Эти гомотопии показывают, что $\psi_n([\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}})]) = [\varphi_n(\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))] = [\beta_{\overline{m}}]$. Таким образом, сюръективность отображения ψ_n доказана.

Для доказательства инъективности ψ_n предположим, что $\psi_n([\alpha_{\overline{m}'}]) = [\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'})] = [\varepsilon^n_{\overline{m}}]$. Следовательно, $\beta_{\overline{m}} = \varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}) \simeq \varepsilon^n_{\overline{m}}$. Последнее согласно определению 2 означает, что существует $\overline{M} \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}$ такое, что $(\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}))_{\overline{M},\overline{m}} \sim \varepsilon^n_{\overline{M}}(\mathrm{rel}\,\partial I_{\overline{M}})$, что, в свою очередь, означает наличие цепочки просто гомотопных толерантных сфероидов:

$$(\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}))_{\overline{M},\overline{m}} =^{(0)} \beta_{\overline{M},\overline{m}} \approx^{(1)} \beta_{\overline{M},\overline{m}} \approx \ldots \approx^{(t)} \beta_{\overline{M},\overline{m}} = \varepsilon^n_{\overline{M}}. \qquad (16)$$

Эти сфероиды определяют цепочку сфероидов в $\Omega(X)$, $\chi_{n-1}({}^{(j)}\beta_{\overline{M},\overline{m}})$, $j = \overline{0,t}$. Из (16) и определения χ_{n-1} непосредственной проверкой получаем:

$$\alpha_{\overline{M}',\overline{m}'} = \chi_{n-1}({}^{(0)}\beta_{\overline{M},\overline{m}}) \approx \chi_{n-1}({}^{(1)}\beta_{\overline{M},\overline{m}}) \approx \ldots \approx \chi_{n-1}({}^{(t)}\beta_{\overline{M},\overline{m}}) = (\varepsilon_{\varepsilon_1})^n_{\overline{M}}.$$

Это означает, что $[\alpha_{\overline{m}'}] = [(\varepsilon_{\varepsilon_1})^n]$. Таким образом, инъективность ψ_n доказана.

Библиографический список

1. *Zeeman E. C.* The topology of the brain and visual perception // The topology of 3-manifolds and related topics. New Jersey, 1962. P. 240–256.
2. *Небалуев С. И.* Гомологическая теория толерантных пространств: учеб. пособие. Саратов, 2006. 111 с.
3. *Небалуев С. И.* Высшие гомотопические группы толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2003. Вып. 2. С. 15–30.

УДК 517.984

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА А. А. ДОРОДНИЦЫНА ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ НА СЛУЧАЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. М. Малеко

Магнитогорский государственный технический университет,
кафедра математики
E-mail: emaleko@rambler.ru

Пусть A — самосопряженный дискретный оператор с простым спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ и имеющий там ядерную резольвенту, B — самосопряженный и ограниченный в $\mathbb{H}$ оператор. Тогда можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, что собственные числа и собственные функции возмущенного оператора $A + \varepsilon B$ будут вычисляться по методу А. А. Дородницына.

Ключевые слова: гильбертово пространство, возмущенный оператор, спектр.

Generalization of Method A. A. Dorodnicyn Close Calculation of Eigenvalues and Eigenvectors of Symmetric Matrices on Case of Self-Conjugate Discrete Operators

E. M. Maleko

Magnitogorsk State Technical University,
Chair of Mathematics
E-mail: emaleko@rambler.ru

Let the discrete self-conjugate operator A operates in separable Hilbert space $\mathbb{H}$ and has the kernel resolvent with simple spectrum. Self-conjugate and limited operator B operates also in $\mathbb{H}$. Then it is possible to find such number $\varepsilon > 0$, that eigenvalues and eigenfunctions of the perturbation operator $A+\varepsilon B$ will be calculated on a method of Dorodnicyn.

Key words: Hilbert space, perturbation operator, spectrum.

Часто при решении краевых задач важно знать не только их собственные числа, но и собственные функции. А. А. Дородницын разработал [1, с. 180–181] метод вычисления собственных чисел и векторов матриц вида

$$C(\varepsilon) = A + \varepsilon B,$$

где A, B, $C(\varepsilon)$ — симметричные квадратные матрицы размера $n \times n$, $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Собственные числа $\lambda_i = \lambda_i(0)$ и вектора $x_i = x_i(0)$ матрицы A предполагаются известными.

Метод заключается в сведении системы уравнений

$$(A + \varepsilon B)x_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon)x_i(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n},$$

на вычисление собственных чисел $\lambda_i(\varepsilon)$ и векторов $x_i(\varepsilon)$ к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $\lambda_i(\varepsilon)$ и $x_i(\varepsilon)$. Систему ОДУ можно решать любыми из известных методов и, в частности, численными методами, причем в [1, с. 180–181] автор продемонстрировал применение метода Эйлера и его модификации. Возникает естественный интерес к возможности обобщения данного подхода с конечномерного на бесконечномерный случай, то есть об его использовании для нахождения собственных чисел и собственных функций самосопряженных дискретных операторов [1, с. 180–181].

1. МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть A — самосопряженный дискретный оператор с простым спектром, который действует в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве (СГП) $\mathbb{H}$ и имеет там ядерную резольвенту, B — ограниченный, самосопряженный оператор в $\mathbb{H}$ и такой, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и класс операторов

$$\mathfrak{C}_{\varepsilon_0} := \{C(\varepsilon) := A + \varepsilon B \mid 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}, \tag{1}$$

где $C(\varepsilon)$ — самосопряженный дискретный оператор с простым спектром.

