Библиографический список

1. *Zaremba, S.* Sur le principe de minimum / S. Zaremba // Bull. intern. l'Acad. d. sciences de Cracovie. Cl. des sciences math. et natur. – 1909. – № 7. – P. 197–264.
2. *Weil, H.* The method of orthogonal projections in potential theory / H. Weil // Duke Math. J. – 1940. – V. 7. – P. 411–444.
3. *Михлин, С.Г.* Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
4. *Reissner, H.* Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen / H. Reissner // Z. Angew. Math. Mech. – 1931. – V. 11, № 1. – P. 1–8.
5. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В Фомин. – М.: Наука, 1968. – 543 с.
6. *Nyashin, Y.* Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain / Y. Nyashin, V. Lokhov, F. Ziegler // Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – V. 85. – P. 557–570.
7. *Поздеев, А.А.* Остаточные напряжения: теория и приложения / А.А. Поздеев, Ю.И. Няшин, П.В. Трусов. – М.: Наука, 1982. – 112 с.
8. *Tall, L.* Residual stress and column instability under axial loads / L. Tall, A. Huber, Beedle // XII Annual Assembly, Liege, June 13–19, 1960. – Liege: Intern. Institute of Welding, 1960. – P. 381–396.

УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

П.Ф. Недорезов[1], О.М. Ромакина[2], Р.А. Сафонов[1]

[1]Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики
E-mail: p1934n@yandex.ru, safonovra@gmail.com

[2]Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел,
E-mail: romakinaom@hotbox.ru,

В статье изложена методика численного решения задач о поиске критических частот вязкоупругих пластинок при изгибных установившихся колебаниях. Решение основано на понижении размерности задачи с помощью модифицированного метода сплайн-коллокации и численном решении получившейся краевой задачи методом дискретной ортогонализации. Подробно описано применение этого подхода при различных вариантах граничных условий.

Ключевые слова: пластинка, изгиб, численное решение, сплайны, дискретная ортогонализация.

Modified Spline Collocation Method in the Problems of Thin Rectangular Viscoelastic Plate Vibrations

P.F. Nedorezov[1], O.M. Romakina[2], R.A. Safonov[1]

[1]Saratov State University,
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics
E-mail: p1934n@yandex.ru, safonovra@gmail.com

[2]Saratov State University,
Chair of Computer's Algebra and Theory of Numbers
E-mail: romakinaom@hotbox.ru

Numerical method for evaluation of critical frequencies during steady-state bending vibrations of viscoelastic plate is presented. The solution is based on applying modified spline collocation method for lowering the problem's dimension and numerical solving of the obtained problem via discrete orthogonalization method. The application of this approach with different boundary conditions is examined in detail.

Key words: plate, bending, numerical solution, spline, discrete orthogonalization.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об установившихся поперечных колебаниях тонкой прямоугольной полимерной пластинки в рамках классической теории Кирхгофа при различных частных способах закрепления двух противоположных сторон рассматривалась ранее в работах [1–5]. В настоящей работе приводится методика численного решения задачи об установившихся колебаниях такой пластинки при произвольных граничных условиях на боковой поверхности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Тонкая пластинка с размерами в плане a, b и толщиной h совершает установившиеся колебания под действием распределенной по поверхности $z = -h/2$ нагрузки интенсивности

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \cos \omega t. \qquad (1)$$

Материал пластинки считается вязкоупругим с независящими от температуры свойствами:

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2}\int\limits_{\tau=-\infty}^{t} K(t-\tau)\,(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_{\text{H}})\,d\tau \qquad (x \Leftrightarrow y),$$
$$\tau_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)}\int\limits_{\tau=-\infty}^{t} K(t-\tau)\,\gamma_{xy}d\tau, \qquad \nu = \text{const}. \tag{2}$$

Перемещения и внутренние усилия в пластинке, соответствующие нагрузке (1), представляются в виде

$$Z(x,\,y,\,z,\,t) = \sum_{k=1}^{2} Z^{(k)}(x,\,y,\,z)\,\cos\left[\omega\,t - (k-1)\pi/2\right]. \tag{3}$$

