



УДК 517.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ В СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛИГОНАЛЬНОЙ ИЗВЕСТНОЙ ЧАСТЬЮ ГРАНИЦЫ

С. Р. Насыров, Л. Ю. Низамиева*

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
кафедра математического анализа

*Казанский национальный исследовательский технический
университет,

кафедра вычислительной математики

E-mail: snasyrov@ksu.ru, NizamievaLU@yandex.ru

Рассматривается смешанная обратная краевая задача по параметру x в случае, когда известная часть границы L_z^1 является полигоном. Интегральное представление решения зависит от вещественных параметров, которые являются прообразами вершин при конформном отображении. По аналогии с интегралами Кристоффеля – Шварца эти параметры названы акцессорными. Предлагается новый метод определения акцессорных параметров, основанный на рассмотрении однопараметрического семейства решений задачи, соответствующих случаю, когда известная часть границы является объединением двух лучей и удлиняющегося разреза, конец которого движется вдоль первоначальной ломаной L_z^1 .

Ключевые слова: краевые задачи со свободной границей, краевая задача Гильберта, акцессорные параметры.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D_z – жорданова область на плоскости, ограниченная кривой L_z , которая состоит из двух дуг L_z^1 и L_z^2 , причем L_z^1 известна, а L_z^2 является искомой. Обозначим через $z^* = x^* + iy^*$ и $z^{**} = x^{**} + iy^{**}$ точки стыка дуг L_z^1 и L_z^2 . Смешанная обратная краевая задача по параметру x состоит в определении области D_z и аналитической в ней функции $w = w(z)$, которая конформно отображает D_z на жорданову область D_w , по следующим краевым условиям.

1) граница D_w состоит из двух ляпуновских дуг, пересекающихся под ненулевыми углами, причем при отображении $w = w(z)$ дуге L_z^1 соответствует дуга L_w^1 , а L_z^2 – дуга L_w^2 .

2) дуга L_z^2 является графиком непрерывной функции $y = g(x)$, $x^* \leq x \leq x^{**}$, при этом точкам вида $x + ig(x) \in L_z^2$ соответствуют точки $\varphi(x) + i\psi(x) \in L_w^2$, $x^* \leq x \leq x^{**}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции (рис. 1).

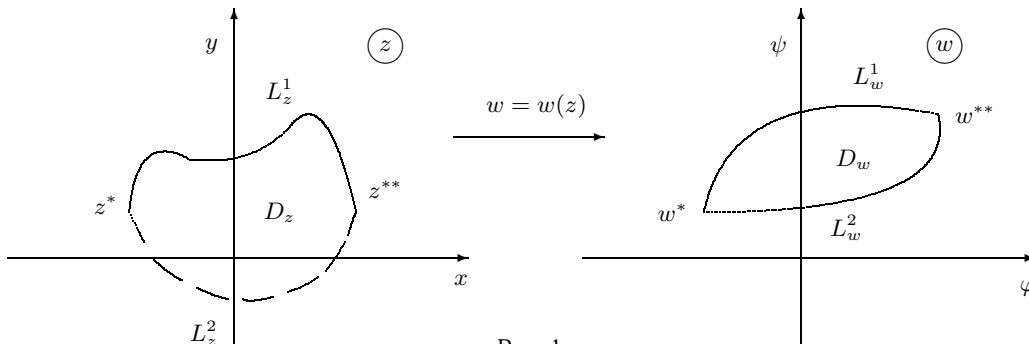
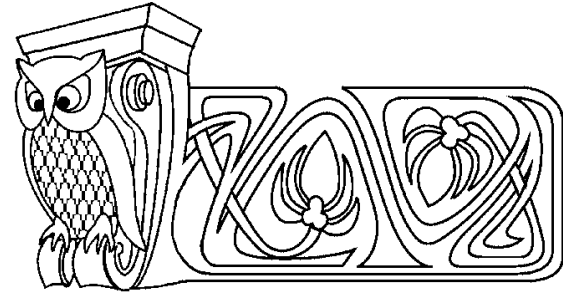


Рис. 1



Finding of Accessory Parameters for Mixed Inverse Boundary Value Problem with Polygonal Known Part of Boundary

