При $x \geq (12\ln 7)n$ имеем

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} 7^n e^{-x/12} = \exp\left[\frac{(12\ln 7)n - x}{12} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{n+1}\right] \leq C. \tag{42}$$

Из (41) и (42) находим

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} |L_n^1(x)| \leq Ce^{x/4} \leq CA_n(x), \qquad x \geq (12\ln 7)n. \tag{43}$$

Сравнивая (39) и (43) убеждаемся в справедливости оценки (40). Утверждение теоремы вытекает из (37), (38) и (40). □

Сопоставляя (33), (34) с (7), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существует постоянная* $c(\lambda)$ *такая, что*

$$|l_n(x)| \leq C(\lambda)\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{N} + 1\right) A_n(x).$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю И.И. Шарапудинову и М.Ш. Джамалову за поставленную задачу и ряд полезных замечаний.

Библиографический список

1. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

2. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.

3. *Turan P.* Remarks on a theorem of Erhard Schmidt // Mathematica. 1960. Vol. 2, № 25. С. 373–378.

4. *Аптекарев А. И., Дро А., Калягин В. А.* Об асимптотике точных констант в неравенствах Маркова – Бернштейна в интегральных метриках с классическим весом // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 1. С. 173–174.

5. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: ДНЦ РАН, 2004.

УДК 519.872

АНАЛИЗ НЕОДНОРОДНЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Ю. И. Митрофанов, Е. С. Рогачко, Е. П. Станкевич

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: MitrophanovYuI@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru, StankevichElena@mail.ru

Рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с несколькими классами требований и групповыми переходами. Для моделирования эволюции данной сети используются цепи Маркова. Приводятся два способа вычисления стационарного распределения сетей обслуживания данного типа. Даются формулы для основных стационарных характеристик сети.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, групповые переходы требований, анализ сетей массового обслуживания, стационарные характеристики сетей обслуживания.

Analysis of Heterogeneous Queueing Networks with Batch Movements of Customers

Yu. I. Mitrophanov, E. S. Rogachko, E. P. Stankevich

Saratov State University,
Chair of Systems Analysis and Automatic Control
E-mail: MitrophanovYuI@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru, StankevichElena@mail.ru

Closed exponential queueing network with different classes of customers and batch movements is considered. To model evolution of given network Markov chains are used. Two approaches to stationary distribution calculation for given type queueing networks are presented. Formulas for basic stationary characteristics are given.

Key words: queueing networks, batch movements of customers, analysis of queueing networks, stationary characteristics of the networks.

ВВЕДЕНИЕ

Для сетей массового обслуживания с одиночными переходами требований получены существенные теоретические результаты и разработаны эффективные методы анализа [1–3]. Сети обслуживания этого типа находят широкое применение в качестве математических моделей сложных дискретных стохастических систем, например, транспортных систем, сетей передачи данных, гибких производственных систем и вычислительных сетей. В последнее время в теории сетей массового обслуживания интенсивно развивается научное направление, связанное с исследованием сетей массового обслуживания с групповыми переходами и групповым обслуживанием требований и разработкой методов их анализа [4–9].

В данной работе рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с несколькими классами требований и групповыми переходами. Число обслуживающих приборов в каждой системе обслуживания равно числу требований в сети. Изменения состояний сети обслуживания происходят в результате переходов между системами групп требований. Предлагается модель эволюции рассматриваемой сети обслуживания и рассматриваются методы анализа сети, при этом существенное внимание уделяется получению мультипликативной формы стационарного распределения вероятностей состояний сети. Представлены два способа вычисления стационарного распределения рассматриваемой сети — с использованием матрицы вероятностей перехода модельной цепи Маркова и с применением мультипликативной формы стационарного распределения. Приведены также формулы для вычисления основных стационарных характеристик сети обслуживания.