Будем предполагать, что известны собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(0)$, $i \in \mathbb{N}$, и соответствующие собственные функции $x_i = x_i(0)$ оператора A, причем числа λ_i занумерованы по возрастанию их модулей. Собственные функции x_i обладают свойством $(x_i, x_j) = \delta_{i,j}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, а их совокупность $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ пусть образует в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис (ОНБ). Далее покажем, что если $\lambda_i(\varepsilon) \in \mathbb{C}^1([0,\varepsilon_0])$ и $x_i(\varepsilon) \in \mathfrak{F}([0,\varepsilon_0],\mathbb{H})$ действуют как функции параметра ε, то для вычисления собственных чисел $\lambda_i(\varepsilon)$ и собственных функций $x_i(\varepsilon)$ оператора $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$ применим метод А. А. Дородницына [1, с. 180–181]. Под множеством $\mathfrak{F}([0,\varepsilon_0],\mathbb{H})$ будем понимать совокупность всех функций $y(\cdot)$, дифференцируемых на отрезке $[0,\varepsilon_0]$ по Фреше со значениями в $\mathbb{H}$ и таких, что для любого $v \in [0,\varepsilon_0]$

$$\lim_{w\to v}\left\|\frac{dy(v)}{d\varepsilon} - \frac{dy(w)}{d\varepsilon}\right\|_{\mathbb{H}} \to 0, \qquad A\frac{dy(v)}{d\varepsilon} = \frac{dAy(v)}{d\varepsilon}, \qquad B\frac{dy(v)}{d\varepsilon} = \frac{dBy(v)}{d\varepsilon},$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{H}$.

Приведем суть метода А. А. Дородницына [1, с. 180–181]: «...Один из методов определения собственных чисел и векторов основан на теории возмущений, т. е. разложении этих величин в ряды по степеням ε. Однако применение теории возмущений ограничивается достаточно малыми значениями ε, так как при некоторых значениях ε ряды становятся расходящимися, хотя на пути от $\varepsilon = 0$ до данного значения ε собственные числа и векторы, рассматриваемые как функции параметра ε, не имеют особенностей. Но даже и в этом случае, если ряд сходится, вычисление большого числа членов может оказаться очень трудоемким.

Уравнению для собственных чисел и собственных векторов можно сопоставить эквивалентную систему дифференциальных уравнений...».

Приведем метод для случая произвольного оператора $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$. Рассмотрим для любого фиксированного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ бесконечную систему уравнений на собственные значения $\lambda_i(\varepsilon)$ и нормированные собственные функции $x_i(\varepsilon)$:

$$(A + \varepsilon B)\, x_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon)x_i(\varepsilon), \quad (x_i(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = 1, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) по ε, будем иметь

$$(A + \varepsilon B)\,\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} + Bx_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon)\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} + x_i(\varepsilon)\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \qquad \left(\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_i(\varepsilon)\right) = 0. \tag{3}$$

Для произвольно взятого $i \in \mathbb{N}$ получаем из (3) бесконечную систему равенств

$$\left((A+\varepsilon B)\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} + Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)\right) = \left(\lambda_i(\varepsilon)\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} + x_i(\varepsilon)\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon)\right), \qquad k=1,2,3,\ldots$$

Отсюда имеем

$$\left(\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \lambda_k(\varepsilon)x_k(\varepsilon)\right) + (Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) = \lambda_i(\varepsilon)\left(\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon)\right) + (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))\,\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad k=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

Из (4) для $k=i$ получаем

$$\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} = (Bx_i(\varepsilon), x_i(\varepsilon))\,, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

а для $k \neq i$

$$(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) = (\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))\left(\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon)\right) + (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))\,\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \tag{6}$$

Поделим (6) на $(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))$ и умножим на $x_k(\varepsilon)$:

$$\frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))}x_k(\varepsilon) = \left(\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon)\right)x_k(\varepsilon) + x_k(\varepsilon)\frac{(x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))}\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \tag{7}$$

Подставляем в (7) вместо $d\lambda_i(\varepsilon)/d\varepsilon$ правую часть из (5):

$$\frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))}x_k(\varepsilon) = \left(\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon)\right)x_k(\varepsilon) + \frac{(Bx_i(\varepsilon), (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))x_i(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))}x_k(\varepsilon),$$

откуда

$$x_k(\varepsilon)\frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon) - (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))x_i(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))} = \left(\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon)\right)x_k(\varepsilon). \tag{8}$$

Суммируем (8) по k от 1 до ∞, исключая случай $k=i$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon) - (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))x_i(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))}x_k(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon)\right)x_k(\varepsilon)$$

(штрих ($'$) означает, что $k \neq i$). Учитывая, что скалярное произведение $(dx_i(\varepsilon)/d\varepsilon, x_i(\varepsilon))$ равно нулю для любого натурального i совместно с базисностью в $\mathbb{H}$ набора $\{x_k(\varepsilon)\}$, из последнего равенства получаем:

$$\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon) - (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))x_i(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))}x_k(\varepsilon). \tag{9}$$

Докажем базисность набора $\{x_k(\varepsilon)\}$ в $\mathbb{H}$.

Случай I. Для $k \neq i$ из формулы (6), поменяв местами i и k, имеем

$$(Bx_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = (\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon))\left(\frac{dx_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_i(\varepsilon)\right) + (x_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon))\,\frac{d\lambda_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \tag{10}$$

Из самосопряженности оператора B следует равенство

$$(Bx_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = (x_k(\varepsilon), Bx_i(\varepsilon)),$$

а из действительности СГП $\mathbb{H}$ —

$$(x_k(\varepsilon), Bx_i(\varepsilon)) = (Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)).$$

Тогда из (10) с учетом последних двух равенств получим:

$$(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) = (\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon))\left(\frac{dx_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_i(\varepsilon)\right) + (x_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon))\,\frac{d\lambda_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \tag{11}$$

Вычтем из равенства (11) равенство (6), используя свойство скалярного произведения $(a,b)=(b,a)$ в действительном СГП $\mathbb{H}$:

$$0=(\lambda_k(\varepsilon)-\lambda_i(\varepsilon))\,\frac{d}{d\varepsilon}\,(x_k(\varepsilon),x_i(\varepsilon))+(x_k(\varepsilon),x_i(\varepsilon))\left(\frac{d\lambda_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}-\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right),$$

откуда

$$0=\frac{d}{d\varepsilon}\Big[\,(\lambda_k(\varepsilon)-\lambda_i(\varepsilon))\,(x_k(\varepsilon),x_i(\varepsilon))\,\Big].$$

Проинтегрируем последнее дифференциальное равенство по всему отрезку $[0,\varepsilon_0]$:

$$(\lambda_k(\varepsilon)-\lambda_i(\varepsilon))\,(x_k(\varepsilon),x_i(\varepsilon))=C.$$

Учитывая, что $(x_k(0),x_i(0))=\delta_{ki}$, $(\lambda_k(\varepsilon)-\lambda_i(\varepsilon))\neq 0$, $k\neq i$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, получим $C=0$. Поэтому для любого ε из $[0,\varepsilon_0]$ выполняется равенство $(x_k(\varepsilon),x_i(\varepsilon))=0$, $k\neq i$.