S.R. Nasyrov, L.Yu. Nizamieva*

Kazan (Volga Region) Federal University,

Chair of Mathematical Analysis

*Kazan National Research Technical University,

Chair of Computing Mathematics

E-mail: snasyrov@ksu.ru, NizamievaLU@yandex.ru

We consider a mixed inverse boundary value problem with respect to parameter x for the case when the known part of the boundary L_z^1 is a polygonal line. Integral representation of solution to the problem depends on real parameters being the pre-images of the vertices of L_z^1 under conformal mapping. By analogy with Schwartz – Christoffel integrals, we name them accessory parameters. It is suggested a new method of determining the accessory parameters. It is based on consideration of one-parametric family of solutions to the problem corresponding to the case when the known part of the boundary is the union of two rays and the stretching slit the endpoint of which goes along the given polygonal line L_z^1 .

Key words: boundary value problems with free boundary, Hilbert boundary value problem, accessory parameters.



Впервые эту задачу поставил и исследовал В. Н. Монахов [1]. Основная его идея заключалась в замене кривой L_z^1 , близкой ломаной с вершинами в точках z_1, z_2, \dots, z_n ($z_1 = z^{**}, z_n = z^*$). В. Н. Монахов установил, что разрешимость задачи в случае, когда известная часть границы является ломаной, существенно зависит от величины углов $\alpha_1\pi, \alpha_n\pi$, которые образует эта ломаная с лучами, исходящими вниз из ее концов. В [1] детально исследован случай, когда величины этих углов меньше π .

В [2] было замечено, что с использованием результатов В. Н. Монахова можно доказать разрешимость задачи на полигональных римановых поверхностях, если $\alpha_1, \alpha_n < 1$. В [3] рассмотрен случай, когда $\alpha_1 > 1$ или $\alpha_n > 1$, а также доказана разрешимость задачи для достаточно произвольных границ. Кроме того, в [2, 3] были исправлены некоторые неточности в исследовании задачи В. Н. Монаховым, отмеченные в [4].

Заметим, что смешанная обратная краевая задача по параметру x исследовалась в работах [5–13]. В статьях [14–16] была рассмотрена внешняя смешанная обратная краевая задача по параметру x , получены аналоги уравнения Ф. Д. Гахова и доказана его разрешимость.

Опишем кратко метод В. Н. Монахова исследования задачи. Он предложил конформно отобразить область D_w на верхнюю полуплоскость D_ζ функцией $\zeta = \zeta(w)$ и искать функцию $z = z(\zeta)$, обратную к функции $\zeta = \zeta(w(z))$. Поскольку по функции $z = z(\zeta)$ область D_z и функция $w = w(z)$ сразу определяются, то в дальнейшем для удобства будем называть функцию $z = z(\zeta)$ решением задачи.

Функция $z(\zeta)$ является решением нелинейной задачи Гильберта. Как уже отмечалось, В. Н. Монахов [1] предложил линеаризовать эту задачу, заменяя кривую L_z^1 достаточно близкой ломаной с вершинами в точках z_1, z_2, \dots, z_n , где $z_1 = z^{**}, z_n = z^*$ (рис. 2).