1. ОПИСАНИЕ СЕТИ

Рассмотрим замкнутую экспоненциальную сеть массового обслуживания N с L системами массового обслуживания S_i, $i = 1, \ldots, L$, в которой обслуживаются требования K классов. Вероятности перехода требований между системами сети определяются маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ik,jl})$, $i, j = 1, \ldots, L$, $k, l = 1, \ldots, K$, где $\theta_{ik,jl}$ — вероятность того, что требование класса k после обслуживания в системе S_i поступает в систему S_j с изменением своего класса на l. Начальное число требований различных классов определяется вектором $H = (H_k)$, $k = 1, \ldots, K$, где H_k — начальное число требований класса k в сети, $\hat{H} = \sum\limits_{k=1}^{K} H_k$. Система S_i, $i = 1, \ldots, L$, включает $\hat{H}$ одинаковых обслуживающих приборов. Предполагается, что длительности обслуживания в системе S_i требований класса k имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_{ik}, $0 < \mu_{ik} < 1$, $i = 1, \ldots, L$, $k = 1, \ldots, K$ (данные ограничения на значения μ_{ik} не влияют на общность полученных результатов). Состояние сети N определяется вектором $s = (s_i)$, $s_i = (s_{ik})$, $i = 1, \ldots, L$, $k = 1, \ldots, K$, где s_{ik} — число требований класса k, находящихся в системе S_i. Множество состояний сети обозначим через X, множество номеров систем массового обслуживания — через $I = \{1, \ldots, L\}$, множество номеров классов требований — через $J = \{1, \ldots, K\}$. Изменение состояния сети происходит вследствие переходов между системами групп требований и является результатом выполнения рассмотренной далее последовательности действий.

Для синхронизации событий, реализуемых в сети N в процессе ее функционирования, используется последовательность интервалов времени фиксированной длительности, называемых *слотами*. Длительность слота полагается равной единице. Моменты начала и окончания слота z обозначим соответственно через η и τ. В момент η определяется состояние сети s, в котором сеть пребывает в течение слота z. Требования, завершившие обслуживание в системе в течение слота, остаются в обслуживающих приборах до момента τ. В момент τ формируется вектор $d = (d_i)$, $d_i = (d_{ik})$, $i = 1, \ldots, L$, $k = 1, \ldots, K$, требований, выходящих после завершения обслуживания из систем. Здесь $d_{ik} \leq s_{ik}$ — число требований класса k, выходящих из системы S_i. Вектор d затем преобразуется в вектор $a = (a_j)$, $a_j = (a_{jl})$, $j = 1, \ldots, L$, $l = 1, \ldots, K$, требований, входящих в конце слота z в системы обслуживания сети. В векторе a компонента a_{jl} — число требований класса l, которые поступят в систему S_j. Так как векторы d и a содержат одинаковое число требований, будет сформировано новое состояние сети $s' = s - d + a$. Все векторы d и a далее будем называть векторами перемещений. Множество всех векторов перемещений обозначим через Y.

В общем, в момент τ в сети N выполняются следующие действия:

1) формируется вектор d;

2) реализуется алгоритм маршрутизации требований из группы d_{ik}, $i \in I$, $k \in J$, и формируются подгруппы требований $d_{ik,jl}$, $l \in J$, $j \in V_i$, направляемые из S_i в S_j с возможной сменой класса требований k на класс l, V_i — множество номеров выходных смежных с S_i систем;

3) из подгруппы требований $d_{ik,jl}$, $k,l \in J$, $j \in I$, $i \in U_j$, формируются группы поступающих в S_j требований класса l — компоненты a_{jl} вектора a, U_j — множество номеров входных смежных с S_j систем;

4) группа a_{jl}, $j \in I$, $l \in J$, требований класса l направляется в систему S_j;

5) формируется новое состояние сети $s' = s - d + a$.

2. МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ СЕТИ

Если сеть N находится в состоянии $s \in X$, то с вероятностью $p(s,d)$ формируется вектор $d \in Y$, который затем с вероятностью $p(d,a)$ преобразуется в вектор $a \in Y$.

Вероятность завершения обслуживания в системе S_i, $i \in I$, требования класса k, $k \in J$, в данном слоте равна μ_{ik}. Если в начале слота в системе S_i в процессе обслуживания находятся s_{ik} требований, то вероятность завершения обслуживания в течение этого слота ровно d_{ik} требований ($0 \le d_{ik} \le s_{ik}$) определяется биномиальным распределением с параметром μ_{ik}. Таким образом,

$$p(s,d) = \prod_{i=1}^{L}\prod_{k=1}^{K}\binom{s_{ik}}{d_{ik}}(\mu_{ik})^{d_{ik}}(1-\mu_{ik})^{s_{ik}-d_{ik}}. \tag{1}$$

При независимой маршрутизации требований в сети N вероятности преобразования вектора d в вектор a имеют вид

$$p(d,a) = \sum_{d_{ik,jl}\in D}\prod_{i=1}^{L}\prod_{k=1}^{K}\binom{d_{ik}}{d_{ik,11},\ldots,d_{ik,LK}}\prod_{j=1}^{L}\prod_{l=1}^{K}\theta_{ik,jl}^{d_{ik,jl}}, d,a \in Y,$$

где $D = \left\{d_{ik,jl},\ i=1,\ldots,L,\ k,l=1,\ldots,K,\ j \in V_i : \sum\limits_{i=1}^{L}\sum\limits_{k=1}^{K} d_{ik,jl} = a_{jl}\right\}$. Здесь учитываются все возможные переходы требований между системами обслуживания в сети.