Случай II. Для $k=i$ и $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ из (2), (3) имеем систему

$$\begin{cases}0=\dfrac{d}{d\varepsilon}(x_i(\varepsilon),x_i(\varepsilon)),\\ (x_i(0),x_i(0))=1.\end{cases}$$

Интегрируя дифференциальное равенство системы по всему отрезку $[0,\varepsilon_0]$, получим $\big(x_i(\varepsilon),x_i(\varepsilon)\big)=$ $=C_1$, откуда с учетом второго равенства системы $C_1=1$. Поэтому $\big(x_i(\varepsilon),x_i(\varepsilon)\big)=1$ для любого $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ и $i\in\mathbb{N}$. Таким образом, $\big(x_i(\varepsilon),x_k(\varepsilon)\big)=\delta_{ik}$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, в результате (9) перепишется в виде

$$\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}={\sum_{k=1}^{\infty}}'\,\frac{(Bx_i(\varepsilon),x_k(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon)-\lambda_k(\varepsilon))}x_k(\varepsilon),\quad i\in\mathbb{N}.\tag{12}$$

А так как $\{x_i(0)\}_{i=1}^{\infty}$ — ОНБ в $\mathbb{H}$, то и $\{x_i(\varepsilon)\}_{i=1}^{\infty}$ — ОНБ в $\mathbb{H}$ для любого $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Докажем это. Так как резольвента $R_\lambda(A)$ $(\lambda\neq\lambda_i,\ \forall i)$ — ядерный оператор, B — ограниченный оператор, то функциональный ряд в правой части формулы (12) сильно сходится в $\mathbb{H}$ на отрезке $[0,\varepsilon_0]$ для каждого $i\in\mathbb{N}$ и мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом. Тогда в силу почленной интегрируемости этого ряда на $[0,\varepsilon_0]$ получаем формулы

$$x_i(\varepsilon)=x_i(0)+{\sum_{k=1}^{\infty}}'\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{(Bx_i(t),x_k(t))}{(\lambda_i(t)-\lambda_k(t))}x_k(t)dt,\quad\forall\,\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]\quad\forall\,i\in\mathbb{N},\tag{13}$$

из которых с учетом $\big(x_i(\varepsilon),x_k(\varepsilon)\big)=\delta_{ik}$ следует, что для любого $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ $\{x_i(\varepsilon)\}_{i=1}^{\infty}$ — базис Рисса, причем ортонормированный.

Таким образом, системе уравнений (2) на собственные числа $\lambda_i(\varepsilon)$ и собственные функции $x_i(\varepsilon)$ оператора $C(\varepsilon)\in\mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$ можно сопоставить систему дифференциальных уравнений (5), (12). Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Система уравнений (2) на собственные числа $\lambda_i(\varepsilon)$ и собственные функции $x_i(\varepsilon)$ оператора $C(\varepsilon)\in\mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$ (см. (1)) на отрезке $[0,\varepsilon_0]$ эквивалентна системе дифференциальных уравнений (5), (12) на том же отрезке, если $\lambda_i(\varepsilon)\in\mathbb{C}^1([0,\varepsilon_0])$ и $x_i(\varepsilon)\in\mathfrak{F}([0,\varepsilon_0],\mathbb{H})$ как функции параметра ε. При этом для любого $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ система функций $\{x_i(\varepsilon)\}_{i=1}^{\infty}$ — ОНБ в $\mathbb{H}$.*

В следующей лемме выделяется класс операторов, для которых автоматически выполняются условия леммы 1.

Лемма 2. *Пусть оператор $C(\varepsilon):=A+\varepsilon B$ действует в СГП $\mathbb{H}:=L_2^{\omega}(a,b)$, где (a,b) — конечномерный или бесконечномерный промежуток, $\|\cdot\|^2:=\int_a^b|\cdot|^2\omega(t)\,dt$, $\omega(t)$ — весовая (неотрицательная) функция на (a,b), A — самосопряженный дискретный дифференциальный оператор второго порядка с ядерной резольвентой, область определения которого состоит из всех функций f, абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными на любом отрезке $[\alpha,\beta]$ из (a,b), B — оператор умножения на вещественнозначную функцию $p\in L_\infty(a,b)$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, причем число ε_0 такое, что $\|B\|\le\dfrac{1}{2\varepsilon_0}\min\limits_{i\neq j}|\lambda_i(0)-\lambda_j(0)|$.*

Тогда для любого номера $i\in\mathbb{N}$ будем иметь $\lambda_i(\varepsilon)\in\mathbb{C}^1([0,\varepsilon_0])$ и $x_i(\varepsilon)\in\mathfrak{F}([0,\varepsilon_0],\mathbb{H})$.

Доказательство. Из свойств оператора A с учетом нормированности его собственных функций $x_i(0)$, $i \in \mathbb{N}$, имеем, что $\{x_i(0)\}_{i=1}^{\infty}$ — ОНБ в $\mathbb{H}$. К тому же, из свойств оператора B следует, что для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ имеем $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$. А из включения $Bx_i(\varepsilon) \in \mathbb{H}$ и разложения

$$Bx_i(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} (Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) x_k(\varepsilon)$$

ясно, что найдется такое число $B_1 > 0$, для которого выполняются неравенства $|(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))| \leq B_1$ для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и всех $(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тогда из (12) получаем оценку

$$\left\| \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right\| \leq B_1 \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{|\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon)|} < \infty, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad i \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Из равенства (5) видно, что для любого $i \in \mathbb{N}$ функция $\lambda_i(\varepsilon)$ имеет ограниченную производную $\dfrac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ в каждой точке $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, поэтому $\lambda_i(\varepsilon)$ непрерывна на $[0, \varepsilon_0]$. Тогда сумма в (14) является также непрерывной функцией переменной ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$.

