УДК 517.984

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ В СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Т.В. Мазур

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: Sternkind@mail.ru

В статье предоставлены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления оператора Штурма – Лиувилля по его спектру в случае симметричного относительно середины отрезка потенциала.

On the Solvability of the Inverse Sturm – Liouville Problem in the Central Symmetry Case

T.V. Mazur

Necessary and sufficient conditions are provided for the solvability of the inverse problem of recovering Sturm – Liouville operator from its spectrum in the central symmetry case.

1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ — собственные значения самосопряжённой краевой задачи $L = L(q(x), h)$ вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(x) \in L_2(0, \pi), \quad q(x) = q(\pi - x), \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

где λ — спектральный параметр, $q(x)$, h вещественны. Функция $q(x)$ называется *потенциалом*. Краевая задача L имеет счётное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, причём (см. [1, гл. 1])

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{n} + \frac{\sigma_n}{n}, \quad \{\sigma_n\} \in l_2, \tag{3}$$

где

$$\omega = \frac{1}{\pi}\Big(2h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\Big).$$

Рассмотрим следующую обратную задачу:

Задача 1. *По заданному спектру $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ построить потенциал $q(x)$ и коэффициент h.*

Известно (см. [1, гл.1]), что задание спектра $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет краевую задачу L. Другими словами, если решение этой обратной задачи существует, то оно единственно. Цель этой статьи заключается в описании необходимых и достаточных условий разрешимости данной обратной задачи. Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того, чтобы вещественные числа $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ были спектром некоторой краевой задачи $L(q(x), h)$ вида (1)-(2), необходимо и достаточно, чтобы имело место представление (3), где ω — вещественное число.*

Необходимость условий теоремы очевидна. Для доказательства достаточности нам потребуются некоторые факты из теории обратных задач Штурма – Лиувилля. Эта информация кратко будет изложена в п.2.

2. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ — собственные значения самосопряжённой краевой задачи $L_1 = L_1(q(x), h, H)$ вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(x) \in L_2(0, \pi), \tag{4}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{5}$$

где $q(x)$, h, H вещественны. Ясно, что L — частный случай L_1 при $H = h$, и $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0, \pi)$.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ — решения уравнения (4) при начальных условиях

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad \psi(\pi, \lambda) = 1, \quad \psi'(\pi, \lambda) = -H. \tag{6}$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)\rangle, \tag{7}$$

где $\langle y(x), z(x)\rangle := y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$ — вронскиан функций y и z. Согласно теореме Остроградского – Лиувилля, $\langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\rangle$ не зависит от x. Функция $\Delta(\lambda)$ называется *характеристической функцией* краевой задачи L_1. Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$ в (7), получаем

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi). \tag{8}$$

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой аналитической по λ порядка $1/2$. Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ краевой задачи L_1 совпадают с нулями $\Delta(\lambda)$ и имеют вид

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega_1}{n} + \frac{\sigma_{n1}}{n}, \quad \{\sigma_{n1}\} \in l_2, \tag{9}$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{\pi}\Big(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\Big).$$

Кроме того, из (6)–(8) следует, что функции $\varphi(x,\lambda_n)$ и $\psi(x,\lambda_n)$ являются собственными функциями, и существует последовательность $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ такая, что

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n), \quad \beta_n \neq 0. \tag{10}$$

Лемма 1. *Задание спектра $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле*

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda)\prod_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку $\Delta(\lambda)$ является целой по λ функцией порядка $1/2$, то по теореме Адамара $\Delta(\lambda)$ однозначно определяется своими нулями λ_n с точностью до постоянного множителя:

$$\Delta(\lambda) = C\prod_{n=0}^\infty \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\Big). \tag{12}$$

(Случай, когда $\lambda = 0$ является собственным значением, требует незначительных изменений.) Известно (см. [1, гл.1]), что имеет место асимптотическая формула:

$$\Delta(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi + \omega_1\cos\rho\pi + \zeta(\rho), \quad |\lambda| \to \infty, \tag{13}$$

где

$$\zeta(\rho) = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\cos\rho(\pi - 2t)\,dt + O\Big(\frac{1}{\rho}\exp(|\tau|\pi)\Big), \quad \lambda = \rho^2, \quad \tau = \mathrm{Im}\rho.$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde\Delta(\lambda) := -\rho\ \sin\rho\pi = -\lambda\pi\prod_{n=1}^\infty\Big(1 - \frac{\lambda}{n^2}\Big).$$

Тогда

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\tilde\Delta(\lambda)} = C\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0\pi\lambda}\prod_{n=1}^\infty\frac{n^2}{\lambda_n}\prod_{n=1}^\infty\Big(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - \lambda}\Big).$$

Используя (9) и (13), вычисляем:

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{\tilde\Delta(\lambda)} = 1, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{n=1}^\infty\Big(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - \lambda}\Big) = 1$$

и, следовательно,

$$C = \pi\lambda_0\prod_{n=1}^\infty\frac{\lambda_n}{n^2}.$$

Подставляя это в выражение (12), приходим к (11). □

Обозначим
$$\alpha_n := \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)\,dx, \quad \alpha_n^0 := \int_0^\pi \psi^2(x,\lambda_n)\,dx. \tag{14}$$
Из (10) следует, что
$$\alpha_n^0 = \beta_n^2 \alpha_n\,. \tag{15}$$

Лемма 2. *Справедливо соотношение*
$$\alpha_n = -\dot\Delta(\lambda_n)(\beta_n)^{-1}, \tag{16}$$
где числа β_n *определяются формулой (10), и* $\dot\Delta(\lambda) := \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$.

