



УДК 539.3

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЦИЛИНДРАХ, АРМИРОВАННЫХ ВИНТОВЫМИ ВОЛОКНАМИ

Р.Р. Мухомодьяров, Я.А. Парфенова

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: rinatm@mail.ru, raznorevich@yandex.ru

В работе рассматривается распространение нестационарных волн в композитной цилиндрической оболочке, образованной изотропной матрицей, армированной двумя семействами симметрично ориентированных винтовых волокон. Семейства волокон обладают одинаковыми механическими свойствами, а материал цилиндра является несжимаемым. Решения связанной системы уравнений движения представляются в виде рядов Фробениуса, что позволяет получить приближенное дисперсионное уравнение, численный анализ которого приведен для различных толщин оболочки и углов намотки волокон.

**Ключевые слова:** нестационарные волны, армированные композиты, ряды Фробениуса, дисперсионное уравнение.

Интенсивное использование композитных материалов в последние десятилетия объясняется их способностью выдерживать высокие нагрузки в определенных направлениях. В то же время математическое моделирование поведения композитов сопряжено с определенными трудностями, например, армирование изотропной матрицы одним прямолинейным семейством волокон делает материал трансверсально-изотропным, двумя семействами — ортотропным. В случае криволинейной геометрии изучаемого тела задача еще более усложняется. Введение дополнительных условий несжимаемости и/или нерастяжимости волокон позволяет упростить вывод разрешающих уравнений.

Распространение волн в изотропных цилиндрических оболочках достаточно хорошо изучено [1, 2]. Для трансверсально-изотропных оболочек также были получены решения в аналитическом виде [3]. В случае ортотропной оболочки разрешающие уравнения не разделяются в общем случае, поэтому решения в аналитическом виде записываются только для осесимметричной задачи [4]. При исследовании распространения волн в анизотропных оболочках перемещения часто представляют в виде степенных рядов Фробениуса [5, 6].

В данной работе изучается распространение упругих гармонических волн в цилиндрической оболочке, армированной двумя семействами симметрично ориентированных винтовых волокон. Считаем, что материал цилиндра является несжимаемым, а оба семейства волокон обладают одинаковыми механическими свойствами.

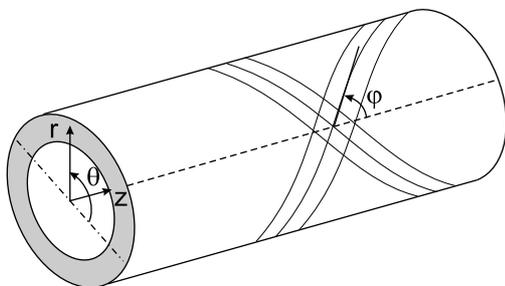
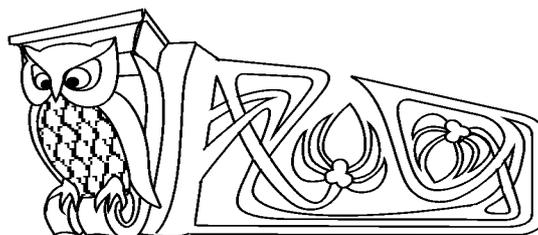


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка, армированная двумя семействами волокон



### Wave Propagation in Fibre-Reinforced Cylinders

R.R. Mukhomodyarov, Ya.A. Parfenova

Saratov State University,  
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics  
E-mail: rinatm@mail.ru, raznorevich@yandex.ru

Non-stationary wave propagation in cylindrical composite shell is considered. The shell consists of isotropic matrix reinforced by two families of symmetrically wound spiral fibres. These families have the same mechanical properties and the cylinder is considered to be incompressible. Solutions of coupled equations of motion are represented in the form of Frobenius power series. Approximate dispersion relation derived is analyzed numerically for different shell thicknesses and fibre winding angles.

**Key words:** non-stationary waves, fibre-reinforced composites, Frobenius series, dispersion relation.

Рассмотрим полубесконечную цилиндрическую оболочку в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  (рис. 1). Векторы, задающие направления волокон, имеют следующие координаты:

$$\bar{a}(0, \sin \varphi, \cos \varphi), \quad \bar{b}(0, -\sin \varphi, \cos \varphi), \quad (1)$$

где  $\varphi$  — угол намотки, отсчитываемый против часовой стрелки от образующей цилиндра. Этот угол является постоянным по всей толщине цилиндра.