Для любых u и v из $[0, \varepsilon_0]$ справедливо неравенство

$$\|x_i(u) - x_i(v)\| \leq \|x_i(u)\| + \|x_i(v)\| = 2,$$

поэтому из (14) получаем

$$\left\| \frac{dx_i(u)}{d\varepsilon} - \frac{dx_i(v)}{d\varepsilon} \right\| \leq 2B_1 \Big| \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{|\lambda_i(u) - \lambda_k(u)|} - \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{|\lambda_i(v) - \lambda_k(v)|} \Big|.$$

Следовательно, для любого $v \in [0, \varepsilon_0]$ и любого $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\lim_{w \to v} \left\| \frac{dx_i(v)}{d\varepsilon} - \frac{dx_i(w)}{d\varepsilon} \right\| \to 0.$$

Условия же

$$A \frac{dx_i(v)}{d\varepsilon} = \frac{dAx_i(v)}{d\varepsilon}, \quad B \frac{dx_i(v)}{d\varepsilon} = \frac{dBx_i(v)}{d\varepsilon}, \quad v \in [0, \varepsilon_0] \quad i \in \mathbb{N},$$

выполнимы ввиду представления операторов A и B. Отсюда $x_i(\varepsilon) \in \mathfrak{F}([0, \varepsilon_0], \mathbb{H})$, $i \in \mathbb{N}$.

Из дифференцируемости (по Фреше) функций $x_i(\varepsilon)$ на $[0, \varepsilon_0]$ и формулы (5) следует непрерывность функций $\dfrac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ на этом же отрезке. Поэтому $\lambda_i(\varepsilon) \in \mathbb{C}^1([0, \varepsilon_0])$, $i \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

Для того чтобы использовать компьютер в вычислениях по полученным формулам, необходимо выполнение следующих условий:

1) знак ∞ в формулах (5) и (12) поменять на достаточно большое натуральное n;

2) найти матричные представления MA_n, MB_n сужений A_n, B_n самосопряженных операторов A, B на линейное подпространство $\mathfrak{L}_n := L(x_1(0), \ldots, x_n(0)) \subset \mathbb{H}$, а тем самым и матричное представление $MC_n(\varepsilon_0) = MA_n + \varepsilon_0 MB_n$ сужения $C_n(\varepsilon_0)$ самосопряженного оператора $C(\varepsilon_0) = A + \varepsilon_0 B$ на $\mathfrak{L}_n$;

3) выбрать натуральное m таким, чтобы шаг $h = \varepsilon_0 / m$ был достаточно малым положительным числом;

4) использовать следующие обозначения:

• $\lambda_{\bar{i}}^{0}$, $i = \overline{1,n}$, и $x_{\bar{1}}^{0} = (1,0,0,\ldots,0)^t$, $x_{\bar{2}}^{0} = (0,1,0,\ldots,0)^t$, $x_{\bar{3}}^{0} = (0,0,1,\ldots,0)^t$, $\ldots$, $x_{\bar{n}}^{0} = (0,0,0,\ldots,1)^t$ — собственные числа и вектора матрицы $MA_n \equiv MC_n(0) = MA_n + 0 \cdot MB_n$ (ясно, что $\lambda_{\bar{i}}^{0} = \lambda_i(0) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$);

• $\lambda_{\bar{i}}^{m}$ и $x_{\bar{i}}^{m}$ — приближенные собственные числа и собственные вектора матрицы $MC_n(\varepsilon_0)$;

• $\lambda_{\bar{i}}^{\nu}$ и $x_{\bar{i}}^{\nu}$, $i = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{1,m-1}$, — промежуточные числа и вектора, которые вместе с $\lambda_{\bar{i}}^{m}$ и $x_{\bar{i}}^{m}$ находятся любым из линейных одношаговых или многошаговых численных методов решения дифференциальных уравнений;

• $\lambda_i(n,\varepsilon)$ и $x_i(n,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, — собственные числа и функции оператора $C_n(\varepsilon)$, действующего в $\mathfrak{L}_n$.

Точные значения собственных чисел $\lambda_i(n,\varepsilon)$ и собственных функций $x_i(n,\varepsilon)$ оператора $C_n(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ вычисляются с учетом условия 1) из системы

$$\frac{d\lambda_i(n,\varepsilon)}{d\varepsilon} = (Bx_i(n,\varepsilon), x_i(n,\varepsilon)), \quad i=\overline{1,n}, \tag{15}$$

$$\frac{dx_i(n,\varepsilon)}{d\varepsilon} = {\sum_{k=1}^{n}}' \frac{(Bx_i(n,\varepsilon), x_k(n,\varepsilon))}{(\lambda_i(n,\varepsilon)-\lambda_k(n,\varepsilon))} x_k(n,\varepsilon), \quad i=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Число n выбирается достаточно большим, чтобы при каждом $\delta \in [0,\varepsilon_0]$ оператор $C_n(\delta)$ имел простой спектр (спектры оператора $C_n(\delta)$ и соответствующей матрицы $MC_n(\delta)$ совпадают). Тогда, уменьшая шаг $h=\varepsilon_0/m$ (m при этом увеличивается) для получения более качественных аппроксимаций по одному из численных методов решения системы (15), (16), будем иметь следующие приближения:

$$\lambda_i(\varepsilon_0) \approx \lambda_i(n,\varepsilon_0) \approx \lambda_{\bar{i}}^{m}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{17}$$

$$x_i(\varepsilon_0) \approx x_i(n,\varepsilon_0) \approx X_{\bar{i}}^{m}(n,\varepsilon_0) := \sum_{j=1}^{n} x_{\bar{i}j}^{m} \cdot x_j(0), \qquad i=\overline{1,n}, \tag{18}$$

где $x_{\bar{i}j}^{m}$, $j=\overline{1,n}$, — компоненты вектора $x_{\bar{i}}^{m}$.