Доказательство: Используя (4), вычисляем
$$\frac{d}{dx}\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_n)\rangle = (\lambda-\lambda_n)\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)$$
и, следовательно, с учётом (8) имеем:
$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^\pi \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx = \langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_n)\rangle\Big|_0^\pi = -\Delta(\lambda).$$
При $\lambda\to\lambda_n$ это даёт
$$\int_0^\pi \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx = -\dot\Delta(\lambda).$$
Учитывая (10) и (14), приходим к (16). □

Для весовых чисел α_n справедливо представление
$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_{n1}}{n}, \qquad \{\sigma_{n1}\}\in l_2, \qquad \alpha_n > 0. \tag{17}$$

В самом деле, известно (см. [1, гл.1]), что для функций $\varphi(x,\lambda_n)$ имеет место асимптотическая формула
$$\varphi(x,\lambda_n) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \qquad n\to\infty, \tag{18}$$
где
$$\xi_n(x) = \Big(h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt - x\omega - x\zeta_n\Big)\sin nx + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\sin n(x-2t)\,dt + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \{\zeta_n\}\in l_2. \tag{19}$$
Следовательно,
$$|\xi_n(x)| \le C. \tag{20}$$

Подставляя это в (14), получаем:
$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \Big(2\cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}\Big)\xi_n(x)\,dt.$$
Учитывая (20), приходим к (17).

Кроме того, в силу (10) при $x=\pi$ имеем: $\beta_n = (\varphi(\pi,\lambda_n))^{-1}$. Тогда, используя (18) и (19), вычисляем:
$$\beta_n = (-1)^n + \frac{\sigma_{n2}}{n}, \quad \{\sigma_{n2}\}\in l_2.$$
Вместе с (16) и (17) это даёт:
$$\dot\Delta(\lambda_n) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_{n3}}{n}, \quad \{\sigma_{n3}\}\in l_2. \tag{21}$$

Совокупность чисел $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\ge0}$ называется *спектральные данные* краевой задачи L_1.

Заметим, что, если $H=h$ и $q(x)=q(\pi-x)$ п.в. на $(0,\pi)$, то $\psi(x,\lambda)=\varphi(\pi-x,\lambda)$. Используя (10), вычисляем
$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n) = \beta_n\psi(\pi-x,\lambda_n) = \beta_n^2\varphi(\pi-x,\lambda_n) = \beta_n^2\psi(x,\lambda_n),$$

и, следовательно, $\beta_n^2 = 1$. Используя теорему Штурма об осцилляции [2, стр. 25], заключаем, что $\beta_n = (-1)^n$. Тогда (15) даёт $\alpha_n = \alpha_n^0$.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть заданы вещественные числа $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ вида (3). Введём числа $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ по формуле

$$\alpha_n := (-1)^{n+1}\dot{\Delta}(\lambda_n), \qquad (22)$$

где $\Delta(\lambda)$ построена по (11). Подставляя вместо $\dot{\Delta}(\lambda_n)$ представление (21), получаем, что числа α_n имеют вид (17). Согласно теореме 1.3.1 из [1, стр. 45], существуют единственные вещественные $q(x)$, h и H ($q(x) \in L_2(0,\pi)$), такие, что $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ являются спектральными данными краевой задачи $L_1(q(x), h, H)$ вида (4)–(5). Кроме того, из (16) и (22) следует, что

$$\beta_n = (-1)^n.$$

Вместе с (15) это даёт

$$\alpha_n^0 = \alpha_n$$

для этой краевой задачи. Осталось показать, что $h = H$ и $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0,\pi)$. С этой целью рассмотрим краевую задачу $\tilde{L}_1 = L_1(\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$, где $\tilde{q}(x) := q(\pi - x)$, $\tilde{h} = H$, $\tilde{H} = h$.

Договоримся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче L_1, то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{L}_1$. В нашем случае ясно, что

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n, \quad \tilde{\alpha}_n = \alpha_n^0, \quad \tilde{\alpha}_n^0 = \alpha_n.$$

Поскольку $\alpha_n^0 = \alpha_n$, следовательно, краевые задачи L_1 и $\tilde{L}_1$ имеют одинаковые спектральные данные. Согласно Теореме 1.2.2 из [1, стр.30], получаем $\tilde{h} = h$, $\tilde{H} = H$ и $\tilde{q}(x) = q(x)$ п.в. на $(0,\pi)$, т.е. $H = h$ и $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0,\pi)$. Теорема 1 доказана. □

4. Аналогичным образом могут быть получены подобные результаты для краевых условий Дирихле. В [4] данные результаты были получены другим, более сложным методом. Сформулируем их здесь без доказательства. Пусть $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ — собственные значения самосопряжённой краевой задачи $L_0 = L_0(q(x))$ вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(x) \in L_2(0,\pi), \quad q(x) = q(\pi - x),$$

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

где потенциал $q(x)$ вещественнен. Тогда

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{\omega_0}{n} + \frac{\sigma_{n0}}{n}, \quad \{\sigma_{n0}\} \in l_2, \qquad (23)$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt.$$

Задание спектра $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ однозначно определяет потенциал $q(x)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы вещественные числа $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ были спектром некоторой краевой задачи $L_0(q(x))$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (23), где ω_1 — вещественное число.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00003 *и* 07-01-92000-ННС-а).

Библиографический список

1. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

2. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001.

3. *Conway J.B.* Functions of One Complex Variable. 2nd ed. V. I. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.

4. *Pöschel J., Trubowitz E.* Inverse Spectral Theory. N.Y.: Academic Press, 1987.