Соотношения, выражающие закон Гука, для цилиндра с двумя семействами волокон имеют вид [7]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \eta_1(a_i a_1 \varepsilon_{1j} + a_i a_2 \varepsilon_{2j} + a_i a_3 \varepsilon_{3j} + a_j a_1 \varepsilon_{1i} + a_j a_2 \varepsilon_{2i} + a_j a_3 \varepsilon_{3i}) +$$



$$\begin{aligned}
 & +\eta_2(b_i b_1 \varepsilon_{1j} + b_i b_2 \varepsilon_{2j} + b_i b_3 \varepsilon_{3j} + b_j b_1 \varepsilon_{1i} + b_j b_2 \varepsilon_{2j} + b_j b_3 \varepsilon_{3j}) + (a_i b_j + a_j b_i) \eta_3 \times \\
 & \times (a_1 b_1 \varepsilon_{11} + a_2 b_1 \varepsilon_{21} + a_3 b_1 \varepsilon_{31} + a_2 b_2 \varepsilon_{22} + a_3 b_2 \varepsilon_{32} + a_1 b_3 \varepsilon_{13} + a_2 b_3 \varepsilon_{23} + a_3 b_3 \varepsilon_{33}), \quad (2)
 \end{aligned}$$

где  $p$  — произвольное давление, введенное для компенсации условия несжимаемости,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \mu$  — упругие постоянные,  $a_i$  и  $b_i$  — компоненты векторов, задающих направление первого и второго семейств волокон. Для выбранных направлений (1) получим следующие выражения напряжений через деформации

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -p + 2\mu\varepsilon_{11}, \\
 \sigma_{22} &= -p + 2(\mu + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \eta_1 \cos^2 \varphi - \eta_2 \cos^2 \varphi - 2\eta_3 \cos^2 \varphi + \eta_3 \cos^4 \varphi)\varepsilon_{22} - \\
 & \quad - 2\eta_3 \varepsilon_{33} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 2(\eta_1 - \eta_2)\varepsilon_{23} \cos \varphi \sin \varphi, \\
 \sigma_{33} &= -p - 2\eta_3 \varepsilon_{22} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 2(\mu + \eta_1 \cos^2 \varphi + \eta_2 \cos^2 \varphi + \eta_3 \cos^4 \varphi)\varepsilon_{33} + 2(\eta_1 - \eta_2)\varepsilon_{23} \cos \varphi \sin \varphi, \\
 \sigma_{23} &= (\eta_1 - \eta_2) \cos \varphi \sin \varphi (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + (2\mu + \eta_1 + \eta_2)\varepsilon_{23}, \\
 \sigma_{13} &= (2\mu + \eta_1 \cos^2 \varphi + \eta_2 \cos^2 \varphi)\varepsilon_{13} + (\eta_1 - \eta_2)\varepsilon_{12} \cos \varphi \sin \varphi, \\
 \sigma_{12} &= (\eta_1 - \eta_2)\varepsilon_{13} \cos \varphi \sin \varphi + (2\mu + \eta_1 \sin^2 \varphi + \eta_2 \sin^2 \varphi)\varepsilon_{12}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

В цилиндрической системе координат связь между деформациями и перемещениями имеет вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (4)
 \end{aligned}$$