Введем в рассмотрение маршрутную цепь Маркова W с дискретным временем и множеством состояний Y [5]. Вероятности перехода цепи W определяются выражением

$$\gamma(d,a) = \begin{cases} p(d,a), & \text{если } p(s,d) > 0 \text{ для некоторого } s \in X, \\ \delta_{da}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad d,a \in Y,$$

где δ_{da} — символ Кронекера.

Множество состояний Y цепи W разбивается на $\hat{H}+1$ подмножеств Y^r, $r = 0,1,\ldots,\hat{H}$, — множеств векторов перемещений, содержащих r требований. Так как переходы между векторами перемещений с различным числом требований невозможны, то в общем случае цепь W разложима на $\hat{H}+1$ эргодических подцепей Маркова W^r с множествами состояний Y^r. Матрица $\Gamma = (\gamma(d,a))$, $d,a \in Y$, вероятностей перехода цепи W имеет блочно-диагональную структуру, в которой отличными от нуля являются элементы диагональных подматриц $\Gamma^r = (\gamma^r(d,a))$, $d,a \in Y^r$. Матрицы Γ^r являются матрицами вероятностей перехода подцепей W^r.

Введем в рассмотрение вектор относительных интенсивностей потоков требований в сети N $\omega = (\omega_i)$, $\omega_i = (\omega_{ik})$, $i = 1,\ldots,L$, $k = 1,\ldots,K$, который является решением системы уравнений потоков:

$$\omega_{ik} = \sum_{j=1}^{L}\sum_{l=1}^{K}\omega_{jl}\theta_{jl,ik}, \quad i=1,\ldots,L, \quad k=1,\ldots,K,$$

с условием

$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\omega_{ik} = 1.$$

Из результатов работы [5] следует, что для сети N элементы инвариантной меры $\chi = (\chi(d))$, $d \in Y$, маршрутной цепи W определяются выражением

$$\chi(d) = \prod_{i=1}^{L} \prod_{k=1}^{K} \frac{\omega_{ik}^{d_{ik}}}{d_{ik}!}. \tag{2}$$

Пусть эволюция сети N описывается цепью Маркова Δ с непрерывным временем и множеством состояний X. Обозначим через $P = (p(s, s'))$, $s, s' \in X$, матрицу вероятностей перехода цепи Δ. Элементы матрицы P определяются выражением

$$p(s, s') = \sum_{\substack{d,a \in Y: \\ s'=s-d+a}} p(s, d, a),$$

где условная вероятность перехода маршрутной цепи W из состояния d в состояние a при пребывании цепи Δ в состоянии s

$$p(s, d, a) = p(s, d)\gamma(d, a), \quad s \in X, \quad d,\ a \in Y.$$

Стационарное распределение $\pi = (\pi(s))$, $s \in X$, цепи Δ (стационарное распределение сети N) является решением уравнения $\pi P = \pi$ с условием $\sum\limits_{s \in X} \pi(s) = 1$.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕТИ

При получении мультипликативной формы стационарного распределения сети N используются следующие предположения, приведенные в работе [5].

1. Вероятность формирования вектора $d \in Y$ при пребывании сети в состоянии $s \in X$ имеет вид

$$p(s, d) = \frac{\Psi(s-d)\Xi(d)}{\Phi(s)}, \tag{3}$$

где $\Psi(\cdot)$, $\Xi(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ — произвольные заданные функции; $\Psi(\cdot) : X \times Y \to [0, \infty)$, $\Xi(\cdot) : Y \to [0, \infty)$, а $\Phi(\cdot) : X \to (0, \infty)$.

