *n-контуры* расширенной гиперболической плоскости H^2 как совокупности отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, для которых содержащие их прямые являются изотропными. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют *вершинами*, прямые $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ — *сторонами*, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ — *ребрами* конечного замкнутого n-контура. Ребра, имеющие общую вершину, и вершины, принадлежащие одному ребру, называют *смежными* ребрами и вершинами соответственно.

Точку плоскости H^2 называют *внутренней* относительно n-контура, если она не принадлежит данному контуру, и каждая прямая, проходящая через эту точку, имеет с n-контуром не менее двух общих точек.