Трёхмерное условие несжимаемости материала записывается в форме

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0. \quad (5)$$

Для семейств волокон, обладающих одинаковыми механическими свойствами, справедливо равенство  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ . Подставляя напряжения (3), в уравнения движения, записанные в цилиндрической системе координат, получаем уравнения движения в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 & 2r\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - 2(\mu + 2\eta + \eta_3 - 2(\eta + \eta_3) \cos^2 \varphi - \eta_3 \cos^4 \varphi)u_r - (3\mu + 5\eta + 2\eta_3 + 2\eta_3 \cos^4 \varphi - \\
 & \quad - (5\eta + 4\eta_3) \cos^2 \varphi) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2r\eta_3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2r^2 \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + (\mu + \eta - \eta \cos^2 \varphi) \times \\
 & \quad \times \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} \right) + r^2 (\mu + \eta \cos^2 \varphi) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + r \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) - r^2 \frac{\partial p}{\partial r} - r^2 \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0, \\
 & \quad (3\mu + 5\eta + 2\eta_3 - 5\eta \cos^2 \varphi - 4\eta_3 \cos^2 \varphi + 2\eta_3 \cos^4 \varphi) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\
 & \quad + (\mu + \eta \sin^2 \varphi) r \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + r(\mu + \eta - 2\eta_3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} + \\
 & \quad + 2(\mu + 2\eta + \eta_3 - 2(\eta + \eta_3) \cos^2 \varphi + \eta_3 \cos^4 \varphi) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + r^2 (\mu + \eta) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - r \frac{\partial p}{\partial r} - r^2 \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = 0, \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r(\mu + \eta \cos^2 \varphi - 2\eta_3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \frac{\partial u_r}{\partial z} + r(\mu + \eta \cos^2 \varphi) \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} \right) + \\
 & \quad + (\mu + \eta) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + r(\mu + \eta - 2\eta_3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} + \\
 & \quad + 2r^2 (\mu + 2\eta \cos^2 \varphi + 2\eta_3 \cos^4 \varphi) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - r^2 \frac{\partial p}{\partial z} - r^2 \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0.
 \end{aligned}$$



Условие несжимаемости материала (5) в перемещениях примет вид

$$u_r + r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Считая внешние и внутренние поверхности цилиндра свободными от напряжений, запишем граничные условия в перемещениях:

$$\begin{cases} 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - p = 0, \\ (\mu + \eta \sin^2 \varphi) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = 0, \\ (\mu + \eta \cos^2 \varphi) \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0. \end{cases} \quad \text{при } r = R \pm h \quad (8)$$

Решение краевой задачи (6)–(8) будем искать в виде распространяющейся гармонической волны

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= U(r) \exp^{i(n\theta + kz - \omega t)}, & u_\theta(r, \theta, z, t) &= V(r) \exp^{i(n\theta + kz - \omega t)}, \\ u_z(r, \theta, z, t) &= W(r) \exp^{i(n\theta + kz - \omega t)}, & p(r, \theta, z, t) &= kP(r) \exp[i(n\theta + kz - \omega t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $n$  — волновое число по окружной координате,  $k$  — число волн вдоль образующей цилиндра,  $\omega$  — круговая частота, а неизвестные функции  $U(r)$ ,  $V(r)$ ,  $W(r)$ ,  $P(r)$  задают распределение амплитуды перемещений по толщине цилиндра.

Подставляя формы решений (9) в уравнения движения (6) и условие несжимаемости (7), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $U(r)$ ,  $V(r)$ ,  $W(r)$ ,  $P(r)$ . Выражая из условия несжимаемости  $V(r)$ , а из одного из уравнений движения —  $P(r)$ , и подставляя их в оставшиеся уравнения движения, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения третьего порядка относительно функций  $U(r)$  и  $W(r)$ :

$$\begin{aligned} &kr^3(\mu + 2c_1 - 2\eta_3 + 2c_3) \frac{d^2U}{dr^2} + kr^2(-\mu + 4c_1 + 2c_3) \frac{dU}{dr} + kr(\mu - n^2c_1 - r^2(k^2(\mu + \eta - c_1) - \\ &\quad - \rho\omega^2))U - r^2(2\mu + \eta - c_1) \left( r \frac{d^3W}{dr^3} + \frac{d^2W}{dr^2} \right) + r((\mu + \eta)n^2 + 2\mu + \eta - c_1 + \\ &\quad + r^2k^2(3\mu + 2\eta - c_1 + c_2 - \rho\omega^2)) \frac{dW}{dr} - 2((\mu + \eta)n^2 + r^2k^2(\eta_3 - \mu + 2c_1 - c_2))W = 0, \\ &kr^3c_1 \left( r \frac{d^3U}{dr^3} + 4 \frac{d^2U}{dr^2} \right) - kr^2(n^2(2\eta_3 - \mu + 2c_1 - 2c_2) - c_1 + \\ &\quad + r^2(k^2(\mu + \eta) - \rho\omega^2)) \frac{dU}{dr} - kr((n^2(\mu - 2c_1) + c_1 + r^2(k^2(\mu + \eta) - \rho\omega^2))U - \\ &\quad - r^2(n^2(2\mu + \eta - c_1) + r^2k^2c_1) \frac{d^2W}{dr^2} - r(n^2(2\mu + \eta - c_1) + 3r^2k^2c_1) \frac{dW}{dr} + \\ &\quad + (k^2r^4(k^2(\mu + \eta) - \rho\omega^2) + r^2n^2(2k^2(\mu + \eta + \eta_3) - \rho\omega^2) + n^4(\mu + \eta))W = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения  $c_1 = \mu + \eta \sin^2 \varphi$ ,  $c_2 = \eta_3 \cos^2 \varphi$ ,  $c_3 = \eta_3(1 - 2 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi)$ .

