Случай 2. $n = 2n_1 + 1$, $n_1 \geq 0$. Тогда

$$\alpha = \sum_{t=0}^{n_1} C_{n_1+1}^{s} \cdot C_{n_1}^{t} = \sum_{t=0}^{n_1} C_{n_1+1}^{t+ind} \cdot C_{n_1}^{n_1-t} = C_{2n_1+1}^{n_1+ind} = C_{2n_1+1}^{n_1+1-ind}. \qquad (6)$$

Далее также рассмотрим два подслучая.

Подслучай 2.1. $k = 2k_1$, $k_1 = 0, 1, \ldots, n_1$. Слово w_k имеет вид $w_{2k_1} = \underbrace{a \ldots a}_{2k_1} \underbrace{baba \ldots b}_{2n_1-2k_1+1}$. Тогда $ind = n_1 - k_1 + 1$. Подставляя в (6), получим $\alpha = C_{2n_1+1}^{n_1+1-ind} = C_n^{k_1} = C_n^{[\frac{k}{2}]}$.

Подслучай 2.2. $k = 2k_1 + 1$, $k_1 = 0, 1, \ldots, n_1$. Слово w_k имеет вид $w_{2k_1+1} = \underbrace{a \ldots a}_{2k_1+1} \underbrace{ba \ldots ba}_{2n_1-2k_1}$. Тогда $ind = k_1 - n_1$. Подставляя в (6), получим $\alpha = C_{2n_1+1}^{n_1+ind} = C_n^{k_1} = C_n^{[\frac{k}{2}]}$.

Таким образом, во всех случаях $\alpha = C_n^{[\frac{k}{2}]}$.$\square$

Библиографический список

1. *Book R.V.* A note on special Thue systems with a single defining relation // Math. Systems Theory. 1983. V. 16. P. 57–60.
2. *Otto F., Wrathall C.* A note on Thue systems with a single defining relation // Math. Systems Theory. 1985. V. 18. P. 135–143.
3. *Ляпин Е.С.* Полугруппы. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 592 с.

УДК 517.984

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА С ПОМОЩЬЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ СЛЕДОВ СТЕПЕНЕЙ ЕГО РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Е.М. Малеко

Магнитогорский государственный технический университет,
кафедра математики
E-mail: emaleko@rambler.ru

Пусть дискретный самосопряженный оператор T действует в сепарабельном гильбертовом пространстве и имеет ядерную резольвенту, причем собственные числа и собственные функции оператора T известны. В работе рассмотрен метод вычисления собственных чисел возмущенного оператора $T + P$, если резольвента этого оператора представима в виде сходящегося ряда Неймана по собственным функциям оператора T. Суть метода заключается в том, что сперва находится набор чисел, сколь угодно точно приближающих следы степеней резольвенты оператора $T + P$. Затем с помощью данного набора составляется и решается система нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных, образующих в ней степенные суммы. Решением системы является единственный с точностью до перестановки набор ненулевых чисел, приближающих сдвинутые на одну и ту же константу λ обратные величины первых собственных значений оператора $T + P$.

Ключевые слова: собственные значения, резольвента, сепарабельное гильбертово пространство.

The Approached Calculation of Eigenvalues of the Discrete Operator by Means of Spectral Traces of Resolvent Degrees

E.M. Maleko

Magnitogorsk State Technical University,
Chair of Mathematics
E-mail: emaleko@rambler.ru

Let a discrete self-adjoint operator T acts in a separable Hilbert space and have the kernel resolvent, and eigenvalues and eigenfunctions of the operator T be known. In the paper the method of calculation of eigenvalues of the perturbed operator $T + P$ is considered. Resolvent of this operator is presented as convergent Neumann series on eigenfunctions of the operator T. The point of the method is that at first is found a set of numbers which approximate traces of the resolvent degrees of the operator $T + P$. Then by means of the given set, the system of nonlinear algebraic equations is constructed and solved. The solution of the system is a set of numbers which approximate first eigenvalues of the resolvent of the perturbed operator $T + P$.

Key words: eigenvalues, resolvent, separable Hilbert space.

Очень часто резольвенту дискретного дифференциального оператора в явном виде получить бывает очень сложно или же вообще невозможно. Однако, если возникла ситуация, когда спектральные следы степеней резольвенты находятся приближенно достаточно легко и точно без знания явного вида самой резольвенты, то этим можно воспользоваться в вычислении первых собственных чисел дифференциального оператора.