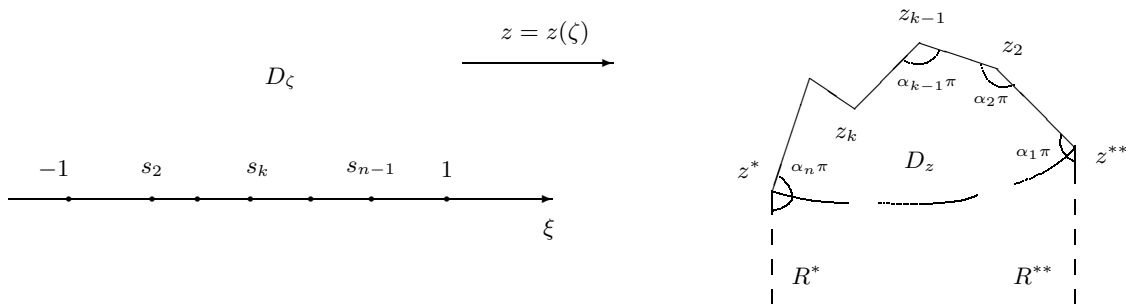


Рис. 2

В дальнейшем будем рассматривать только эту линеаризованную задачу и считать, что L_z^1 — полигон. Пусть ломаной L_z^1 в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ соответствует отрезок $[-1, 1]$, вершинам z_k ломаной соответствуют точки s_k , а L_z^2 переходит в участок $\{\xi \in \mathbb{R} \mid |\xi| \geq 1\}$. Пусть уравнение прямой, на которой лежит j -е звено ломаной L_z^1 , имеет вид $a_jx + b_jy = c_j$. Тогда для функции $z = z(\zeta) = x(\zeta) + iy(\zeta)$ имеем следующую краевую задачу Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$a_jx(\xi) + b_jy(\xi) = c_j, \quad \xi \in (s_j, s_{j+1}), \quad 1 \leq j \leq n - 1,$$

$$x(\xi) = H(\xi), \quad |\xi| > 1.$$

Здесь функция $H(\xi)$ однозначно определяется из краевых условий задачи, она непрерывно дифференцируема при $|\xi| > 1$, ее производная $h(\xi) = H'(\xi)$ имеет в точках $\xi = \pm 1$ интегрируемые особенности, кроме того, $h(\xi) \sim c\xi^{-2}, \xi \rightarrow \infty$.

Тогда для производной $dz/d\zeta$ получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} a_jx'(\xi) + b_jy'(\xi) &= 0, \quad \xi \in (s_j, s_{j+1}), \quad 1 \leq j \leq n - 1, \\ x'(\xi) &= h(\xi), \quad |\xi| > 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Отметим, что поведение производной $dz/d\zeta$ искомого отображения в точках s_j и на бесконечности нетрудно исследовать с использованием теории граничного поведения конформных отображений и



свойств интегралов типа Коши (см. подробнее [1–3]). Будем искать решение краевой задачи в классе функций с нужным поведением в точках разрыва коэффициентов в граничных условиях.

Как показано в [2, 3], необходимым и достаточным условием разрешимости задачи является тот факт, что ломаная L_z^1 , дополненная вертикальными лучами R^* и R^{**} , идущими из ее концов вниз, является границей многоугольной римановой поверхности (однолистной или двулистной, если лучи трансверсально пересекают ломаную в неконцевых точках). Будем считать, что это условие выполнено. Обозначим через $\alpha_j\pi$ углы этой многоугольной римановой поверхности в точках z_j .

В случае, когда $\alpha_1 < 1$, $\alpha_n < 1$, решение краевой задачи (1) в описанном выше классе решений единственно (см. [1–3]). Решая эту задачу, получаем интегральное представление для функции $z(\zeta)$:

$$z(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{t_1}^{\zeta} \Omega(\xi) \Psi(\xi) d\xi, \tag{2}$$

$$\Psi(\xi) = \int_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) d\omega}{\Omega(\omega)(\omega - \xi)}, \quad \Omega(\xi) = \prod_{j=1}^n (\xi - s_j)^{\alpha_j - 1},$$

которое зависит от параметров s_j , причем $s_1 = -1$, $s_n = 1$, а s_k , $2 \leq k \leq n - 1$, — неизвестны.

Отметим, что ситуация здесь похожа на ту, которая имеет место для интегралов Кристоффеля – Шварца: при фиксации параметров $-1 < s_2 < s_3 < \dots < s_{n-1} < 1$ произвольным образом получается решение задачи, но не для ломаной L_z^1 , а для некоторой другой ломаной \tilde{L}_z^1 , стороны которой параллельны сторонам L_z^1 , а длины сторон, вообще говоря, другие. Назовем параметры s_k , $2 \leq k \leq n - 1$, по аналогии с интегралами Кристоффеля – Шварца, аксессуарными. Различные способы нахождения аксессуарных параметров для интегрального представления (2) были рассмотрены в работах [12, 17].