Система уравнений для определения составляющих прогиба $w^{(k)}$ $(k = 1,\,2)$ при предположении, что выполняются гипотезы классической теории изгиба Кирхгофа, получена в работе [1]. Для безразмерных составляющих $W_k = h^{-1}w^{(k)}$ $(k = 1,\,2)$ эта система в безразмерных переменных $\xi = a^{-1}x$, $\eta = b^{-1}y$ может быть записана в виде

$$\frac{\partial^4 W_k}{\partial\,\xi^4} + 2c^2\frac{\partial^4 W_k}{\partial\,\xi^2\partial\eta^2} + c^4\frac{\partial^4 W_k}{\partial\,\eta^4} + (-1)^k\omega^2\sum_{r=1}^{2}\delta_{k+r-1}\,W_r = (-1)^{k-1}d_k\,q_0(\xi,\,\eta) \qquad (k = 1,\,2), \tag{4}$$

где обозначено $c = a/b$, $d_k = 12\,(1-\nu^2)\,h_0^{-4}\frac{E_k}{E_1^2+E_2^2}$, $\delta_k = \rho\,h^2 d_k$ $(k = 1,\,2)$, $d_3 = -d_1$, $\delta_3 = -\delta_1$, ρ — плотность, E_k $(k = 1,\,2)$ — компоненты комплексного модуля материала $E_1 + iE_2 = \int\limits_0^\infty K(s)\,\exp(i\omega s)\,ds$, $E_3 = -E_1$, $h_0 = h/a$ — безразмерная толщина пластинки.

Тогда формулы для составляющих внутренних усилий в пластинке преобразуются к виду

$$M_x^{(k)} = a^2\sum_{r=1}^{2}(-1)^r D_{k+r-1}\left(\frac{\partial^2 W_r}{\partial\xi^2} + \nu c^2\frac{\partial^2 W_r}{\partial\eta^2}\right), \qquad H_{xy}^{(k)} = (1-\nu)a^2c\sum_{r=1}^{2}(-1)^r D_{k+r-1}\frac{\partial^2 W_r}{\partial\xi\,\partial\eta},$$
$$Q_x^{(k)} = a\sum_{r=1}^{2}(-1)^r D_{k+r-1}\left[\frac{\partial^3 W_r}{\partial\xi^3} + c^2\frac{\partial^3 W_r}{\partial\xi^2\,\partial\eta}\right], \qquad (k = 1,2; \quad x \Leftrightarrow y; \quad \xi \Leftrightarrow \eta c^{-1}),$$
$$Q_x^{(k)*} = Q_x^{(k)} + \frac{\partial H_{xy}^{(k)}}{\partial y} = a\sum_{r=1}^{2}(-1)^r D_{k+r-1}\left[\frac{\partial^3 W_r}{\partial\xi^3} + (2-\nu)c^2\frac{\partial^3 W_r}{\partial\xi^2\,\partial\eta}\right], \tag{5}$$

где $D_k = \dfrac{E_k h_0^4}{12(1-\nu^2)}$ $(k = 1,\,2)$; $D_3 = -D_1$.

Граничные условия для уравнений (4) должны быть записаны в соответствии с условиями закрепления или нагружения сторон пластинки. В случаях пластинки, шарнирно опертой по всему периметру, или когда две противоположные стороны подкреплены шарнирами при произвольных условиях на остальной части границы удается получить точные аналитические решения. Такие решения приведены соответственно в работах [1] и [2]. При других способах закрепления двух противоположных сторон численное решение может быть получено классическим методом сплайн-коллокации [3, 4].

Далее приводится основанная на применении модифицированного метода сплайн-коллокации [5] методика численного решения краевой задачи для уравнений (4) при произвольных граничных условиях на контуре пластинки. Единственное принимаемое при этом ограничение состоит в предположении, что вид граничных условий в пределах каждой стороны пластинки остается неизменным.

2. СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ $W_{\mathbf{k}}(\xi,\eta)$ (k=1, 2)

Следуя модифицированному методу сплайн-коллокации, будем искать функции $W_k(\xi,\eta)$ $(k = 1,\,2)$ в виде

$$W_k(\xi,\eta) = \sum_{j=-2}^{N+2} B_{5,j}(\xi)W_j^{(k)}(\eta), \qquad (k = 1,\,2). \tag{6}$$

Здесь $B_{5,j}(\xi)$ — нормализованные B-сплайны пятой степени [6], определенные на равномерной сетке $\Delta = \{\xi_{-5} < \xi_{-4} < \ldots < \xi_{N+5}\}$, $\xi_i = i/N$ $(i = \overline{-5, N+5})$, а функции $W_j^{(k)}(\eta)$ $(k = 1,\, 2;\ j = \overline{-2, N+2})$ подлежат определению, причем функции $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\, r = 1,\, 2)$ должны быть подобраны так, чтобы выполнялись граничные условия на сторонах $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$.

Рассмотрим возможные варианты граничных условий при $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$.

Вариант 1. Стороны $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$ деформированы заданным образом:

$$W_1(\xi_0,\eta) = w_0(\eta), \qquad W_2(\xi_0,\eta) = 0, \qquad \frac{\partial W_1(\xi_0,\eta)}{\partial\xi} = \Theta_0(\eta), \qquad \frac{\partial W_2(\xi_0,\eta)}{\partial\xi} = 0, \tag{7}$$

$$W_1(\xi_N,\eta) = w_N(\eta), \qquad W_2(\xi_N,\eta) = 0, \qquad \frac{\partial W_1(\xi_N,\eta)}{\partial\xi} = \Theta_0(\eta), \qquad \frac{\partial W_2(\xi_N,\eta)}{\partial\xi} = 0. \tag{8}$$

В этом случае подстановка выражений (6) в (7) и (8) приводит к системам двух алгебраических уравнений, из которых функции $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\, r = 1,\, 2)$ выражаются через $W_j^{(k)}(\eta)$ и $W_{N-j}^{(k)}(\eta)$ $(k = 1,\, 2;\ j = \overline{0,\, 2})$ следующим образом:

$$W_{-r}^{(k)}(\eta) = m_{0,r}^{(k)}(\eta) + \sum_{j=0}^{2} a_{r,j} W_j^{(k)}(\eta), \qquad W_{N+r}^{(k)}(\eta) = m_{N,r}^{(k)}(\eta) + \sum_{j=N-2}^{N} a_{r,j} W_j^{(k)}(\eta) \qquad (k, r = 1,\, 2). \tag{9}$$

Вариант 2. На сторонах $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$ заданы условия смешанного типа

$$w^{(1)}(\xi_0,\eta) = hw_0(\eta), \qquad w^{(2)}(\xi_0,\eta) = 0, \qquad M_x^{(1)}(\xi_0,\eta) = m_0(\eta), \qquad M_x^{(2)}(\xi_0,\eta) = 0,$$
$$w^{(1)}(\xi_N,\eta) = hw_N(\eta), \qquad w^{(2)}(\xi_N,\eta) = 0, \qquad M_x^{(1)}(\xi_N,\eta) = m_N(\eta), \qquad M_x^{(2)}(\xi_N,\eta) = 0,$$

или

$$\frac{\partial w^{(1)}(\xi_0,\eta)}{\partial\xi} = h\Theta_0(\eta), \qquad \frac{\partial w^{(2)}(\xi_0,\eta)}{\partial\xi} = 0, \qquad Q_x^{(1)*}(\xi_0,\eta) = p_0(\eta), \qquad Q_x^{(2)}(\xi_0,\eta) = 0,$$
$$\frac{\partial w^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial\xi} = h\Theta_N(\eta), \qquad \frac{\partial w^{(2)}(\xi_N,\eta)}{\partial\xi} = 0, \qquad Q_x^{(1)*}(\xi_N,\eta) = p_N(\eta), \qquad Q_x^{(2)}(\xi_N,\eta) = 0.$$