Рассмотренный в работе метод имеет сходство с методом вычисления первых собственных чисел оператора Штурма – Лиувилля, предложенным А.А. Дородницыным [1, с. 98–100]. Суть метода А.А. Дородницына заключается в следующем. Пусть дана одна из рассматриваемых в работе [1, с. 77] задач Штурма – Лиувилля со спектральным параметром λ:

$$y'' + (\lambda r(x) + q(x))y = 0, \qquad 0 \le x \le \ell,$$

$$h_1 y'(0) = hy(0), \qquad H_1 y'(\ell) + Hy(\ell) = 0.$$

Здесь функция $q(x)$ предполагается непрерывной и действительнозначной на отрезке $[0,\ell]$, h, h_1, H, $H_1 \in \mathbb{R}$, а коэффициент уравнения $r(x)$ имеет вид $r(x) = r_1(x)x^\alpha$, где $\alpha > -1$, $r_1(x)$ — непрерывная положительная функция на $[0,\ell]$. В этой ситуации собственные значения задачи образуют строго возрастающую последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ с асимптотикой

$$\sqrt{\lambda_n} \sim \pi n \Big/ \int\limits_0^\ell \sqrt{r(x)}\, dx \quad (n \to \infty).$$

Функция Грина $G(x,\xi)$ задачи — функция двух переменных на $[0,\ell] \times [0,\ell]$, удовлетворяющая уравнению

$$\partial^2 G(x,\xi)/(\partial x)^2 + q(x)G(x,\xi) = 0$$

и условиям

$$h_1 \partial G/\partial x(0,\xi) = hG(0,\xi), \quad H_1 \partial G/\partial x(\ell,\xi) + HG(\ell,\xi) = 0,$$

$$\partial G/\partial x(\xi - 0, \xi) - \partial G/\partial x(\xi + 0, \xi) = 1.$$

Если $0 \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, то при любых $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$g_m = \int\limits_0^\ell r(x) G_m(x,x)\, dx = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-m},$$

где $G_1(x,\xi) = G(x,\xi)$, $G_{m+1}(x,\xi) = \int_0^\ell r(t)G_m(x,t)G(t,\xi)\, dt$. Последнюю формулу А.А. Дороницын применял в получении системы из k нелинейных алгебраических уравнений для определения первых собственных значений λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$:

$$\sum_{n=1}^k \lambda_n^{-m} = g_m - \sum_{n=k+1}^\infty \lambda_n^{-m}, \quad m = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

При этом асимптотическое представление собственных значений λ_{k+1}, $\lambda_{k+2}, \ldots$ использовалось для оценки рядов $\sum\limits_{n=k+1}^\infty \lambda_n^{-m}$, $m = 1, 2, \ldots, k$.

1. МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Пусть (см. [2]) дискретный самосопряженный оператор T действует в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$; $S(T) := \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ — спектр оператора T, собственные числа λ_i которого занумерованы по возрастанию модулей с учетом кратностей; $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ — набор соответствующих собственных функций, образующих в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис. Резольвента $R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$ является ядерной с комплексным параметром $\lambda \in \Lambda := \{z \in \mathbb{C} : \ z \ne \lambda_i, \ \lambda_i \in S(T)\}$. Тогда числа $\widetilde{\lambda}_i = \widetilde{\lambda}_i(\lambda) := 1/(\lambda_i - \lambda)$ этого оператора, начиная с некоторого номера, образуют невозрастающую по модулю последовательность. Будем предполагать, что $\mathcal{D}(R_\lambda(T)) \supset \mathcal{D}(T)$ для любого комплексного λ, лежащего внутри Λ.

Пусть P — линейный ограниченный оператор и такой, что $\mathcal{D}(P) = \mathbb{H}$ и $q = ||PR_\lambda(T)|| < 1$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Тогда резольвента $R_\lambda(T+P)$ представима в виде сходящегося ряда Неймана:

$$R_\lambda(T+P) = R_\lambda(T) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k\,.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $|\widetilde{\lambda}_n| > |\widetilde{\lambda}_{n+1}|$. Обозначим через L_n линейную оболочку векторов ψ_i, $i = \overline{1,n}$, (т.е. $L_n := L(\{\psi_i\}_{i=1}^n)$) и так как она замкнута, то L_n — подпространство в $\mathbb{H}$.