Решение системы (10) будем искать в виде степенных рядов Фробениуса, а именно:

$$U(r) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m r^{m+\alpha}, \quad W(r) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m r^{m+\alpha}, \quad (11)$$

где  $\alpha$  — неизвестный параметр. Подставляя ряды (11) в систему (10) и применяя условие нетривиальности решения, получим шесть значений параметра  $\alpha$  и для каждого из них свой набор рекуррентных соотношений для коэффициентов  $u_i$  и  $w_i$ . Таким образом, общее решение системы (10) представляет собой линейные комбинации шести частных решений в форме рядов Фробениуса:

$$U(r) = \sum_{k=1}^6 A_k U_k(r), \quad W(r) = \sum_{k=1}^6 A_k W_k(r), \quad (12)$$



где  $U_k(r) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{2m+1,k} r^{m+\alpha_k}$ ,  $W_k(r) = \sum_{m=1}^{\infty} w_{2m+1,k} r^{m+\alpha_k}$ .

Подставляя выражения (12) в граничные условия, получим однородную систему шести линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_k$ ,  $k = \overline{1,6}$ . Записывая условие существования нетривиального решения этой системы (равенство нулю её определителя), получим дисперсионное уравнение, связывающее волновое число и частоту.

На рис. 2 приведены графики дисперсионных кривых, показывающие зависимость частоты и фазовой скорости от волнового числа для материала с параметрами  $\mu = 1$ ,  $\eta = 2$ ,  $\eta_3 = 3$ ,  $\varphi = \pi/4$ ,  $h/R = 0.1$ .

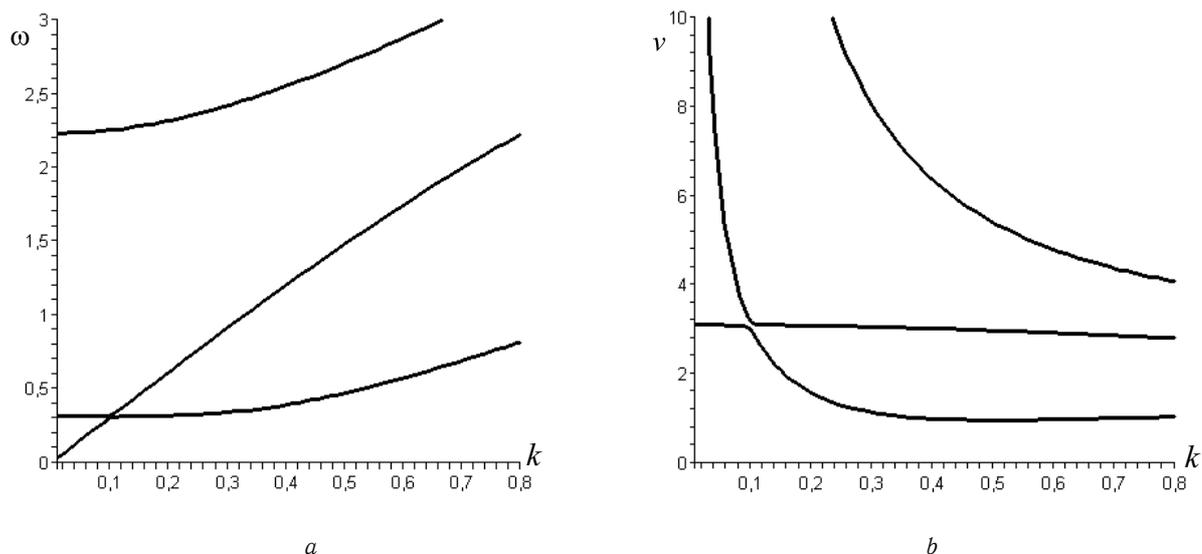


Рис. 2. Зависимость частоты (а) и фазовой скорости (b) от волнового числа для  $\varphi = \pi/4$

Корректность полученного дисперсионного уравнения подтверждает тот факт, что дисперсионные кривые, построенные для тонкостенной оболочки с параметрами  $\mu = 1$ ,  $\eta = 2$ ,  $\eta_3 = 3$ ,  $\varphi = \pi/2$ ,  $h/R = 0.001$  (рис. 3), качественно совпадают с дисперсионными кривыми для ортотропной пластины [8].