Соответствующие условия для функций $W_k(\xi,\eta)$ $(k = 1,\, 2)$ с учетом формул (5) могут быть преобразованы к виду

$$W_1(\xi_0,\eta) = w_0(\eta), \quad W_2(\xi_0,\eta) = 0, \quad \frac{\partial^2 W_1(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^2} = m_{0,1}(\eta), \quad \frac{\partial^2 W_2(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^2} = m_{0,2}(\eta),$$
$$W_1(\xi_N,\eta) = w_N(\eta), \quad W_2(\xi_N,\eta) = 0, \quad \frac{\partial^2 W_1(\xi_N,\eta)}{\partial\xi^2} = m_{N,1}(\eta), \quad \frac{\partial^2 W_2(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^2} = m_{N,2}(\eta), \tag{10}$$

или

$$\frac{\partial W_1(\xi_0,\eta)}{\partial\xi} = \Theta_0(\eta), \quad \frac{\partial W_2(\xi_0,\eta)}{\partial\xi} = 0, \quad \frac{\partial^3 W_1(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^3} = p_{0,1}(\eta), \quad \frac{\partial^3 W_2(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^3} = p_{0,2}(\eta),$$
$$\frac{\partial W_1(\xi_N,\eta)}{\partial\xi} = \Theta_N(\eta), \quad \frac{\partial W_2(\xi_N,\eta)}{\partial\xi} = 0, \quad \frac{\partial^3 W_1(\xi_N,\eta)}{\partial\xi^3} = p_{N,1}(\eta), \quad \frac{\partial^3 W_2(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^3} = p_{N,2}(\eta). \tag{11}$$

Тогда, как и в случае первого варианта граничных условий, после подстановки выражений (6) в условия (10) или (11) получаются системы алгебраических уравнений, из которых функции $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\, r = 1,\, 2)$ в явном виде выражаются через $W_j^{(k)}(\eta)$ и $W_{N-j}^{(k)}(\eta)$ $(k = 1,\, 2;\ j = \overline{0,\, 2})$. Соответствующие формулы также можно записать в виде (9).

Вариант 3. Стороны $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$ загружены заданными усилиями:

$$M_x^{(1)}(\xi_0,\eta) = m_0(\eta), \qquad M_x^{(2)}(\xi_0,\eta) = 0, \qquad Q_x^{(1)*}(\xi_0,\eta) = p_0(\eta), \qquad Q_x^{(2)}(\xi_0,\eta) = 0,$$
$$M_x^{(1)}(\xi_N,\eta) = m_N(\eta), \qquad M_x^{(2)}(\xi_N,\eta) = 0, \qquad Q_x^{(1)*}(\xi_N,\eta) = p_N(\eta), \qquad Q_x^{(2)}(\xi_N,\eta) = 0.$$

Учитывая (5), условия при $\xi = \xi_0$ можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 W_k(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^2} + \nu c^2 \frac{\partial^2 W_k(\xi_0,\eta)}{\partial\eta^2} = -\frac{m_{0,k}(\eta)}{D_1 a^2(1 + \mathrm{tg}^2\delta)},$$

$$\frac{\partial^3 W_k(\xi_0,\eta)}{\partial \xi^3} + (2-\nu)c^2 \frac{\partial^3 W_k(\xi_0,\eta)}{\partial \xi\, \partial \eta^2} = -\frac{p_{0,k}(\eta)}{D_1 a(1+\mathrm{tg}^2\delta)} \qquad (k=1,\,2),$$

где $m_{0,1}(\eta)=m_0(\eta)$, $m_{0,2}(\eta)=-m_0(\eta)\mathrm{tg}\,\delta$, $p_{0,1}(\eta)=p_0(\eta)$, $p_{0,2}(\eta)=-p_0(\eta)\mathrm{tg}\,\delta$. Из этих соотношений после подстановки выражений (6) и ряда преобразований для функций $W_{-r}^{(k)}$ $(k,\,r=1,\,2)$ получаются дифференциальные зависимости:

$$\frac{d^2 W_{-r}^{(k)}}{d\eta^2} = m_{0,r}^{(k)}(\eta) + \sum_{j=0}^{2} a_{r,j} \frac{d^2 W_j^{(k)}}{d\eta^2} + \sum_{j=0}^{2} b_{r,j} W_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{2} c_{r,j} W_{-j}^{(k)} \qquad (k,\,r=1,\,2). \tag{12}$$