Таким образом, увеличивая n и m (при этом величина шага $h=\varepsilon_0/m$ будет уменьшаться) без учета вычислительной погрешности по вышеуказанному способу, можно добиться получения таких чисел $\lambda_{\bar{i}}^{m}$ и функций $X_{\bar{i}}^{m}(n,\varepsilon_0)$, которые как угодно мало отличаются соответственно по модулю и по норме от искомых собственных чисел $\lambda_i(\varepsilon_0)$ и собственных функций $x_i(\varepsilon_0)$ оператора $C(\varepsilon_0)$, $i=\overline{1,n}$. Доказанный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и $n \gg 1$ таково, что при каждом $\delta \in [0,\varepsilon_0]$ оператор $C_n(\delta)$ (или соответствующая матрица $MC_n(\delta)$) имеет простой спектр. Тогда для приближенного вычисления первых собственных чисел $\lambda_i(\varepsilon)$ и функций $x_i(\varepsilon)$ оператора $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$, вместо системы* (5), (12), *можно использовать систему* (15), (16). *Решением последней являются собственные числа $\lambda_i(n,\varepsilon)$ ($\to \lambda_i(\varepsilon)$) и собственные функции $x_i(n,\varepsilon)$ ($\to x_i(\varepsilon)$) оператора $C_n(\varepsilon)$.*

Замечание. Собственные числа $\lambda_i(n,\varepsilon)$ и собственные функции $x_i(n,\varepsilon)$ оператора $C_n(\varepsilon)$ находятся (может быть и приближенно) с помощью любого из методов (в том числе и численных) решения систем дифференциальных уравнений.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУНГЕ – КУТТЫ В ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Хорошо известен метод Рунге – Кутты для приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (см., например, [2, с. 226–228]).

$$y' = f(t,y), \quad t \in [0,\varepsilon], \quad (') = d/dt, \tag{19}$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0, \tag{20}$$

где $f(t,y)$ — некоторая заданная функция двух переменных. Будем считать, что для задачи Коши (15), (16) выполняются требования, обеспечивающие существование и единственность на отрезке $[0,\varepsilon]$ ее решения $y=y(t)$ (такие требования можно найти в любом курсе дифференциальных уравнений или в соответствующем разделе курса высшей математики, см., например, [3–5]).

Придерживаясь в дальнейшем изложении обозначений, введенных в предыдущем параграфе, выберем натуральное m таким, чтобы шаг $h=\varepsilon_0/m$ был достаточно малым положительным числом. Тогда отрезок $[0,\varepsilon_0]$ можно разбить системой равноотстоящих друг от друга точек (или узлов) $\{t_i\}_{i=0}^{m}$, $t_i = i \cdot h$, а приближенные значения y_{i+1}, $i=\overline{0,m-1}$, функции-решения $y=y(t)$ в узлах

$t = t_j$, $j = \overline{1,m}$, находить с помощью метода Рунге – Кутты:

$$\begin{cases} \eta_1^i = hf(t_i, y_i), \\ \eta_2^i = hf(t_i + h/2, y_i + \eta_1^i/2), \\ \eta_3^i = hf(t_i + h/2, y_i + \eta_2^i/2), \\ \eta_4^i = hf(t_i + h, y_i + \eta_3^i), \\ \triangle y_i = \left(\eta_1^i + 2\eta_2^i + 2\eta_3^i + \eta_4^i\right)/6, \\ y_{i+1} = y_i + \triangle y_i. \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, задача Коши (15), (16) с начальными условиями $(x_i(0), x_i(0)) = 1$, $i = \overline{1,n}$, приближенно решается с использованием формул (21).

Пусть выполнены условия теоремы 1. Адаптируя формулы (21) к описанной выше задаче Коши, получаем следующие формулы Рунге – Кутты для приближенного вычисления собственных чисел $\lambda_i(n, \varepsilon_0)$ и собственных функций $x_i(n, \varepsilon_0)$ оператора $C_n(\varepsilon_0)$:

$$\lambda_{\bar{i}}^{\nu+1} = \lambda_{\bar{i}}^{\nu} + \triangle\lambda_{\bar{i}}^{\nu}, \qquad x_{\bar{i}}^{\nu+1} = x_{\bar{i}}^{\nu} + \triangle x_{\bar{i}}^{\nu}, \qquad i = \overline{1,n}, \quad \nu = \overline{0, m-1}, \tag{22}$$

где

$$\triangle\lambda_{\bar{i}}^{\nu} = \left(\eta_1(\lambda_{\bar{i}}^{\nu}) + 2\eta_2(\lambda_{\bar{i}}^{\nu}) + 2\eta_3(\lambda_{\bar{i}}^{\nu}) + \eta_4(\lambda_{\bar{i}}^{\nu})\right)/6,$$

$$\triangle x_{\bar{i}}^{\nu} = \left(\eta_1(x_{\bar{i}}^{\nu}) + 2\eta_2(x_{\bar{i}}^{\nu}) + 2\eta_3(x_{\bar{i}}^{\nu}) + \eta_4(x_{\bar{i}}^{\nu})\right)/6,$$

$$\eta_1(\lambda_{\bar{i}}^{\nu}) = h\left(MB_n x_{\bar{i}}^{\nu}, x_{\bar{i}}^{\nu}\right), \qquad \eta_1(x_{\bar{i}}^{\nu}) = h{\sum_{k=1}^{n}}' \frac{(MB_n x_{\bar{i}}^{\nu}, x_{\bar{k}}^{\nu})}{\lambda_{\bar{i}}^{\nu} - \lambda_{\bar{k}}^{\nu}} x_{\bar{k}}^{\nu},$$