Кроме того, если параметры материала волокон и цилиндра одинаковы (рис. 4), то дисперсионные кривые совпадают с кривыми для изотропной оболочки [1].

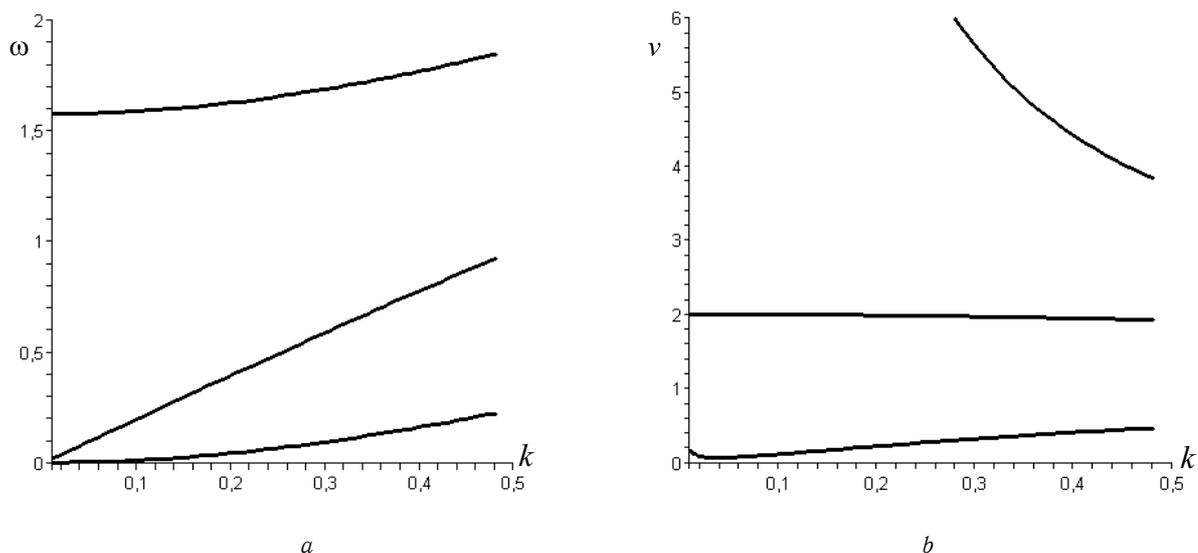


Рис. 3. Зависимость частоты (а) и фазовой скорости (b) от волнового числа для тонкостенного цилиндра и  $\varphi = \pi/2$