В этой статье мы предлагаем новый приближенный метод нахождения аксессуарных параметров в (2) — так называемый метод движущегося разреза. Для простоты считаем, что заданная ломаная L_z^1 располагается в вертикальной полосе, ограниченной прямыми, проходящими через ее концы (это условие не является очень ограничительным, результаты статьи могут быть легко распространены на общий случай). Наш метод основан на рассмотрении однопараметрических семейств решений задачи для ломаных, которые состоят из двух вертикальных лучей и удлиняющегося разреза, конец которого движется по заданной ломаной L_z^1 . Подобный метод ранее был предложен в работе [18] для интегралов Кристоффеля – Шварца и идейно близок к методу П.П. Куфарева (см., напр., [19]) нахождения аксессуарных параметров в таких интегралах. Отметим, что в отличие от метода П.П. Куфарева, в [18] используется аппарат краевых задач Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами и вариации решений таких задач, эта же идея применяется и в настоящей статье.

1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим семейство решений смешанной обратной краевой задачи по параметру x в случае, когда известная часть границы состоит из двух лучей: $L^* = \{x = x^*, y \geq y^*\}$, $L^{**} = \{x = x^{**}, y \geq y^{**}\}$ и удлиняющегося разреза, конец которого пробегает ломаную L_z^1 от точки z_1 до точки z_n . В случае, когда конец разреза располагается на $(k - 1)$ -м звене, получаем разрез вдоль ломаной с вершинами в точках $z_1 = x^{**} + iy^{**}$, $z_2 \dots, z_{k-1}$ и точке \tilde{z}_k , которая является подвижным концом ломаной (рис. 3). Обозначим через $\alpha_j\pi$, $2 \leq j \leq k - 1$, углы ломаной L_z^1 в точках z_j ; пусть $\alpha_1\pi$ — угол между звеном z_1z_2 и лучом R^{**} .

Интегральное представление решения в этом случае имеет вид

$$z = z(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{t_1}^{\zeta} \Pi(\xi, \vec{t}) \Phi(\xi, \vec{t}) d\xi, \tag{3}$$

где

$$\Phi(\xi, \vec{t}) = \int_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) d\omega}{\Pi(\omega, \vec{t})(\omega - \xi)},$$



$$\Pi(\xi, \vec{t}) = (\xi - t_1)^{\alpha_1 - 1} (\xi - t_k) (\xi - t_{2k-1})^{-\alpha_1} (\xi - t_{2k})^{-1} \prod_{j=2}^{k-1} \left(\frac{\xi - t_j}{\xi - t_{2k-j}} \right)^{\alpha_j - 1},$$

$-1 = t_1 < t_2 < \dots < t_{2k} < t_{2k+1} = 1$, вектор $\vec{t} = (t_2, \dots, t_{2k})$. Точки t_j , $2 \leq j \leq 2k$, назовем акцессорными параметрами. Отметим, что точка t_k соответствует концу разреза, точкам t_j и t_{2k-j} соответствуют простые концы области D_z с носителем в точке z_j , $1 \leq j \leq k-1$, а точке t_{2k} — простой конец с носителем в ∞ .

Теорема. Акцессорные параметры удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dt_j}{d\tau} &= \frac{1 - t_j^2}{(t_j - t_k)\Phi(t_j, \vec{t})}, \quad 2 \leq j \leq 2k, \quad j \neq k, \\ \frac{dt_k}{d\tau} &= \frac{1 - t_k^2}{\Phi(t_k, \vec{t})} \left\{ \frac{\alpha_1}{t_k + 1} - \frac{\alpha_1}{t_k - t_{2k-1}} + \frac{1}{t_k - 1} + \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_j} - \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_{2k-j}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом возрастание параметра τ соответствует увеличению длины разреза.

Доказательство. Рассмотрим вариацию δz функции z и ее производной в случае, когда варьируется длина звена $z_{k-1}\tilde{z}_k$ (рис. 3).