$$\eta_2(\lambda_{\bar{i}}^{\nu}) = h\left(MB_n(x_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_1(x_{\bar{i}}^{\nu})/2), x_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_1(x_{\bar{i}}^{\nu})/2\right),$$

$$\eta_2(x_{\bar{i}}^{\nu}) = h{\sum_{k=1}^{n}}' \frac{(MB_n(x_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_1(x_{\bar{i}}^{\nu})/2), x_{\bar{k}}^{\nu} + \eta_1(x_{\bar{k}}^{\nu})/2)}{(\lambda_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_1(\lambda_{\bar{i}}^{\nu})/2) - (\lambda_{\bar{k}}^{\nu} + \eta_1(\lambda_{\bar{k}}^{\nu})/2)} (x_{\bar{k}}^{\nu} + \eta_1(x_{\bar{k}}^{\nu})/2),$$

$$\eta_3(\lambda_{\bar{i}}^{\nu}) = h\left(MB_n(x_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_2(x_{\bar{i}}^{\nu})/2), x_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_2(x_{\bar{i}}^{\nu})/2\right),$$

$$\eta_3(x_{\bar{i}}^{\nu}) = h{\sum_{k=1}^{n}}' \frac{(MB_n(x_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_2(x_{\bar{i}}^{\nu})/2), x_{\bar{k}}^{\nu} + \eta_2(x_{\bar{k}}^{\nu})/2)}{(\lambda_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_2(\lambda_{\bar{i}}^{\nu})/2) - (\lambda_{\bar{k}}^{\nu} + \eta_2(\lambda_{\bar{k}}^{\nu})/2)} (x_{\bar{k}}^{\nu} + \eta_2(x_{\bar{k}}^{\nu})/2),$$

$$\eta_4(\lambda_{\bar{i}}^{\nu}) = h\left(MB_n(x_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_3(x_{\bar{i}}^{\nu})), x_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_3(x_{\bar{i}}^{\nu})\right),$$

$$\eta_4(x_{\bar{i}}^{\nu}) = h{\sum_{k=1}^{n}}' \frac{(MB_n(x_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_3(x_{\bar{i}}^{\nu})), x_{\bar{k}}^{\nu} + \eta_3(x_{\bar{k}}^{\nu}))}{(\lambda_{\bar{i}}^{\nu} + \eta_3(\lambda_{\bar{i}}^{\nu})) - (\lambda_{\bar{k}}^{\nu} + \eta_3(\lambda_{\bar{k}}^{\nu}))} (x_{\bar{k}}^{\nu} + \eta_3(x_{\bar{k}}^{\nu})).$$

Для получения окончательных результатов остается воспользоваться формулами (17), (18).

3. ДЕМОНСТРАЦИЯ МЕТОДА А. А.ДОРОДНИЦЫНА НА КОНКРЕТНЫХ ПРИМЕРАХ

Реальные вычисления базируются на методе Рунге – Кутты, погрешность которого контролировать очень непросто, поэтому точность получаемых результатов будем оценивать в каждом конкретном случае по норме невязок.

Пример 1. *Возмущенный квадрат оператора Эрмита.*

Рассмотрим действующий в СГП $\mathbb{H} = \mathrm{L}_2^{\omega}(-\infty, \infty)$, $\omega = \exp(-t^2)$, оператор $A = \mathfrak{M}^2$, где $\mathfrak{M} := -d^2/dt^2 + 2td/dt + I$. Областью определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A будем считать совокупность всех функций f со следующими свойствами: f, f', f'' и f''' — абсолютно непрерывны на любом отрезке числовой оси, $Af \in \mathbb{H}$. Хорошо известно, что спектр оператора A составляют числа $\lambda_n = (2n+1)^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующими собственными функциями, образующими в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис, являются $x_n = c_n^{-1} H_n$, где H_n — многочлены Эрмита, $c_n = \|H_n\|$, $\|\cdot\| = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)|\cdot|^2 dt\right)^{1/2}$ — норма в $\mathbb{H}$.

Пусть B — оператор умножения на вещественнозначную функцию $p \in \mathrm{L}_\infty(-\infty,\infty)$, причем B и $\varepsilon > 0$ такие, что $\varepsilon\|p\|_\infty < \min\limits_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|/2 = |\lambda_1 - \lambda_0|/2 = 4$, где $\|p\|_\infty = \operatorname*{essential\,sup}\limits_{t\in(-\infty,\infty)} |p(t)|$. Тогда оператор $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$ — самосопряженный, имеет простой спектр и ядерную резольвенту в $\mathbb{H}$.

Пусть $n = 10$, $m = 20$, функция

$$p(t) = \begin{cases} 3t^3 - 5t + 1, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

а $\varepsilon = 1$. Поэтому $\varepsilon\|p\|_\infty < 4$, $h = \varepsilon/m = 0.05$. Используем принятые ранее обозначения: $\lambda_{\bar{i}}^{0} = \lambda_i$, $i = \overline{0,10}$, $x_{\bar{0}}^{0} = (1,0,0,\ldots,0)^t$, $x_{\bar{1}}^{0} = (0,1,0,\ldots,0)^t$, $\ldots x_{\overline{10}}^{0} = (0,0,0,\ldots,1)^t$ — собственные числа и собственные вектора матрицы $MA_{10} \equiv MC_{10}(0) = MA_{10} + 0 \cdot MB_{10} = \{(Ax_i, x_j)\}_{i,j=0}^{10}$, $MB_{10} = \{(Bx_i, x_j)\}_{i,j=0}^{10}$ — матричное представление оператора B в подпространстве $\mathfrak{L}_{10} := L(x_0(0), \ldots, x_{10}(0)) \subset \mathbb{H}$.