Будем в дальнейшем через G обозначать произвольно заданный на $\mathbb{C}$ компакт, причем $\lambda_j \notin G$ и для $\forall\ \lambda \in G$ должно выполняться неравенство $||PR_\lambda(T)|| < 1$. Для $\lambda \in G$ обозначим через $R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$, $R_\lambda^{(n)}(T)$ и $P^{(n)}$ сужения соответственно операторов $R_{\lambda,n}(T+P) := := R_\lambda(T) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k$, $R_\lambda(T)$ и P на L_n, то есть

$$R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P) := R_\lambda^{(n)}(T) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k R_\lambda^{(n)}(T)\left[P^{(n)}R_\lambda^{(n)}(T)\right]^k, \tag{2}$$

$$R_\lambda^{(n)}(T) := \sum_{i=1}^{n}\frac{(\cdot,\psi_i)}{\lambda_i-\lambda}\psi_i, \qquad P^{(n)} := \mathbb{P}_{L_n}P\mathbb{P}_{L_n}, \quad \text{где } \mathbb{P}_{L_n}\mathbb{H} = L_n.$$

Нетрудно доказать, что $R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P) \to R_\lambda(T+P)$ равномерно по $\lambda \in G$. Для этого достаточно сослаться на ограниченность операторов $R_\lambda^{(n)}(T)$ и $R_\lambda(T)$ и на существование достаточно большого $n_0 \in \mathbb{N}$, при котором для $\forall\ \lambda \in G$ и для $\forall\ n \geq n_0$ справедливо неравенство $||P^{(n)}R_\lambda^{(n)}(T)|| < 1$. Тогда оценка по операторной норме из $\mathbb{H}$ суммы (2) при $n \to \infty$ может быть представлена в виде абсолютно сходящегося бесконечного геометрического ряда.

Найдем для произвольного $\lambda \in G$ матричные представления степеней $\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t$, $t = \overline{1,n}$, оператора $R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$. При этом нам понадобятся матричные представления операторов $R_\lambda^{(n)}(T)$ и $P^{(n)}$:

$$AR_\lambda^{(n)}(T) := \operatorname{diag}\{(\lambda_i-\lambda)^{-1}\}_{i=1}^n \qquad \text{и} \qquad AP^{(n)} := \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = (P\psi_i,\psi_j).$$

Тогда из (2) получаем

$$AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P) := AR_\lambda^{(n)}(T)\left[I + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(AP^{(n)}AR_\lambda^{(n)}(T)\right)^k\right] =$$

$$= \operatorname{diag}\{(\lambda_i-\lambda)^{-1}\}_{i=1}^n\left[I + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\{a_{i,j}/(\lambda_j-\lambda)\}_{i,j=1}^n\right)^k\right]. \tag{3}$$

Обозначим через $P^{(\lambda,n)}(x)$ характеристический многочлен матрицы $AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$. Вычислив предварительно по формуле (3) матрицу $AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$, найдем степени $\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t$, $t \in \mathbb{N}$. Известно, что матричные и спектральные следы конечномерных (и ядерных тоже) операторов совпадают (см. [5, теорема Лидского]). Обозначив через $\varphi_t(\lambda,n)$, $t \in \mathbb{N}$, спектральные следы матриц $\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t$, найдем их значения по формуле

$$\varphi_t(\lambda,n) = Sp\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t. \tag{4}$$

Пусть $\{\mu_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ — набор собственных чисел оператора $R_\lambda(T+P)$, занумерованных по убыванию модулей с учетом алгебраической кратности для некоторого $\lambda \in G$. Тогда

$$\varphi_t(\lambda) = Sp\,[AR_\lambda(T+P)]^t = \sum_{i=1}^{\infty}(\mu_i(\lambda))^t < \infty, \qquad t \in \mathbb{N},$$

так как оператор $R_\lambda(T+P)$ — ядерный.

Теперь поступим аналогично тому, как это сделано в [1]. Рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных x_1, $x_2,\ldots,$ x_n:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^m = \varphi_m(\lambda, n)(\approx \varphi_m(\lambda)), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

В отличие от подхода в [1] здесь не оцениваются никак «поправки» вида $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n^{-m}$ (см. формулу (1)).

В [3] и [4] для вычисления спектров дискретных операторов рассматривались системы типа (5):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^m = \varphi_m(0), \qquad m = 1, 2, \ldots, n,$$

причем в этих работах нет возмущений операторов какими-то другими, а в [4] оценена скорость сходимости обратных значений компонент вектор-решения данной системы к соответствующим собственным числам исследуемого оператора.