Совершенно аналогично из условий при $\xi=\xi_N$ получаются уравнения для функций $W_{N+r}^{(k)}$ $(k,\,r=1,\,2)$

$$\frac{d^2 W_{N+r}^{(k)}}{d\eta^2} = m_{N,r}^{(k)}(\eta) + \sum_{j=N-2}^{N} a_{r,j} \frac{d^2 W_j^{(k)}}{d\eta^2} + \sum_{j=N-2}^{N} b_{r,j} W_j^{(k)} + \sum_{j=N+1}^{N+2} c_{r,j} W_j^{(k)} \qquad (k,\,r=1,\,2). \tag{13}$$

В формулах (9), (12) и (13) постоянные $a_{r,j}$, $b_{r,j}$ $(j=\overline{0,\,2},\,\overline{N-2,\,N})$, $c_{r,j}$ $(r=1,\,2;\; j=1,2,\, N+1, N+2)$ и функции $m_{0,r}^{(k)}(\eta)$, $m_{N,r}^{(k)}(\eta)$ $(r,\,k=1,\,2)$ выражаются через значения B-сплайнов в точках $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_N$ и характеристики внешнего воздействия. Из-за громоздкости соответствующие выражения не приводятся.

Комбинируя в различных сочетаниях полученные выше выражения для функций $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\,r=1,\,2)$, с помощью формул (6) можно построить выражения функций $W_k(\xi,\eta)$ $(k=1,\,2)$ при любых законах деформирования или нагружения сторон $\xi=\xi_0$ и $\xi=\xi_N$.

3. СИСТЕМЫ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $W_{\mathbf{k}}(\xi,\eta)$ (k=1, 2)

Уравнения для функций $W_j^{(k)}(\eta)$ $(j=\overline{0,\,N})$ получаются из уравнений (4) методом коллокации. Для этого на отрезке $\xi\in[0,1]$ вводится массив точек коллокации ξ_i^* по правилу $\xi_i^*=\xi_i+\varepsilon/N$ $(i=\overline{0,\,N/2-1})$, $\xi_{N/2}^*=\xi_{N/2}$, $\xi_i^*=\xi_i-\varepsilon/N$ $(i=\overline{N/2+1,N})$, $0<\varepsilon<1$, и требуется, чтобы уравнения (4) выполнялись при $\xi=\xi_i^*$ $(i=\overline{0,\,N})$. В результате для функций $W_j^{(k)}(\eta)$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с известными коэффициентами, которые выражаются через значения B-сплайнов $B_{5,j}(\xi)$ и их производных в точках коллокации.

Как показано в п. 2, число неизвестных $W_j^{(k)}(\eta)$ меняется в зависимости от вида граничных условий на сторонах $\xi=\xi_0$ и $\xi=\xi_N$. При задании на этих сторонах линейных и угловых смещений или при граничных условиях смешанного типа число неизвестных $W_j^{(k)}(\eta)$ равно $2N+2$. В этом случае формулы (6) после подстановки выражений $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\,r=1,\,2)$ из (9) удобнее записать в виде

$$W_k(\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{N}\varphi_j(\xi)W_j^{(k)}(\eta)+M_k(\xi,\eta) \qquad (k=1,\,2). \tag{14}$$

Здесь

$$\varphi_j(\xi)=B_{5,j}(\xi)+a_{1,j}B_{5,-1}(\xi)+a_{2,j}B_{5,-2}(\xi) \quad (j=\overline{0,\,2}), \qquad \varphi_j(\xi)=B_{5,j}(\xi) \quad (j=\overline{3,\,N-3}),$$
$$\varphi_j(\xi)=B_{5,j}(\xi)+a_{1,j}B_{5,N+1}(\xi)+a_{2,j}B_{5,N+2}(\xi) \qquad (j=\overline{N-2,\,N}),$$
$$M_k(\xi,\eta)=\sum_{r=1}^{2}B_{5,-r}(\xi)m_{0,r}^{(k)}(\eta)+\sum_{r=N+1}^{N+2}B_{5,N+r}(\xi)m_{N,r}^{(k)}(\eta) \qquad (k=1,\,2). \tag{15}$$