2. Для всех $s \in X$, $d, a \in Y$ таких, что $p(s, d)\gamma(d, a) > 0$, существуют функция $f(\cdot) \in F$, где

$$F = \left\{ f(\cdot) : Y \to (0, \infty), f(d) > 0, \Xi(d)f(d) = \sum_{a \in Y} \Xi(a)f(a)\gamma(a, d), d \in Y \right\},$$

и функция $g(\cdot) : X \to (0, \infty)$, удовлетворяющие равенству

$$\frac{g(s)}{g(s-d+a)} = \frac{f(d)}{f(a)}. \tag{4}$$

Как показано в [5], сети, для которых выполняются указанные предположения, имеют мультипликативную форму стационарного распределения:

$$\pi(s) = \frac{1}{G}\Phi(s)g(s), \quad s \in X, \tag{5}$$

где нормализующая константа $G = \sum\limits_{s \in X} \Phi(s)g(s) < \infty$.

Для сети N эти предположения выполняются. Используя (1) и (3), получим

$$\Psi(s-d) = \prod_{i=1}^{L} \prod_{k=1}^{K} \frac{(1-\mu_{ik})^{s_{ik}-d_{ik}}}{(s_{ik}-d_{ik})!(\mu_{ik})^{s_{ik}-d_{ik}}},$$

$$\Xi(d) = \prod_{i=1}^{L} \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{d_{ik}!}, \tag{6}$$

$$\Phi(s) = \prod_{i=1}^{L} \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{s_{ik}!(\mu_{ik})^{s_{ik}}}. \tag{7}$$

Так как $\Xi(d)f(d)$, $d \in Y$, являются компонентами инвариантной меры маршрутной цепи W, то из выражений (2) и (6) следует, что $f(d) = \prod\limits_{i=1}^{L} \prod\limits_{k=1}^{K} \omega_{ik}^{d_{ik}}$, $d \in Y$.

Равенство (4) выполняется для сети N, если

$$g(s) = \prod_{i=1}^{L} \prod_{k=1}^{K} \omega_{ik}^{s_{ik}}, \quad s \in X. \tag{8}$$

Действительно,

$$\frac{g(s)}{g(s-d+a)} = \frac{\prod_{i=1}^{L}\prod_{k=1}^{K}\omega_{ik}^{s_{ik}}}{\prod_{i=1}^{L}\prod_{k=1}^{K}\omega_{ik}^{s_{ik}-d_{ik}+a_{ik}}} = \frac{\prod_{i=1}^{L}\prod_{k=1}^{K}\omega_{ik}^{d_{ik}}}{\prod_{i=1}^{L}\prod_{k=1}^{K}\omega_{ik}^{a_{ik}}} = \frac{f(d)}{f(a)}.$$

Подставляя в (5) функции (7) и (8), получим, что стационарные вероятности состояний сети N имеют вид

$$\pi(s) = \frac{1}{G}\prod_{i=1}^{L}\prod_{k=1}^{K}\frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!(\mu_{ik})^{s_{ik}}}, \quad s \in X,$$

где $G = \sum\limits_{s\in X}\prod\limits_{i=1}^{L}\prod\limits_{k=1}^{K}\dfrac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!(\mu_{ik})^{s_{ik}}}$.

Используя стационарное распределение, можно вычислить основные стационарные характеристики сети N, например:
математическое ожидание (м. о.) числа требований класса k в системе S_i

$$\bar{s}_{ik} = \sum_{m=0}^{\hat{H}} m \sum_{\substack{s\in X:\\ s_{ik}=m}} \pi(s), \quad i \in I, \quad k \in J,$$

интенсивность входящего потока требований класса k в систему S_i

$$\lambda_{ik} = \sum_{s\in X} s_{ik}\mu_{ik}\pi(s), \quad i \in I, \quad k \in J.$$

Стационарные характеристики сети N могут быть вычислены без использования стационарного распределения и вычисления нормализующей константы с применением рекурсивного метода анализа сетей обслуживания данного типа [3, 10] по следующим формулам ($i \in I$, $k \in J$):
м. о. длительности пребывания требований класса k в системе S_i

$$\bar{v}_{ik} = 1/\mu_{ik}, \qquad \lambda_{ik} = c\omega_{ik}, \qquad \bar{s}_{ik} = \lambda_{ik}\bar{v}_{ik} = c\omega_{ik}\bar{v}_{ik},$$

где $c = \dfrac{\hat{H}}{\sum\limits_{i=1}^{L}\sum\limits_{k=1}^{K}\omega_{ik}\bar{v}_{ik}}$,
м. о. числа требований класса k в сети

$$\bar{H}_k = \sum_{i=1}^{L}\bar{s}_{ik} = c\sum_{i=1}^{L}\omega_{ik}\bar{v}_{ik},$$