Из равномерной сходимости последовательности операторов $R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$ к оператору $R_\lambda(T+P)$ по $\lambda \in G$ следует, что для любого конечного натурального t последовательность матриц $\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t$ будет стремиться к бесконечномерной матрице $[AR_\lambda(T+P)]^t$ равномерно по $\lambda \in G$, поэтому, учитывая непрерывность операции взятия матричного следа, будем иметь:

$$\varphi_t(\lambda, n) \to \varphi_t(\lambda) \text{ равномерно по } \lambda \in G. \tag{6}$$

Отсюда, если $\{\mu_i(\lambda, n)\}_{i=1}^n$ — набор собственных чисел оператора $R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$ и $N \in \mathbb{N}$ таково, что $|\lambda_N| < |\lambda_{N+1}|$, то для каждого $n \gg N$ можно подобрать нумерацию чисел $\mu_i(\lambda, n)$, $i = \overline{1, N}$, при которой из (6) и непрерывной зависимости нулей характеристического многочлена произвольной квадратной матрицы с комплексными элементами от коэффициентов этого многочлена получим:

$$\mu_i(\lambda, n) \to \mu_i(\lambda)$$

равномерно по $\lambda \in G$ для $i = \overline{1, N}$.

Для доказательства этого факта достаточно показать, что следы $\varphi_t(\lambda, n)$, $1 \le t \le n$, входят в коэффициенты характеристического многочлена $P^{(\lambda,n)}(x)$ полиномиальным образом. Покажем это. Так как $\{\mu_i(\lambda, n)\}_{i=1}^n$ — набор собственных чисел оператора $R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$, а значит, и матрицы $AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$. Поэтому многочлен $P^{(\lambda,n)}(x)$ можно представить в виде

$$P^{(\lambda,n)}(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \mu_i(\lambda, n)) = x^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sigma_k(n) x^{n-k},$$

где $\sigma_k(n)$ — k-е элементарные симметрические многочлены от чисел $\mu_1(\lambda, n)$, $\mu_2(\lambda, n),\ldots,$ $\mu_n(\lambda, n)$. Из формул Ньютона (см. [6, с. 331]) имеем

$$\sigma_k(n) = (-1)^{k+1}\{\varphi_k(\lambda, n) - \varphi_{k-1}(\lambda, n)\sigma_1(n) + \varphi_{k-2}(\lambda, n)\sigma_2(n) -$$
$$-(-1)^{k+1}\varphi_1(\lambda, n)\sigma_{k-1}(n)\}/k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

что и требовалось. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $N \in \mathbb{N}$ таково, что $|\lambda_N| < |\lambda_{N+1}|$. Тогда для каждого $n \gg N$ подбирается нумерация чисел $\mu_i(\lambda, n)$, $i = \overline{1, N}$, при которой $\mu_i(\lambda, n) \to \mu_i(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in G$. При этом также равномерно по $\lambda \in G$*

$$\nu_i(\lambda, n) = \lambda + 1/\mu_i(\lambda, n) \to \nu_i = \lambda + 1/\mu_i(\lambda)$$

для $i = \overline{1, N}$. Здесь $\{\nu_i\}_{i=1}^N$ — набор первых собственных чисел оператора $T+P$; $\{\mu_i(\lambda, n)\}_{i=1}^n$ — решение системы (5).

В реальных расчетах для получения значительно более точных результатов вместо матриц $AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$ лучше строить матрицы $AR_{\lambda,m}^{(n)}(T+P)$, где $m \gg n$. В этом случае следы степеней и собственные числа матриц $AR_{\lambda,m}^{(n)}(T+P)$ будем обозначать соответственно через $\varphi_t(\lambda, n, m)$ и $\mu_i(\lambda, n, m)$, $t, i = \overline{1, n}$.

2. ПРИМЕР

Рассмотрим действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}= \mathrm{L}_2^{\omega}(-1,1)$, $\omega=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $\alpha+\beta\neq-1$, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, оператор Якоби

$$T:=-(1-x^2)d^2/dx^2-[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]d/dx+I.$$

Областью определения $\mathcal{D}(T)$ этого оператора будем считать множество всех функций $f(\cdot)$, обладающих следующими свойствами: $f(\cdot)$ и $f'(\cdot)$ — абсолютно непрерывны на отрезке $[-1,1]$, $Tf\in\mathbb{H}$. Спектр оператора T составляют числа $\lambda_n=1+n(n+\alpha+\beta+1)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, а соответствующими собственными функциями, образующими в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис, являются $\psi_n=c_n^{-1}P_n^{\alpha,\beta}$, где $P_n^{\alpha,\beta}$ — многочлены Якоби, $c_n=||P_n^{\alpha,\beta}||_H$, $||\cdot||_H=\left(\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}|\cdot|^2dx\right)^{1/2}$ — норма в $\mathbb{H}$.