После подстановки в (4) выражений (14) при $\xi=\xi_i^*$ $(i=\overline{0,\,N})$ получается система уравнений, которая в векторной форме имеет вид

$$c^4 A_0 \frac{d^4\overline{W}_1}{d\eta^4}+c^2 A_2\frac{d^2\overline{W}_1}{d\eta^2}+A_4\overline{W}_1-\omega^2\delta_2 A_0\overline{W}_2=\overline{Q}_1^*,$$
$$c^4 A_0 \frac{d^4\overline{W}_2}{d\eta^4}+c^2 A_2\frac{d^2\overline{W}_2}{d\eta^2}+A_4\overline{W}_2+\omega^2\delta_2 A_0\overline{W}_1=\overline{Q}_2^*. \tag{16}$$

Здесь обозначено $\overline{W}_k = \{W_0^{(k)}, W_1^{(k)}, \dots, W_N^{(k)}\}$ $(k = 1, 2)$ — векторы искомых компонент составляющих прогиба, A_0, A_2, A_4, $\overline{Q}_k^*$ $(k = 1, 2)$ — квадратные матрицы и векторы с известными компонентами.

Система (16) в рассматриваемом случае является системой разрешающих уравнений.

В дальнейшем для нахождения численного решения краевой задачи для уравнений вида (16) предполагается применять метод дискретной ортогонализации С.К. Годунова. Для этого уравнения (16) разрешаются относительно старших производных, что всегда возможно при соответствующем выборе точек коллокации, и стандартным приемом сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанной в нормальной форме Коши:

$$\frac{d\overline{Y}(\eta)}{d\eta} = A\overline{Y}(\eta) + \overline{F}(\eta), \tag{17}$$

где вектор $\overline{Y}(\eta) = \{y_r\eta)\}$ $(r = \overline{0,\, 8N+7})$ — новый вектор неизвестных, компонентами которого являются функции $W_i^{(k)}(\eta)$ $(k = 1,\, 2;\ i = \overline{0,\, N})$ и их производные до третьего порядка включительно, а компоненты матрицы A и вектора $\overline{F}(\eta)$ выражаются соответственно через компоненты матриц $A_0^{-1}A_2$, $A_0^{-1}A_4$ и векторов $A_0^{-1}\overline{Q}_1^*$, $A_0^{-1}\overline{Q}_2^*$.

Граничные условия для системы уравнений (17) получаются из условий на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$, выполнение которых требуется в концевых точках отрезков $\xi = \xi_i^*$ $(i = \overline{0,\, N})$. Эти условия всегда можно представить в виде

$$H_1\overline{Y}(0) = \overline{g}_1, \qquad H_2\overline{Y}(1) = \overline{g}_2 \tag{18}$$

с известными матрицами H_1, H_2 и векторами $\overline{g}_1$, $\overline{g}_2$.

Если на одной из сторон пластинки, например, при $\xi = \xi_0$, заданы перемещения или условия смешанного типа, а при $\xi = \xi_N$ известно распределение нагрузки, то число неизвестных функций $W_j^{(k)}(\eta)$ увеличивается до $2N + 6$. В этом случае формулы (6) с учетом зависимостей для $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\, r = 1,\, 2)$ из (9) переписываются в виде

$$W_k(\xi,\eta) = \sum_{j=0}^{N+2} \varphi_j(\xi) W_j^{(k)}(\eta) + M_k(\xi,\eta) \qquad (k = 1,\, 2). \tag{19}$$

Здесь $\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi) + a_{1,j}B_{5,-1}(\xi) + a_{2,j}B_{5,-2}(\xi)$ $(j = \overline{0,\, 2})$, $\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi)$ $(j = \overline{3,\, N+2})$, $M_k(\xi,\eta) = B_{5,-1}(\xi)m_{0,1}^{(k)}(\eta) + B_{5,-2}(\xi)m_{0,2}^{(k)}(\eta)$ $(k = 1,\, 2)$. Постоянные $a_{r,j}$ $(r,\, j = \overline{0,\, 2})$ и функции $m_{0,r}^{(k)}(\eta)$ по-прежнему известны, а для функций $W_{N+r}^{(k)}$ $(k,\, r = 1,\, 2)$ остаются в силе дифференциальные зависимости (13).