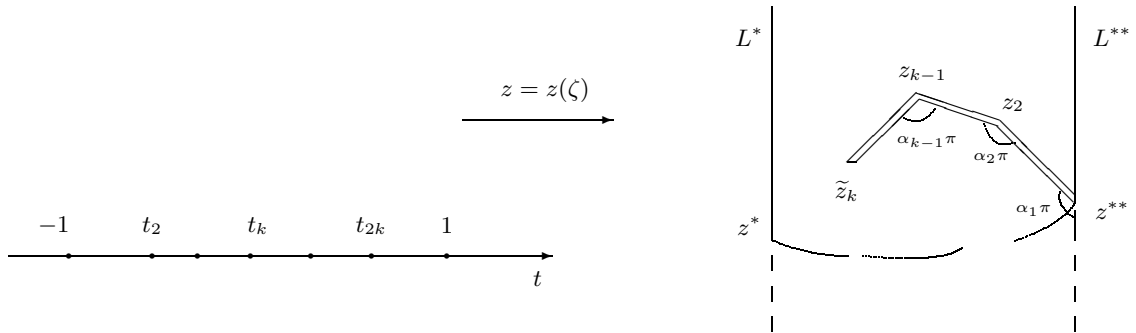


Рис. 3

В силу (3) имеем

$$\frac{dz(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{\pi i} \Pi(\zeta, \vec{t}) \Phi(\zeta, \vec{t}).$$

Используя формулу логарифмического дифференцирования, получаем

$$\delta \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{\pi i} \Pi(\zeta, \vec{t}) \left[\Phi(\zeta, \vec{t}) \delta \ln \Pi(\zeta, \vec{t}) - \int_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) \delta \ln \Pi(\omega, \vec{t}) d\omega}{\Pi(\omega, \vec{t})(\omega - \zeta)} \right], \quad (5)$$

где

$$\delta \ln \Pi(\zeta, \vec{t}) = -\frac{\delta t_k}{\zeta - t_k} + \frac{\alpha_1 \delta t_{2k-1}}{\zeta - t_{2k-1}} + \frac{\delta t_{2k}}{\zeta - t_{2k}} - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{\zeta - t_j} \delta t_j + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{\zeta - t_{2k-j}} \delta t_{2k-j}.$$

Исследуем поведение функции δz в окрестности точек t_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$). Используя равенство $\delta(dz(\zeta)/d\zeta) = d(\delta z(\zeta))/d\zeta$ и известные свойства интеграла типа Коши со степенной особенностью плотности на концах кривой, из (3) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta z(\zeta) &= O(1), & \zeta \rightarrow t_1, & \quad \delta z(\zeta) = O(1), & \zeta \rightarrow t_k, \\ \delta z(\zeta) &= O((\zeta - t_{2k-1})^{-\alpha_1}), & \zeta \rightarrow t_{2k-1}, & \quad \delta z(\zeta) = O((\zeta - t_{2k})^{-1}), & \zeta \rightarrow t_{2k}, \end{aligned}$$

а при $2 \leq j \leq k-1$ —

$$\begin{aligned} \delta z(\zeta) &= O(1) \quad \text{при } \alpha_j > 1, & \delta z(\zeta) &= O((\xi - t_j)^{\alpha_j - 1}) \quad \text{при } \alpha_j < 1, & \zeta \rightarrow t_j, \\ \delta z(\zeta) &= O(1), \quad \text{при } \alpha_j < 1, & \delta z(\zeta) &= O((\xi - t_{2k-j})^{1 - \alpha_j}) \quad \text{при } \alpha_j > 1, & \zeta \rightarrow t_{2k-j}. \end{aligned}$$



Пусть уравнение прямой, на которой лежит j -е звено ломаной, имеет вид $a_j x + b_j y = c_j$. Тогда функция $z(\zeta)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{aligned} a_j x(\xi) + b_j y(\xi) &= c_j, & \xi \in (t_j, t_{j+1}) \cup (t_{2k-j-1}, t_{2k-j}), \\ x(\xi) &= x^{**}, & \xi \in (t_{2k-1}, t_{2k}), \\ x(\xi) &= x^*, & \xi \in (t_{2k}, t_{2k+1}), \\ x(\xi) &= H(\xi), & |\xi| > 1. \end{aligned}$$

