$h = {}^*F_{\mathcal{MF}(A)}(h_1, \ldots, h_n)$ справедливы утверждения: $(f_2 \circ f_1, h_2 \circ h_1) \in \gamma_{HH}$, $(f, h) \in \gamma_{HH}$. Действительно, из условий $f_i \circ \overset{-1}{\alpha} \subset \overset{-1}{\alpha} \circ h_i$ $(1 \le i \le n)$ следует, что

$$(f_2 \circ f_1) \circ \overset{-1}{\alpha} = f_2 \circ (f_1 \circ \overset{-1}{\alpha}) \subset f_2 \circ (\overset{-1}{\alpha} \circ h_1) = (f_2 \circ \overset{-1}{\alpha}) \circ h_1 \subset (\overset{-1}{\alpha} \circ h_2) \circ h_1 = \overset{-1}{\alpha} \circ (h_2 \circ h_1),$$

и при любом $x \in {}^*A$ в силу (3) выполняется

$$f(\overset{-1}{\alpha}(x)) = F_A(f_1(\overset{-1}{\alpha}(x)), \ldots, f_n(\overset{-1}{\alpha}(x))) \subset F_A(\overset{-1}{\alpha}(h_1(x)), \ldots, \overset{-1}{\alpha}(h_n(x))) \subset$$
$$\subset \overset{-1}{\alpha}({}^*F_A(h_1(x), \ldots, h_n(x)) = \overset{-1}{\alpha}({}^*F_{\mathcal{MF}(A)}(h_1, \ldots, h_n)(x)) = \overset{-1}{\alpha}(h(x)).$$

Из доказанного следует, что для любых мультифункций $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{MF}_H(A)$ и $h_1, \ldots, h_n \in {}^*\mathcal{MF}_H(A)$, удовлетворяющих условиям $(f_i, h_i) \in \gamma_H$ $(1 \le i \le n)$, и значений $f = F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, ..., f_n)$, $h = {}^*F_{\mathcal{MF}(A)}(h_1, \ldots, h_n)$ справедливы утверждения: $(f_2 \circ f_1, h_2 \circ h_1) \in \gamma_H$, $(f, h) \in \gamma_H$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Молчанов В.А.* Нестандартные сходимости в пространствах отображений // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 141–153.
2. *Молчанов В.А.* Непрерывные сходимости отображений // Изв. вуз. Мат. 1993. № 3. С. 59–67.
3. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. статей. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.
4. *Молчанов В.А.* О применении повторных нестандартных расширений в топологии // Сиб. мат. журнал. 1989. Т. 30, № 3. С. 64–71.
5. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хег-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990. 616 с.
6. *Fischer H.R.* Limesraume // Math. Ann. 1959. V. 137. P. 269–303.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
8. *Ascoli G.* Le curve limite di una varieta data di curve // Mem. Accad. Lincei. 1883. V. 18, № 3. P. 551–586.
9. *Weston J.D.* A generalization of Ascoli's theorem // Mathematika. 1959. V. 6. P. 19–24.
10. *Молчанов В.А.* О представлениях топологических алгебр преобразованиями // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 3 (291). С. 195–196.

УДК 519.4

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К СТРУКТУРЕ ГЕНЕРАТОРОВ КОНЦЕПТА

В.Е. Новиков

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: NovikovVE@list.ru

Разработаны теоретико-множественные методы, с помощью которых описывается структура генераторов концепта в формальном концептуальном анализе.

Ключевые слова: формальный концептуальный анализ, генерация концептов, семейства множеств.

Set-Theoretical Approach to the Structure of Concept Generators

V.E. Novikov

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: NovikovVE@list.ru

Set-theoretical methods for the description of the structure of concept generators are developed.

Key words: formal concept analysis, concept generalization, family of sets.

ВВЕДЕНИЕ

В работах немецких математиков Р. Вилле [1], Б. Гантера [2] и др. был основан формальный концептуальный анализа и показаны его приложения к теории баз данных [3]. Генератор концепта — это такое множество атрибутов, которое определяет этот концепт. Например, если в качестве

© В.Е. Новиков, 2009

концепта рассматривать некоторую алгебраическую теорию, то в качестве её генератора выступает множество аксиом этой алгебраической теории. При этом одна и та же алгебраическая теория может определяться различными множествами аксиом, которые образуют некоторую алгебраическую систему относительно теоретико-множественного включения.