Пусть P — оператор умножения на функцию $p\in\mathrm{L}_{\infty}(-1,1)$ и $\lambda\neq\lambda_i$, $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, причем $\forall i\ ||p||_{\infty}/|\lambda_i-\lambda|<1$, $||p||_{\infty}=\operatorname*{essential\,sup}_{x\in(-1,1)}|p(x)|$. Тогда $\mathcal{D}(T+P)=\mathcal{D}(T)$ и операторы $R_{\lambda}(T+P):=$ $:=(T+P-\lambda I)^{-1}$ и $R_{\lambda}(T):=(T-\lambda I)^{-1}$ — ядерные резольвенты. Выберем натуральные $n\gg 1$, $m\gg n$ и по формулам

$$AR_{\lambda,m}^{(n)}(T+P):=\operatorname{diag}\{(\lambda_i-\lambda)^{-1}\}_{i=0}^{n}\left[I+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left(\{a_{i,j}/(\lambda_j-\lambda)\}_{i,j=0}^{n}\right)^k\right],$$

$$\varphi_t(\lambda,n,m)=Sp\left[AR_{\lambda,m}^{(n)}(T+P)\right]^t$$

вычислим спектральные следы $\varphi_t(\lambda,n,m)$ матричных операторов $\left[AR_{\lambda,m}^{(n)}(T+P)\right]^t$ для $t=\overline{1,n}$. Здесь $a_{i,j}=(P\psi_i,\psi_j)$, $i,j=\overline{0,n}$. Далее используем значения $\varphi_t(\lambda,n,m)$ в приближенном вычислении первых собственных чисел $\mu_i(\lambda)$, $i=\overline{1,N}$ $(N\ll n)$, оператора $R_{\lambda}(T+P)$ по способу, описанному в теореме 1.

Выберем конкретные значения некоторых параметров: $n=17$, $m=100$, $N=4$, $\lambda=-10$, $\alpha=2$, $\beta=3$, а функция $p(x)=6x^5-2x^2+x-1$. Тогда

$$\lambda_n=1+n(n+6),\qquad n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

$q=||p||_{\infty}/|\lambda_0-\lambda|=10/11<1$. При этом погрешность $||R_{\lambda}(T+P)-R_{\lambda,m}(T+P)||$ вычисления $R_{\lambda}(T+P)$ не будет превосходить $q^{101}/(1-q)<0.00073$.

В математическом пакете Maple 8 найдем спектральные следы $\varphi_t(-10,17,100)$ матричных операторов $\left[AR_{-10,100}^{(17)}(T+P)\right]^t$ для $t=\overline{1,17}$, производя вычисления с числами, имеющими в своей записи сорок значащих цифр в десятичной системе счисления. Получим

$\varphi_1(-10,17,100)=0.3315749973133419812432366793584316585$,

$\varphi_2(-10,17,100)=0.01714743635533317905067378409366613736$,

...

$\varphi_{17}(-10,17,100)=0.1110248832772119713054078767952\cdot 10^{-17}$.

Теперь вычислим четыре $(N=4)$ приближенных первых собственных числа ν_i оператора $T+P$:

$\nu_0\approx-0.05788389531055200566922453247675320238 7$,

$\nu_1\approx 6.677733102307402337695090352838726410 31$,

$\nu_2\approx 15.55086694199288161582890973767213723841$,

$\nu_3\approx 26.44615410541437542656000068078359846532$.

Если взять комплексное число λ, например, $\lambda=11i$, и производить действия с числами, имеющими в своей записи семьдесят значащих цифр, то получаются следующие результаты:

$\nu_0\approx-0.0578838953105520056692245324767532023291206068102696291 18+0.1\cdot 10^{-67}i$,

$\nu_1\approx 6.6777331023074023376950903528387231722212316163145003 25-0.101\cdot 10^{-65}i$,

$\nu_2\approx 15.55086694199288161582890973769465954869958446984109 91+0.4793\cdot 10^{-64}i$,

$\nu_3\approx 26.44615410541437542656000065421030395528119623627951 0-0.43536881\cdot 10^{-60}i$,

причем

$$\triangle\nu_0\{-10,11i\}<0.58\cdot 10^{-37},\qquad \triangle\nu_1\{-10,11i\}<0.33\cdot 10^{-32},$$

$$\triangle\nu_2\{-10,11i\} < 0.23\cdot 10^{-28}, \qquad \triangle\nu_3\{-10,11i\} < 0.27\cdot 10^{-25}.$$

Обозначение $\triangle\nu_j\{-10,11i\}$ представляет собой модуль разности чисел, приближающих одно и то же значение ν_j, но полученных при помощи разных λ: $\lambda = -10$ и $\lambda = 11i$.