При варьировании длины разреза ломаная остается неизменной (за исключением величины последнего звена), поэтому $\delta a_j = \delta b_j = \delta c_j = 0$ и вариация $\delta z(\zeta)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{aligned} a_j \delta x(\xi) + b_j \delta y(\xi) &= c_j, & \xi \in (t_j, t_{j+1}) \cup (t_{2k-j-1}, t_{2k-j}), \\ \delta x(\xi) &= 0, & \xi \in (t_{2k-1}, t_{2k}) \cup (t_{2k}, t_{2k+1}), \\ \delta x(\xi) &= 0, & |\xi| > 1. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $\delta z(\zeta)$ ограничена на бесконечности и что $\delta z(t_{2k+1}) = 0$, с учетом поведения этой функции в точках t_j , $1 \leq j \leq 2k$, получаем

$$\delta z(\zeta) = Ai \prod_{j=2}^{k-1} \left(\frac{\zeta - t_j}{\zeta - t_{2k-j}} \right)^{\alpha_j - 1} (\zeta + 1)^{\alpha_1} (\zeta - t_{2k-1})^{-\alpha_1} (\zeta - t_{2k})^{-1} (\zeta - 1),$$

или

$$\delta z(\zeta) = Ai \Pi(\zeta, \vec{t}) (\zeta^2 - 1) (\zeta - t_k)^{-1},$$

где A — вещественное число, не зависящее от ζ .

Подсчитаем производную функции $\delta z(\zeta)$:

$$\frac{d(\delta z(\zeta))}{d\zeta} = Ai \frac{\Pi(\zeta, \vec{t}) (\zeta^2 - 1)}{\zeta - t_k} \left[\frac{d \ln \Pi(\zeta, \vec{t})}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta + 1} - \frac{1}{\zeta - t_k} \right], \quad (6)$$

где

$$\frac{d \ln \Pi(\zeta, \vec{t})}{d\zeta} = \frac{\alpha_1 - 1}{\zeta + 1} - \frac{\alpha_1}{\zeta - t_{2k-1}} + \frac{1}{\zeta - t_k} - \frac{1}{\zeta - t_{2k}} + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{\zeta - t_j} - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{\zeta - t_{2k-j}}.$$

Приравнявая $\delta(dz(\zeta)/d\zeta)$ и $d(\delta z(\zeta))/d\zeta$, из (5) и (6) получаем

$$\frac{1}{\pi i} \left[\Phi(\zeta, \vec{t}) \delta \ln \Pi(\zeta, \vec{t}) - \int_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) \delta \ln \Pi(\omega, \vec{t}) d\omega}{\Pi(\omega, \vec{t}) (\omega - \zeta)} \right] = Ai \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta - t_k} \left[\frac{d \ln \Pi(\zeta, \vec{t})}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta + 1} - \frac{1}{\zeta - t_k} \right].$$

Сравнивая вычеты функций, стоящих в обеих частях полученного соотношения, в точках t_j , получаем

$$\begin{aligned} \delta t_j &= \frac{A\pi(t_j^2 - 1)}{(t_j - t_k)\Phi(t_k, \vec{t})}, & 2 \leq j \leq 2k, \quad j \neq k, \\ \delta t_k &= \frac{A\pi(t_k^2 - 1)}{\Phi(t_k, \vec{t})} \left\{ \frac{\alpha_1}{t_k + 1} - \frac{\alpha_1}{t_k - t_{2k-1}} - \frac{1}{t_k - t_{2k}} + \frac{1}{t_k - 1} + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_j} - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_{2k-j}} \right\}. \end{aligned}$$

Введем обозначение: $A\pi = -\delta\tau$. Окончательно будем иметь

$$\frac{\delta t_j}{\delta\tau} = \frac{1 - t_j^2}{(t_j - t_k)\Phi(t_k, \vec{t})}, \quad 2 \leq j \leq 2k, \quad j \neq k,$$



$$\frac{\delta t_k}{\delta \tau} = \frac{1 - t_k^2}{\Phi(t_k, \vec{t})} \left\{ \frac{\alpha_1}{t_k + 1} - \frac{\alpha_1}{t_k - t_{2k-1}} - \frac{1}{t_k - t_{2k}} + \frac{1}{t_k - 1} + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_j} - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_{2k-j}} \right\}.$$

Считая τ вещественным параметром, от которого зависит решение, можем рассматривать полученную систему как систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют акцессорные параметры.