Для получения системы разрешающих уравнений в этом случае выражения функций $W_k(\xi,\eta)$ $(k = 1,\, 2)$ из (19) подставляются в уравнения (4), выполнение которых по-прежнему требуется в точках коллокации. Из полученных уравнений исключаются величины $\dfrac{\partial^2 W_{N+r}^{(k)}}{\partial\eta^2}$ согласно формулам (13) и $\dfrac{\partial^4 W_{N+r}^{(k)}}{\partial\eta^4}$ $(k,\, r = 1,\, 2)$ с помощью дважды продифференцированных соотношений (13). Результат таких преобразований можно записать в виде системы двух векторных уравнений:

$$\begin{gathered}
c^4 A_0 \frac{d^4\overline{W}_1}{d\eta^4} + c^2 A_2 \frac{d^2\overline{W}_1}{d\eta^2} + A_4\overline{W}_1 - B^*\overline{W}_2 + W_{N+1}^{(1)}\overline{R}_3 + W_{N+2}^{(1)}\overline{R}_4 - W_{N+1}^{(2)}\overline{P}_3 - W_{N+1}^{(2)}\overline{P}_4 = \overline{Q}_1^*, \\
c^4 A_0 \frac{d^4\overline{W}_2}{d\eta^4} + c^2 A_2 \frac{d^2\overline{W}_2}{d\eta^2} + A_4\overline{W}_2 + B^*\overline{W}_1 + W_{N+1}^{(1)}\overline{P}_3 + W_{N+2}^{(1)}\overline{P}_4 + W_{N+1}^{(2)}\overline{R}_3 + W_{N+2}^{(2)}\overline{R}_4 = \overline{Q}_2^*,
\end{gathered} \tag{20}$$

где $\overline{W}_k = \{W_0^{(k)}, W_1^{(k)}, \dots, W_N^{(k)}\}$ $(k = 1, 2)$ — по-прежнему векторы искомых составляющих прогиба, A_0, A_2, A_4, B^*, $\overline{P}_s$, $\overline{R}_s$ $(s = 3,\, 4)$, $\overline{Q}_k^*$ $(k = 1,\, 2)$ — известные квадратные матрицы и векторы.

Для рассматриваемого сочетания граничных условий при $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$ уравнения (20) вместе с уравнениями (13) составляют систему разрешающих уравнений. Чтобы преобразовать эту систему к виду, допускающему применение метода дискретной ортогонализации, уравнения (20) разрешаются относительно производных $\dfrac{\partial^4 W_i^{(k)}}{\partial\eta^4}$ $(i=\overline{0,\,N};\ k=1,\,2)$. Полученные уравнения и уравнения (13) легко сводятся к системе $8N+16$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая записывается в виде (17). В рассматриваемом случае вектор $\overline{Y}(\eta)$ имеет компонентами функции $W_i^{(k)}(\eta)$ $(i=\overline{0,\,N};\ k=1,\,2)$, их производные до третьего порядка включительно, а также функции $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(r,\,k=1,\,2)$ и их первые производные.

Граничные условия для компонент вектора $\overline{Y}(\eta)$ по-прежнему записываются согласно условиям на сторонах $\eta=0$ и $\eta=1$, причем выполнение последних требуется не только в концевых точках отрезков $\xi=\xi_i^*$ $(i=\overline{0,\,N})$, как в предыдущем случае, но и на концах стороны $\eta=1$. Эти условия также представляются в виде (18) с известными матрицами H_1, H_2 и векторами $\overline{g}_1$, $\overline{g}_2$.