Библиографический список

1. *Дородницын А.А.* Избранные научные труды: В 2 т. М., 1997. Т. 1. 396 с.

2. *Малеко Е.М., Королева В.В.* О построении следов «подходящих резольвент» степеней возмущенного оператора // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронеж. весенней мат. школы «Понтрягинские чтения – XV». Воронеж, 2004. С. 141.

3. *Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малеко Е.М.* Об одном способе приближенного нахождения собственных чисел оператора Штурма – Лиувилля // Докл. АН. 1999. Т. 369, № 1. С. 16–18.

4. *Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малеко Е.М., Попов А.Ю.* Корректность метода А.А. Дородницына приближенного вычисления собственных значений одного класса краевых задач // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 4. С. 471–476.

5. *Садовничий В. А.* Теория операторов. 2-е изд. М., 1986. 386 с.

6. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М., 1983. 411 с.

УДК 517.54

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА М.А. ЛАВРЕНТЬЕВА ОБ ОТОБРАЖЕНИИ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА МНОГОУГОЛЬНИК В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ВЕРШИН

Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики
E-mail: Pavel.Shabalin@mail.ru

В работе рассмотрено обобщение обратной задачи М.А. Лаврентьева о конформном отображения полуплоскости на некоторый многоугольник на случай многоугольника с бесконечным числом вершин. Считаются заданными внутренние углы многоугольника при неизвестных вершинах и прообразы этих вершин на вещественной оси. При некоторых ограничениях на величины углов при вершинах и на прообразы вершин, получена формула для искомого отображения.

Ключевые слова: интеграл Шварца – Кристофеля, обратная задача, показатель сходимости.

The M.A. Lavrentiev Inverse Problem on Mapping of Half-Plane Onto Polygon with Infinite Set of Vertices

R.B. Salimov, P.L. Shabalin

Kazan State University of Architecture and Engineering,
Chair of Higher Mathematics
E-mail: Pavel.Shabalin@mail.ru

The authors consider a generalization of the M.A.Lavrentiev inverse problem on a conformal mapping of half-plane onto interiority of a polygon for the case where the set of vertices of this polygon is infinite. We assume that the inner angles at unknown vertices and the image of the vertices under the conformal mapping on the real line are given. Under certain restrictions on values of the angles and on the sequence of points of the real line that are preimages of the vertices the formula for such a mapping is obtained.

Key words: Schwarz – Christoffel inteqral, inverse problem, exponent of convergence.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\{t_k\}$, $\{t_{-k}\}$, $k=\overline{1,\infty}$, — заданные последовательности точек вещественной оси, сходящиеся к $+\infty$, $-\infty$ соответственно, $-\infty < \ldots < t_{-k} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < +\infty$, $t_0 = 0$. Заданы последовательности действительных чисел $\alpha_k \in (0,1)$, $\alpha_{-k} \in (0,1)$, $k=\overline{1,\infty}$, удовлетворяющие условиям $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{-k} = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 1$.

Требуется определить функцию, конформно отображающую полуплоскость $G = \{\zeta = \xi + i\eta, \eta > 0\}$ на многоугольник D_z в плоскости $z = x+iy$, внутренний угол которого при вершине A_k (A_{-k}), отвечающей точке t_k (t_{-k}) действительной оси плоскости ζ, равен $\alpha_k\pi$ $(\alpha_{-k}\pi)$. Смежные углы $\kappa_k\pi = \pi - \alpha_k\pi$, $\kappa_{-k}\pi = \pi - \alpha_{-k}\pi$ стремятся к нулю при $k\to\infty$. Угол наклона к вещественной оси звена A_kA_{k+1} равен $\pi\Big(\beta_0 + \sum\limits_{j=1}^{k}\kappa_j\Big)$, где $\beta_0\pi$ — угол наклона к вещественной оси звена $A_{-1}A_1$. Угол наклона к вещественной оси звена $A_{-k-1}A_{-k}$ равен $\pi\Big(\beta_0 - \sum\limits_{j=1}^{k}\kappa_{-j}\Big)$.