Выясним знак константы A . Докажем, что $A < 0$, когда длина разреза возрастает. Рассмотрим для определенности случай $\alpha_{k-1} > 1$ (случай $\alpha_{k-1} < 1$ рассматривается аналогично). Поскольку $\arg \Pi(\xi, \vec{t}) = \beta_k$ является постоянной на интервале (t_{k-1}, t_k) , длина k -й стороны ломаной, соответствующей отрезку $[t_{k-1}, t_k]$, равна

$$l_k = \frac{1}{\pi} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\Pi(\xi, \vec{t})| \Phi(\xi, \vec{t}) dt = \frac{e^{-i\beta}}{\pi} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Pi(\xi, \vec{t}) \Phi(\xi, \vec{t}) dt.$$

Тогда с учетом того что подинтегральное выражение обращается в нуль в точках t_{k-1} и t_k , получаем

$$\begin{aligned} \delta l_k &= ie^{-i\beta} \delta \left(\frac{1}{\pi i} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Pi(\xi, \vec{t}) \Phi(\xi, \vec{t}) dt \right) = ie^{-i\beta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \delta \left(\frac{1}{\pi i} \Pi(\xi, \vec{t}) \Phi(\xi, \vec{t}) dt \right) = \\ &= ie^{-i\beta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \delta \left(\frac{dz(\xi, \vec{t})}{d\xi} \right) d\xi = ie^{-i\beta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{d \delta z(\xi, \vec{t})}{d\xi} \right) d\xi = ie^{-i\beta} \delta z(t_k, \vec{t}) = \\ &= ie^{-i\beta} Ai \lim_{t \rightarrow t_k^-} \Pi(t, \vec{t})(t^2 - 1)(t - t_k)^{-1} = -A \lim_{t \rightarrow t_k^-} |\Pi(t, \vec{t})(t^2 - 1)(t - t_k)^{-1}| > 0, \end{aligned}$$

если $A < 0$. Таким образом, возрастание параметра τ соответствует увеличению длины разреза.

Тем самым теорема доказана. \square

3. ОПИСАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА

Теперь опишем процедуру нахождения акцессорных параметров t_2, \dots, t_{n-1} в интегральном представлении (3). Она состоит из $(n - 1)$ этапа. На первом этапе рассматривается однопараметрическое семейство решений, соответствующих случаю, когда известная часть границы является объединением лучей L^* , L^{**} и разреза вдоль отрезка $z_1 \tilde{z}_2$, причем конец разреза \tilde{z}_2 движется по стороне $z_1 z_2$ ломаной L_z^1 . Для нахождения акцессорных параметров $t_2^{(1)}, t_3^{(1)}, t_4^{(1)}$ (индекс вверху означает номер этапа) имеем систему (4) при $k = 1$. В качестве начального условия имеем $t_2^{(1)}(0) = t_3^{(1)}(0) = -1$, $t_4^{(1)} = t_{40}$. Здесь t_{40} находится из условия: краевая задача Гильберта для функции $z(\zeta)$ в верхней полуплоскости D_ζ

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z(\xi) &= H(\xi), & |\xi| > 1, \\ \operatorname{Re} z(\xi) &= x^{**}, & -1 < \xi < t_{40}, \\ \operatorname{Re} z(\xi) &= x^*, & t_{40} < \xi < 1, \end{aligned}$$

имеет решение в классе функций, непрерывных во всех точках вещественной оси, за исключением точки t_{40} , в которой имеется логарифмическая особенность, причем $\operatorname{Im} z(-1) = y^{**}$, $\operatorname{Im} z(1) = y^*$. В результате решения системы (4) находим значения параметров $t_{2*}^{(1)}, t_{3*}^{(1)}, t_{4*}^{(1)}$, при которых длина разреза равна длине первой стороны ломаной L_z^1 .

На втором этапе решаем систему (4) при $k = 2$, при этом в качестве начальных условий используем значения параметров, полученных на первом этапе:

$$t_2^{(2)}(0) = t_3^{(2)}(0) = t_4^{(2)}(0) = t_{2*}^{(1)}, \quad t_5^{(2)}(0) = t_{3*}^{(1)}, \quad t_6^{(2)}(0) = t_{4*}^{(1)}.$$

Как и на первом этапе, решаем систему (4) на таком отрезке, чтобы в конечный момент длина второй стороны разреза была равна заданной длине второй стороны ломаной L_z^1 . Соответствующие значения параметров обозначим через $t_{j*}^{(2)}$, $2 \leq j \leq 6$. Эти значения используются в качестве начальных на третьем этапе и т. д.