Найдем по формулам (22) числа $\lambda_{\bar{i}}^{20}$ и вектора $x_{\bar{i}}^{20}$, $i = \overline{0,10}$, применяя математический пакет Maple 8 и производя вычисления с числами, имеющими в своей десятичной записи 30 значащих цифр. Далее, следуя формулам (17), (18), получим приближенные значения собственных чисел $\lambda_i(1)$ и функций $x_i(1)$ оператора $C(1)$. Для экономии места выпишем только первое (с нулевым номером) найденное собственное число и соответствующую собственную функцию:

$$\lambda_0(1) \approx \lambda_{\bar{0}}^{20} = 1.68325964047228615895304567067,$$

$$\begin{gathered} x_0(1) \approx X_{\bar{0}}^{20}(10,1) = 0.172852411522452732283240620798t + \\ +0.0161714626849581430341225747620t^2 - 0.0332630886742984437857110142244t^3 - \\ -0.00133132845450349265180465539626t^4 + 0.00599381499577218480413907048 01t^5 + \\ +0.0000195822126271437678300649353 2t^6 - 0.000553823368434647505134287584 8t^7 + \\ +0.0000070175789723017907957381961 4t^8 + 0.000018766879246073963059061225 5t^9 - \\ -0.000000361936912741577186212378 35t^{10} + 0.737304953743735332327626813166. \end{gathered}$$

Оценка нормы невязки

$$\varpi_0 := C(1)X_{\bar{0}}^{20}(10,1) - \lambda_{\bar{0}}^{20} X_{\bar{0}}^{20}(10,1): \ \|\varpi_0\| < 0.358.$$

Следует отметить, что выписанные значения собственного числа и собственной функции не могут быть округлены до меньшего количества значащих цифр, так как в противном случае возрастет число $\|\varpi_0\|$.

Пример 2. *Возмущенный оператор Якоби.*

Рассмотрим действующий в СГП $\mathbb{H} = \mathrm{L}_2^\omega(-1,1)$, $\omega = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta \ne -1$, $\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$, оператор $A := -(1-t^2)d^2/dt^2 - [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)t]d/dt + I$. Областью определения $\mathcal{D}(A)$ этого оператора будем считать совокупность всех функций f со следующими свойствами: f и f' — абсолютно непрерывны на отрезке $[-1,1]$, $Af \in \mathbb{H}$. Спектр оператора A составляют числа $\lambda_n = 1 + n(n+\alpha+\beta+1)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующими собственными функциями, образующими в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис, являются $x_n = c_n^{-1} P_n^{\alpha,\beta}$, где $P_n^{\alpha,\beta}$ — многочлены Якоби, $c_n = \|P_n^{\alpha,\beta}\|$, $\|\cdot\| = \left(\int\limits_{-1}^{1} (1-t)^\alpha(1+t)^\beta |\cdot|^2\,dt\right)^{1/2}$ — норма в $\mathbb{H}$.

Пусть B — оператор умножения на вещественнозначную функцию $p \in \mathrm{L}_\infty(-1,1)$, причем B и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\varepsilon\|p\|_\infty < \min_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|/2 = |\lambda_1 - \lambda_0|/2 = 1 + (\alpha+\beta)/2,$$

где $\|p\|_\infty = \operatorname*{essential\,sup}\limits_{t\in(-1,1)} |p(t)|$. Тогда оператор $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$ — самосопряженный, имеет простой спектр и ядерную резольвенту в $\mathbb{H}$.

Пусть $n = 10$, $m = 20$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, функция $p(t) = t^5 - 2t^2 + 2t - 1$, а $\varepsilon = 0.5$. Поэтому $\varepsilon\|p\|_\infty < 7/2$, $h = \varepsilon/m = 0.025$.

Действуя далее по аналогии с примером 1, получим

$$\lambda_0(0.5) \approx \lambda_{\bar{0}}^{20} = 0.49625234556127542467487342903 8,$$

$$x_0(0.5) \approx X_{\bar{0}}^{20}(10, 0.5) = -0.009425746658442445493517548993t^5-$$
$$-0.132236442075371243951636119933t + 0.000032546776178242954235192003 6t^{10}-$$
$$-0.000018725507526962265308809 78t^9 + 0.000101496997423765098013461714 1t^8-$$
$$-0.000483143633569305374449122052t^7 + 0.001103406686685029638866906273 4t^6+$$
$$+0.067949307253583680810569364214t^2 - 0.014140652232540241451149896710 0t^3+$$
$$+0.001702401730599740806867245977t^4 + 0.977204080555186842538043968210,$$

$$\|\varpi_0\| := \|C(0.5)X_{\bar{0}}^{20}(10, 0.5) - \lambda_{\bar{0}}^{20} X_{\bar{0}}^{20}(10, 0.5)\| < 0.00000014.$$

Величина нормы невязки ϖ_0 позволяет утверждать о близости найденного числа $\lambda_{\bar{0}}^{20}$ и функции $X_{\bar{i}}^{20}(10, 0.5)$ к собственному числу $\lambda_0(0.5)$ и собственной функции $x_0(0.5)$ оператора $C(0.5)$.

Пример 3. *Возмущенный оператор Лежандра.*

Рассмотрим действующий в СГП $\mathbb{H} = \mathrm{L}_2(-1, 1)$ оператор $A := -(1 - t^2)d^2/dt^2 + 2td/dt + I$. Областью определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A будем считать совокупность всех функций f со следующими свойствами: f и f' — абсолютно непрерывны на отрезке $[-1, 1]$, $Af \in \mathbb{H}$. Спектр оператора составляют числа $\lambda_n = 1 + n(n + 1)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующими собственными функциями, образующими в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис, являются $x_n = c_n^{-1} P_n$, где P_n — многочлены Лежандра, $c_n = \|P_n\|$, $\| \cdot \| = \left(\int\limits_{-1}^{1} | \cdot |^2 \, dt \right)^{1/2}$ — норма в $\mathbb{H}$.

Пусть B — оператор умножения на функцию $p \in \mathrm{L}_\infty(-1, 1)$, причем B и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\varepsilon \|p\|_\infty < \min_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|/2 = |\lambda_1 - \lambda_0|/2 = 1,$$

где $\|p\|_\infty = \operatorname*{essential\,sup}_{t \in (-1,1)} |p(t)|$. Тогда оператор $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$ — самосопряженный, имеет простой спектр и ядерную резольвенту в $\mathbb{H}$.