Совершенно аналогично выполняется построение системы разрешающих уравнений, когда стороны $\xi=\xi_0$ и $\xi=\xi_N$ несут заданную нагрузку (третий вариант граничных условий). В этом случае, как показано в п. 2, функции $W_k(\xi,\eta)$ $(k=1,\,2)$ определяются выражениями (6), в которых $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\,r=1,\,2)$ должны удовлетворять уравнениям (12) и (13). Из требования, чтобы результат подстановки выражений (6) в уравнения (4) выполнялся в точках коллокации $\xi=\xi_i^*$ $(i=\overline{0,\,N})$, получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая после исключения из нее с помощью (12) и (13) производных от функций $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ представляется в виде

$$\begin{gathered}
c^4A_0\frac{d^4\overline{W}_1}{d\eta^4}+c^2A_2\frac{d^2\overline{W}_1}{d\eta^2}+A_4\overline{W}_1-B^*\overline{W}_2+W_{-1}^{(1)}\overline{R}_1+W_{-2}^{(1)}\overline{R}_2+W_{N+1}^{(1)}\overline{R}_3+W_{N+2}^{(1)}\overline{R}_4-\\
-W_{-1}^{(2)}\overline{P}_1-W_{-2}^{(2)}\overline{P}_2-W_{N+1}^{(2)}\overline{P}_3-W_{N+2}^{(2)}\overline{P}_4=\overline{Q}_1^*,\\
c^4A_0\frac{d^4\overline{W}_2}{d\eta^4}+c^2A_2\frac{d^2\overline{W}_2}{d\eta^2}+A_4\overline{W}_2+B^*\overline{W}_1+W_{-1}^{(1)}\overline{P}_1+W_{-2}^{(1)}\overline{P}_2+W_{N+1}^{(1)}\overline{P}_3+W_{N+2}^{(1)}\overline{R}_4+\\
+W_{-1}^{(2)}\overline{R}_1+W_{-2}^{(2)}\overline{R}_2+W_{N+1}^{(2)}\overline{R}_3+W_{N+2}^{(2)}\overline{R}_4=\overline{Q}_2^*
\end{gathered}\tag{21}$$

с известными матрицами A_0, A_2, A_4, B^* и векторами $\overline{P}_s$, $\overline{R}_s$ $(s=\overline{1,\,4})$, $\overline{Q}_k^*$ $(k=1,\,2)$.

Подобно тому, как это делалось в предыдущих случаях, система (21) и уравнения (12) и (13) преобразуются к виду (17), в котором компонентами функции $\overline{Y}(\eta)$ являются функции $W_j^{(k)}(\eta)$ $(k=1,\,2;\ j=\overline{0,\,N})$, их производные до третьего порядка включительно и функции $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\,r=1,\,2)$ вместе с их первыми производными.

При составлении граничных условий для вектора $\overline{Y}(\eta)$, которые записываются в виде (18), условия на сторонах $\eta=0$ и $\eta=1$ должны быть выполнены при $\xi=\xi_i^*$ $(i=\overline{0,\,N})$ и в концевых точках сторон $\xi=0$ и $\xi=1$.

Примеры применения изложенного подхода для решения конкретных задач будут приведены в последующих публикациях.

Библиографический список

1. *Недорезов, П.Ф.* Установившиеся поперечные колебания пластинки из вязкоупругого материала / П.Ф. Недорезов // Механика деформируемых сред: межвуз. науч. сб. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1979. – Вып. 6. – С. 27–34.

2. *Недорезов, П.Ф.* Установившиеся поперечные колебания вязкоупругой пластинки с двумя шарнирно опертыми сторонами / П.Ф. Недорезов // Механика деформируемых сред: межвуз. науч. сб. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. – Вып. 8. – С. 114–125.

3. *Недорезов, П.Ф.* Метод сплайн-коллокации в задаче о вибрационном изгибе вязкоупругой пластинки при сложном закреплении краев / П.Ф. Недорезов // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. шестой межвуз. науч. конф. – Самара: СамГТУ, 1996. – Ч. 1. – С. 64–66.

4. *Недорезов, П.Ф.* Применение B-сплайнов в задаче определения НДС при установившихся колебаниях прямоугольной пластинки из вязкоупругого материала / П.Ф. Недорезов; Сарат. гос. ун-т. – Саратов, 1997. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.04.1997, № 1093-В97.

5. *Недорезов, П.Ф.* Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок / П.Ф. Недорезов, Ю.В. Шевцова, О.М. Ромакина // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. науч. конф. – Самара: СамГТУ, 2005. – Ч. 1. – С. 203–209.

6. *Завьялов, Ю.С.* Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Ю.И. Квасов, И.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.