Наконец, на $(n-1)$ -м этапе получим значения параметров $t_{j*}^{(n-1)}$, $2 \leq j \leq 2n$, при этом $t_{j*}^{(n-1)} = 1$, $n \leq j \leq 2n$, а значения параметров $t_{j*}^{(n-1)}$ при $2 \leq j \leq n-1$ дают искомые значения параметров s_j в интегральном представлении (3) решения исходной задачи.

В качестве примера применения метода нами было получено приближенное решение задачи в случае, когда известная часть границы области D_z — это заданная четырехзвенная ломаная с вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(1/2; 1/2)$, $C(-1/2; 1/2)$, $D(-1, 0)$, $H(\xi) = \operatorname{Re} z = -1/\xi$, $|\xi| \geq 1$. В результате достаточно быстро и с хорошей точностью были получены значения аксессуарных параметров $s_2 = -0.5164\dots$, $s_3 = 0.5164\dots$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-97008-р_поволжье и 11-01-00762).

Библиографический список

1. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, 1977. 424 с.
2. Насыров С. Р. О методе полигональной аппроксимации в смешанных обратных краевых задачах по параметру x . Казань, 1982. Деп. в ВИНТИ 17.05.1982, № 2459-82 ДЕП.
3. Насыров С. Р. Смешанная обратная краевая задача на римановых поверхностях // Изв. вузов. Математика. 1990. № 10. С. 25–36.
4. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Салимов Р. Б. О книге В. Н. Монахова «Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений» // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1978. Вып. 15. С. 202–212.
5. Салимов Р. Б., Стрежнева Е. В. К решению обратной смешанной краевой задачи. Казань, 1989. Деп. в ВИНТИ 29.06.89, № 4312–В89.
6. Салимов Р. Б., Стрежнева Е. В. Решение обратной смешанной краевой задачи для двусвязной области в видоизмененной постановке. Казань, 1990. Деп. в ВИНТИ 29.12.90. № 0487–В90.
7. Стрежнева Е. В. Решение обратной краевой задачи для двусвязной области в одном случае. Казань, 1990. Деп. в ВИНТИ 29.12.90, № 2736–В91.
8. Глюстен С. Р. Смешанная краевая задача со свободной границей в неоднородных областях // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1986. № 76. С. 148–156.
9. Глюстен С. Р. Неоднородные отображения со свободной границей // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1988. № 86. С. 141–148.
10. Глюстен С. Р. Априорные оценки решений смешанной краевой задачи со свободной границей для аналитических функций // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1989. № 92. С. 108–121.
11. Глюстен С. Р. Геометрические свойства решений смешанной обратной краевой задачи со свободной границей // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1990. № 97. С. 114–123.
12. Монахов В. Н. Об одном вариационном методе решения задач по гидродинамике со свободной границей // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1106–1121.
13. Насыров С. Р., Фаизов И. З. Локальная единственность решения смешанной обратной краевой задачи на полигональных римановых поверхностях с простыми точками ветвления // Учен. записки Казанск. гос. ун-та. 2006. Т. 48, кн. 2. С. 97–108.
14. Насыров С. Р., Галиуллина Г. Р. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 25–30.
15. Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности с простой точкой ветвления на бесконечности // Учен. записки Казанск. гос. ун-та. 2008. Т. 150. Сер. физ.-мат., кн. 1. С. 91–101.
16. Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи на римановой поверхности с точкой ветвления на бесконечности произвольного порядка // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Сер. естественнаучн. 2009. № 4. С. 28–42.
17. Лаврентьев Г. В. Численные расчеты задач гидродинамики со свободными границами на основе аналитического представления решений // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1970. Вып. VI. С. 208–212.
18. Низамиева Л. Ю. Использование краевых задач при нахождении аксессуарных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца. Казань, 2010. Деп. в ВИНТИ 06.07.10, № 421–В2010.
19. Александров И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М., 1976. 344 с.