вероятность того, что в системе S_i находится m требований класса k,

$$P\{s_{ik} = m\} = \frac{(\lambda_{ik}/\mu_{ik})^m}{m!}e^{-(\lambda_{ik}/\mu_{ik})}, \quad 0 \le m \le \hat{H},$$

вероятность пребывания требований класса k в системе S_i

$$r_{ik} = \frac{\omega_{ik}\bar{v}_{ik}}{\sum\limits_{j=1}^{L}\omega_{jk}\bar{v}_{jk}}.$$

Очевидно, что $\bar{s}_{ik} = \bar{H}_k r_{ik}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для моделирования эволюции сети обслуживании N используются две цепи Маркова — цепь Δ и маршрутная цепь W. Формирование параметров этих цепей выполнено на основе параметров и алгоритмов функционирования сети N. Предполагается, что стационарные распределения сети и модельной цепи Δ совпадают, поэтому способ вычисления стационарного распределения цепи Δ является также и одним из способов определения стационарного распределения сети N. Преимуществом этого способа является возможность его применения для вычисления стационарного распределения достаточно широкого класса сетей обслуживания, а недостатком — необходимость выполнения большого объема вычислений даже для сетей обслуживания средней размерности. Для сетей обслуживания, обладающих свойством локального равновесия, к которым относится сеть N, эффективным в отношении объема вычислений является способ вычисления стационарного распределения с использованием мультипликативной формы стационарного распределения. При решении практических задач анализа сетей обслуживания не всегда требуется определение стационарного распределения. Поэтому в статье предложен также способ вычисления стационарных характеристик сети N с использованием рекурсивного метода анализа сетей обслуживания.

Библиографический список

1. *Kelly F. P.* Reversibility and stochastic networks. London: Wiley, 1979. 230 p.
2. *Уолренд Дж.* Введение в теорию сетей массового обслуживания. М.: Мир, 1993. 335 с.
3. *Митрофанов Ю. И.* Анализ сетей массового обслуживания. Саратов: Научная книга, 2005. 177 с.
4. *Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., Dijk N.M.* Closed queueing networks with batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 59–70.
5. *Henderson W., Taylor P. G.* Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 71–88.
6. *Boucherie R. J., Dijk N. M.* Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // Advances in Applied Probability. 1991. Vol. 23, № 1. P. 152–187.
7. *Serfozo R. F.* Queueing networks with dependent nodes and concurrent movements // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 143–182.
8. *Miyazawa M.* Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // Queueing Systems. 1997. Vol. 25. P. 45–75.
9. *Woodward M. E.* Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues // Computer Communications. 1998. Vol. 21. P. 1530–1543.
10. *Гурьянов А. И., Митрофанов Ю. И.* Определение параметров замкнутых линейных сетей систем массового обслуживания // Системное моделирование. Новосибирск, 1970. Вып. 1. С. 39–49.

УДК 519.622

АЛГОРИТМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА И ШАГА НА ОСНОВЕ ЯВНОГО ТРЕХСТАДИЙНОГО МЕТОДА ТИПА РУНГЕ – КУТТА

Е. А. Новиков

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск,
отдел вычислительной математики
E-mail: novikov@icm.krasn.ru

Получено неравенство для контроля устойчивости трехстадийного метода Рунге – Кутта третьего порядка точности. Построен метод первого порядка с расширенной областью устойчивости. Сформулирован алгоритм интегрирования переменного порядка. Приведены результаты расчетов жестких задач, подтверждающие повышение эффективности алгоритма с переменным порядкам по сравнению с расчетами по фиксированной схеме.

Ключевые слова: жесткие задачи, явный метод, контроль точности и устойчивости, переменный порядок.

Variable Order and Step Algorithm Based on a Stages of Runge – Kutta Method of Third Order of Accuracy

E. A. Novikov

Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk,
Department of Calculus Mathematics
E-mail: novikov@icm.krasn.ru

An inequality for the stability control of 3-stage Runge – Kutta method of 3th order of accuracy is obtained. Method of first order with expanded stability domain is constructed. Algorithm of variable order is formulated. The results of stiff system computations are provided, which confirm an increase in efficiency for the variable order method as compared to a calculation with fixed scheme.

Key words: stiff problems, explicit method, stability and accuracy control, variable order.