Пусть $n = 10$, $m = 10$, $\varepsilon = 0.25$, а функция $p(t) = -2t^4 + 4t^3 - 3t + 2$. Поэтому $\varepsilon \|p\|_\infty < 1$, $h = \varepsilon/m = 0.025$.

Поступая по аналогии с предыдущими примерами, получим

$$\lambda_0(0.25) \approx \lambda_{\bar{0}}^{10} = 1.391550946107084744129696068 09,$$

$$x_0(0.25) \approx X_{\bar{0}}^{10}(10, 0.25) = 0.087656021785344767263824203424t+$$
$$+0.037453986911871361796317728358 4t^2 - 0.055536211875002468152105462213 3t^3+$$
$$+0.013586710704303715783666702787 2t^4 - 0.000496215844706042562369418003 2t^5+$$
$$+0.001906527196670689216507835740 3t^6 - 0.000736477994026766455479523313 6t^7+$$
$$+0.000110913595492155289617188049 9t^8 - 0.000038353882483806105423224080 5t^9+$$
$$+0.000017955566717615162726445359 0t^{10} + 0.690720016035003127316804278867,$$

$$\|\varpi_0\| := \|C(0.25)X_{\bar{0}}^{10}(10, 0.25) - \lambda_{\bar{0}}^{10} X_{\bar{0}}^{10}(10, 0.25)\| < 0.00000051.$$

Пример 4. *Возмущенный квадрат оператора Лагерра.*

Рассмотрим действующий в весовом СГП $\mathbb{H} = \mathrm{L}_2^w(0, \infty)$, $w(t) = e^{-t}t^\alpha$, $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, оператор $A = \mathfrak{M}^2$, где $\mathfrak{M} := -td^2/dt^2 - (\alpha + 1 - t)d/dt + I$. Областью определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A будем считать совокупность всех функций f со следующими свойствами: f, f', f'' и f''' — абсолютно непрерывны на любом отрезке неотрицательной части числовой оси, $Af \in \mathbb{H}$. Спектр оператора A составляют числа $\lambda_n = (1 + n)^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующими собственными функциями, образующими в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис, являются $x_n = c_n^{-1} L_n^\alpha$, где L_n^α — многочлены Лагерра, $c_n = \|L_n^\alpha\|$, $\| \cdot \| = \left(\int\limits_0^\infty e^{-t} t^\alpha | \cdot |^2 \, dt \right)^{1/2}$ — норма в $\mathbb{H}$.

Пусть B — оператор умножения на функцию $p \in \mathrm{L}_\infty(0,\infty)$, причем B и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\varepsilon\|p\|_\infty < \min_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|/2 = |\lambda_1 - \lambda_0|/2 = 3/2,$$

где $\|p\|_\infty = \operatorname*{essential\,sup}_{t\in(0,\infty)} |p(t)|$. Тогда оператор $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$ — самосопряженный, имеет простой спектр и ядерную резольвенту в $\mathbb{H}$.

Пусть $n = 10$, $m = 20$, $\alpha = 1$, функция $p(t) = \exp(-t)(t^3 - 2t^2 + 3t - 1)$, а $\varepsilon = 1$. Поэтому $\varepsilon\|p\|_\infty < 3/2$, $h = \varepsilon/m = 0.05$.

Действуя по аналогии с предыдущими примерами, получим

$$\lambda_0(1) \approx \lambda_{\bar{0}}^{20} = 1.62001614319061257051596195543,$$

$$x_0(1) \approx X_{\bar{0}}^{20}(10,1) = -0.0526400076164613528782653897744t+$$

$$+0.0127323640634597911356509449 33t^2 - 0.00204673650450553741374697814182t^3+$$

$$+0.000446522703920816561857567 89t^4 - 0.0000747379269078067151938408516 9t^5+$$

$$+0.0000075668274567128693239033 5t^6 - 0.000000455354377265940100671732 77t^7+$$

$$+0.0000000159476959885918247061 6t^8 - 0.299014618221469408123163 61\cdot 10^{-9}\cdot t^9+$$

$$+0.230941905674454297781\cdot 10^{-11}\cdot t^{10} + 0.768981445312051871432936928070,$$

$$\|\varpi_0\| := \|C(1)X_{\bar{0}}^{20}(10,1) - \lambda_{\bar{0}}^{20}X_{\bar{0}}^{20}(10,1)\| < 0.0223.$$

Описанный метод обладает достоинством: его нетрудно реализовать на практике, используя компьютерные математические пакеты, а контролировать методом невязок.

Библиографический список

1. *Дородницын А. А.* Избранные научные труды: в 2 т. Т. 1. М.: ВЦ РАН, 1997. 396 с.
2. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001. 382 с.
3. *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 384 с.
4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: в 5 т. Т. 2. М.: Наука, 1967. 656 с.
5. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд-во ТТЛ, 1953. 468 с.

УДК 517.5

МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А.А. Нурмагомедов

Дагестанский государственный педагогический
университет, Махачкала,
кафедра прикладной математики
E-mail: alimn@mail.ru

В работе исследуются асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n(t)$, ортогональных с весом Δt_j на произвольных сетках, состоящих из конечного числа N точек отрезка $[-1,1]$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лежандра. Кроме того, исследованы аппроксимативные свойства сумм Фурье по этим многочленам.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, вес, весовая оценка, асимптотическая формула, приближение.

Polynomials, Orthogonal on Non-Uniform Grids

A.A. Nurmagomedov

Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala,
Chair of Applied Mathematics
E-mail: alimn@mail.ru

Asymptotic properties of polynomials $\hat{p}_n(t)$, orthogonal with weight Δt_j on any finite set of N points from segment $[-1,1]$ are investigated. Namely an asymptotic formula is proved in which asymptotic behaviour of these polynomials as n tends to infinity together with N is closely related to asymptotic behaviour of the Lasiandra polynomials. Furthermore are investigated the approximating properties of the sums by Fourier on these polynomials.

Key words: polinomial, ortogonal system, set, weight, weighted estimate, asymptotic formula, approximation.