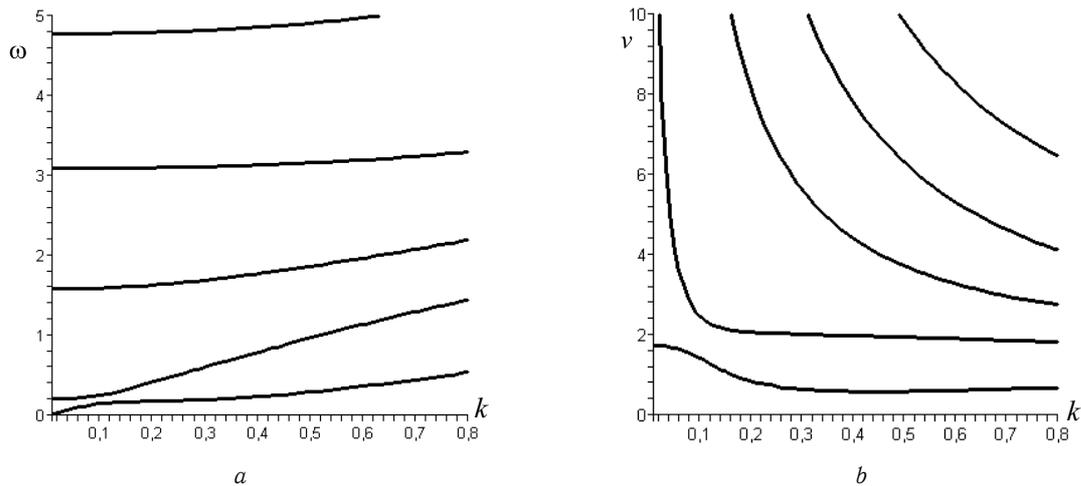


Рис. 4. Зависимость частоты (а) и фазовой скорости (b) для изотропного цилиндра

### Библиографический список

1. *Gazis D.C.* Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical Foundation // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1959. № 31. P. 568–573.
2. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.
3. *Мехтиев М.Ф., Фомина Н.И.* Свободные колебания трансверсально-изотропного полого цилиндра // *Механика композит. материалов.* 2002. Т. 38, № 1. С. 81–98.
4. *Mirsky I.* Axisymmetric vibration of orthotropic cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1964. № 36. P. 2106–2112.
5. *Ohnabe H., Nowinski J. L.* On the propagation of flexural waves in anisotropic bars // *Ing.-Archiv.* 1971. № 40. P. 327–338.
6. *Shuvalov A.L.* The frobenius power series solution for cylindrically anisotropic radially inhomogeneous elastic materials // *J. Mech. Appl. Math.* 2003. 56(3). P. 327–345.
7. *Spencer A. J. M.* Deformations of fibre-reinforced materials. Oxford: ClarendonPress, 1972.
8. *Nayfeh A. H.* The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. № 89. P. 1521–1526.

УДК 532.517.4:536.25

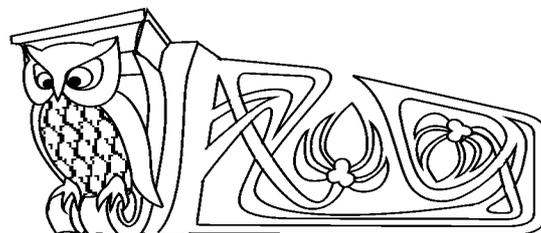
## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ТРЕХМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ

И.Б. Палымский

Современная гуманитарная академия (филиал), Новосибирск, кафедра математики  
E-mail: palymsky@hnet.ru

В трехмерной постановке рассмотрена задача о конвекции несжимаемой жидкости в прямоугольном параллелепипеде при подогреве снизу. Горизонтальные границы предполагаются свободными от касательных напряжений и изотермическими. Рассчитанный временной спектр температурных пульсаций в центре конвективной ячейки при надкритичности 410 хорошо согласуется с измеренным экспериментально при турбулентной конвекции в газообразном *He* при криогенной температуре. Для пульсаций скорости получены спектры Болджиано – Обухова  $k^{-11/5}$ ,  $k^{-3}$  и  $k^{-5}$ . Для температурных пульсаций получены спектры Колмогорова  $k^{-5/3}$  и  $k^{-2.4}$ . Такие спектры указывают на поведение температуры как пассивной примеси и на доминирование силы плавучести для скорости. Наличие ясно идентифицируемых спектров в исследуемом конвективном течении позволяет характеризовать данный процесс как развитую турбулентность.

**Ключевые слова:** моделирование, турбулентность, гидродинамика, конвекция, теплоперенос, спектр.



### Numerical Investigation of Spectrums of Three-Dimensional Turbulent Convection

I.B. Palymskiy

Modern University for the Humanities (Branch), Novosibirsk, Chair of Mathematics  
E-mail: palymsky@hnet.ru

The three-dimensional turbulent convective flows of viscous and incompressible fluid in a rectangular parallelepiped numerically is simulated at heating from below. The horizontal boundaries are stress-free and isothermal. The calculated time spectrum of temperature pulsations at supercriticality is equal to 410 in centre of convective cell has a good agreement with experimental data for convection in cryogenic He. The Obukhov – Bolgiano spectra  $k^{-11/5}$ ,  $k^{-3}$  and  $k^{-5}$  have been found for velocity pulsations. Also for temperature pulsations the Kolmogorov  $k^{-5/3}$  and  $k^{-2.4}$  are obtained. Such spectrums denote on temperature behavior as passive admixture and that dominant force for velocity is buoyancy.

**Key words:** simulation, turbulence, hydrodynamics, convection, heat transfer, spectrum.