1. СЕМЕЙСТВА, МИНИМАЛЬНЫЕ ПО ПЕРЕСЕЧЕНИЮ

Пусть $\mathbf{P}(M)$ — множество всех подмножеств множества M. Отображение $f: I \to \mathbf{P}(M)$ обозначаем $\{X_i\}_{i\in I}$ для $X_i = f(i)$ и называем *семейством* подмножеств множества M, индексированное множеством I. Семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ назовём *минимальным по пересечению* или кратко $\bigcap$*-минимальным*, если для любого $j \in I$ выполняется неравенство

$$\bigcap_{i\in I} X_i \neq \bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} X_i. \tag{1}$$

Учитывая свойства пересечения, последнее неравенство означает строгое включение:

$$\bigcap_{i\in I} X_i \subset \bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} X_i. \tag{2}$$

Очевидно, что не каждое семейство множеств может иметь подсемейство, удовлетворяющее условию (1). Например, таким является бесконечное семейство открытых множеств с замкнутым пересечением. Далее рассматриваются только семейства, которые содержат минимальные подсемейства или сами ими являются. В частности, в этот класс семейств попадают все конечные семейства.

Для семейства $\{X_i\}_{i\in I}$ обозначим $Y = \bigcap\limits_{i\in I} X_i$. Если при этом семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ является $\cap$-минимальным, то будем называть его Y*-минимальным*, в частности, если $Y = \emptyset$, то будем называть *ноль-минимальным*. Для $i \in I$ обозначим $\acute{X}_i = X_i \setminus Y$, $X^i = \bigcap\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_j$. При этом семейство $\{\acute{X}_i\}_{i\in I}$ назовём *приведённым*, а $\{X^i\}_{i\in I}$ — *производным* от семейства $\{X_i\}_{i\in I}$.

Предложение 1.1. *Для любого семейства $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет место $\bigcap\limits_{i\in I} \acute{X}_i = \emptyset$.*

Доказательство. $\bigcap\limits_{i\in I} \acute{X}_i = \bigcap\limits_{i\in I}(X_i \setminus Y) = \big(\bigcap\limits_{i\in I} X_i\big) \setminus Y = Y \setminus Y = \emptyset$. □

Предложение 1.2. *Семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ $\cap$-минимально тогда и только тогда, когда ноль-минимально его приведённое семейство $\{\acute{X}_i\}_{i\in I}$.*

Доказательство. Допустим $\{X_i\}_{i\in I}$ минимально. Тогда для любого $j \in I$ выполняется строгое включение $\bigcap\limits_{i\in I} X_i \subset \bigcap\limits_{i\in I\setminus\{j\}} X_i$, т. е. выполняется строгое включение $Y \subset Y^j$, которое равносильно неравенству $Y^j \setminus Y \neq \emptyset$, что, в свою очередь, равносильно выражению

$$\bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} \acute{X}_i = \Big(\bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} X_i\Big) \setminus Y = Y^j \setminus Y \neq \emptyset.$$

Таким образом, для любого $j \in I$ выполняется $\bigcap\limits_{i\in I\setminus\{j\}} \acute{X}_i \neq \emptyset$. Откуда, учитывая предложение 1.1, семейство $\{\acute{X}_i\}_{i\in I}$ является ноль-минимальным. □

Следовательно, рассмотрение $\cap$-минимальных семейств можно свести к рассмотрению ноль-минимальных семейств.

Теорема 1.3. *Семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ является ноль-минимальным тогда и только тогда, когда его производное семейство $\{X^i\}_{i\in I}$ состоит из непустых и попарно непересекающихся множеств.*

Доказательство. Допустим $\{X_i\}_{i\in I}$ ноль-минимально. Тогда $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = \emptyset$ и для любого $i \in I$ выполняется $\bigcap\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_j \neq \emptyset$. Причём для любых $i_1 \neq i_2$ выполняется условие

$$X^{i_1} \bigcap X^{i_2} = \Big(\bigcap_{j\in I\setminus\{i_1\}} X_j\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{k\in I\setminus\{i_2\}} X_k\Big) = \bigcap_{j\in (I\setminus\{i_1\})\bigcup(I\setminus\{i_2\})} X_j = \bigcap_{j\in I} X_j = \emptyset. \qquad \square$$

По определению в семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ при $i \neq j$, где $i, j \in I$, возможно $X_i = X_j$, т.е. в семействе могут присутствовать два экземпляра одного и того же множества. Легко заметить, что в минимальном семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ при $i \neq j$, где $i, j \in I$, всегда $X_i \neq X_j$. Иначе одно из множеств, X_i или X_j, можно было бы удалить, не нарушая пересечения.

2. НАСЫЩЕННЫЕ МНОЖЕСТВА НОЛЬ-МИНИМАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ

Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{X_j\}_{j\in J}$, где $|I|, |J| \geq 2$, — два ноль-минимальных семейства. Тогда семейство $\{X_i\}_{i\in I\bigcup J}$ также будет иметь пустое пересечение, причём это семейство может содержать в себе ноль-минимальные семейства, отличные от $\{X_i\}_{i\in I}$ и $\{X_j\}_{j\in J}$.

Множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, будем называть *насыщенным*, если семейство $\{X_v\}_{v\in\bigcup_{s\in S} K_s}$ не содержит в себе ноль-минимальное подсемейство, не присутствующее в множестве семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$.

Произвольное множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_t}\}_{k_t\in K_t}$, $t \in T$, можно пополнить до насыщенного, добавив к нему те ноль-минимальные подсемейства из семейства $\{X_u\}_{u\in\bigcup_{t\in T} K_t}$, которые в нём не присутствуют. Такой процесс и его результат будем называть *насыщением*.

Теорема 2.1. *Множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, является насыщенным тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ выполняется условие $\bigcap\limits_{s\in S} X^{k_s} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, является насыщенным. Тогда по теореме 1.3 для любого $s \in S$ выполняется условие

$$X^{k_s} = \bigcap_{t\in K_s\setminus\{k_s\}} X_t \neq \emptyset.$$

Допустим, существует такое семейство $\{k_s^0\}_{s\in S}$ элементов $k_s^0 \in K_s$, что $\bigcap\limits_{s\in S} X^{k_s^0} = \emptyset$. Обозначим $K = \bigcup\limits_{s\in S} K_s$ и рассмотрим семейство $\{X_k\}_{k\in K}$, очевидно, оно имеет пустое пересечение. Удалив из него все $X_{k_s^0}$ $(s \in S)$, получим семейство $\{X_k\}_{k\in K\setminus\{k_s^0\}_{s\in S}}$, которое удовлетворяет условию

$$\bigcap_{k\in K\setminus\{k_s^0\}_{s\in S}} X_k = \bigcap_{s\in S}\Big(\bigcap_{k\in K\setminus\{k_s^0\}} X_k\Big) = \bigcap_{s\in S} X^{k_s^0} = \emptyset.$$

Таким образом, из семейства $\{X_k\}_{k\in K\setminus\{k_s^0\}_{s\in S}}$ можно получить ноль-минимальное семейство. Однако по построению оно не содержит ни одного из ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, и полученное из него ноль-минимальное семейство будет отлично от них, что противоречит определению насыщенного множества. Следовательно, такого семейства $\{k_s^0\}_{s\in S}$ элементов $k_s^0 \in K_s$ не существует, и для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ выполняется условие $\bigcap\limits_{s\in S} X^{k_s} \neq \emptyset$.

Обратно, пусть для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ выполняется $\bigcap\limits_{s\in S} X^{k_s} \neq \emptyset$. Положим $K = \bigcup\limits_{s\in S} K_s$ и рассмотрим семейство $\{X_k\}_{k\in K}$. Возьмём произвольный элемент $s_0 \in S$ и удалим из семейства $\{X_k\}_{k\in K}$ любые $\{X_{k'_s}\}_{s\in S\setminus\{s_0\}}$. Ясно, что из множества ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, полученное семейство содержит в себе только семейство $\{X_{k_{S_0}}\}_{k_{s_0}\in K_{s_0}}$, причём оно единственное его ноль-минимальное подсемейство, поскольку с удалением любого $X_{k'_{s_0}}$, где $k'_{s_0} \in K_{s_0}$, оставшееся семейство имеем пересечение

$$\bigcap_{k\in K\setminus\{k'_s\}_{s\in S}} X_k = \bigcap_{s\in S} X^{k'_s} \neq \emptyset.$$

Тогда по определению множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, является насыщенным. $\square$

3. СТРУКТУРА НАСЫЩЕННЫХ МНОЖЕСТВ НОЛЬ-МИНИМАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ

Предложение 3.1. *Пусть семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет пустое пересечение и $\{X_k\}_{k\in K}$, $(K \subseteq I)$, некоторое ноль-минимальное его подсемейство. Ноль-минимальное семейство $\{X_k\}_{k\in K\subseteq I}$ явля-*

ется единственным ноль-минимальным в семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ в том и только том случае, если для любого $k \in K$

$$\bigcap_{i\in I\backslash\{k\}} X_i \neq \emptyset.$$

Доказательство. Если $K = I$, то утверждение очевидно. Положим строгое включение $K \subset I$. Пусть $\{X_k\}_{k\in K}$ единственное ноль-минимальное. Допустим, существует $k_0 \in K$, такой что $\bigcap\limits_{i\in I\backslash\{k_0\}} X_i = \emptyset$. Тогда из $\{X_i\}_{i\in I\backslash\{k_0\}}$ методом исключения можно получить ноль-минимальное семейство, отличное от $\{X_k\}_{k\in K}$.

Обратно, пусть для любого $k \in K$ выполняется $\bigcap\limits_{i\in I\backslash\{k\}} X_i \neq \emptyset$. Допустим, существует другое ноль-минимальное семейство $\{X_j\}_{j\in J}$ $(J \subset I)$, причём $K \neq J$, т.е. существует $k_0 \in K$, такой что $k_0 \notin J$. Но тогда $J \subseteq I\backslash\{k_0\}$ и, следовательно,

$$\bigcap_{i\in I\backslash\{k_0\}} X_i \subseteq \bigcap_{j\in J} X_j = \emptyset. \qquad \square$$

Теорема 3.1. *Пусть семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет пустое пересечение и множество ноль-минимальных его подсемейств $Y_s = \{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$ $(K_s \subseteq I)$, $s \in S$, является насыщенным. Тогда насыщенное множество семейств $\{Y_s\}$, $s \in S$, является максимальным насыщенными в семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ в том и только том случае, когда для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$*

$$\bigcap_{i\in I\backslash\{k_s\}_{s\in S}} X_i \neq \emptyset.$$

Доказательство. Для любого $s \in S$ имеем строгое включение $K_s \subset I$ $(K_s \neq I)$, в противном случае мы получаем противоречие тому, что семейства Y_s ноль-минимальны. Допустим теперь, что существует семейство $\{k'_s\}_{s\in S}$ элементов $k'_s \in K_s$, такое что

$$\bigcap_{i\in I\backslash\{k'_s\}_{s\in S}} X_i = \emptyset.$$

Тогда по построению семейство $\{X_i\}_{i\in I\backslash\{k'_s\}_{s\in S}}$ содержит ноль-минимальное подсемейство, отличное от всех Y_s, $s \in S$.

Обратно, пусть для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ выполняется неравенство $\bigcap\limits_{i\in I\backslash\{k_s\}_{s\in S}} X_i \neq \emptyset$. Допустим, существует ноль-минимальное семейство $Y = \{X_k\}_{k\in K'}$ $(K' \subset I)$, отличное от всех семейств Y_s, $s \in S$, т.е. для любого $s \in S$ имеем $K_s \neq K'$ и $\bigcap_{k\in K'} X_k = \emptyset$. Следовательно, существует семейство $\{k_s^0\}_{s\in S}$ элементов $k_s^0 \in K_s$ такое, что $k_s^0 \notin K'$ для любого $s \in S$. Но тогда $K' \subseteq I\backslash\{k_s^0\}_{s\in S}$ и, следовательно,

$$\bigcap_{i\in I\backslash\{k_s^0\}_{s\in S}} X_i \subseteq \bigcap_{k\in K'} X_k = \emptyset,$$

что противоречит предположению. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть $\{Y_s\}$ — насыщенное множество ноль-минимальных семейств, $\{Y_t\} \subset \subset \{Y_s\}$ и $\{Y_v\}$ — насыщение множества $\{Y_t\}$ $\big(\{Y_v\} \supseteq \{Y_t\}\big)$. Тогда $\{Y_s\} \supseteq \{Y_v\}$. Другими словами, насыщение любого подмножества насыщенного множества остаётся его подмножеством.*

Доказательство. Пусть семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет пустое пересечение и $Y_s = \{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$ $(K_s \subseteq I)$, $s \in S$, — некоторое насыщенное множество ноль-минимальных семейств. Рассмотрим его подмножество $\{Y_t\}$, $t \in T$, $T \subset S$. Насытим это подмножество до насыщенного множества ноль-минимальных семейств $\{Y_v\}$, $v \in V$, $V \supseteq T$, добавляя из $\bigcup\limits_{t\in T} X_{k_t}$ те ноль-минимальные семейства, которых нет в $\{Y_t\}$, $t \in T$. Поскольку $\bigcup\limits_{t\in T} X_{k_t} \subseteq \bigcup\limits_{s\in S\supset T} X_{k_s}$, а из $\bigcup\limits_{s\in S} X_{k_s}$, в силу насыщенности множества $\{Y_S\}$, $s \in S$, можно получить только эти же ноль-минимальные семейства, то, следовательно, $\{Y_v\}$, $v \in V$, $V \subseteq S$. Итак, имеем следующую последовательность включений: $\{Y_t\} \subseteq \{Y_v\} \subseteq \{Y_s\}$. $\square$

Предложение 3.3. *Непустое пересечение двух насыщенных множеств ноль-минимальных семейств опять является насыщенным множеством.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{Y_t\} = \{Y_s\} \bigcap \{Y_p\}$, где $\{Y_s\}$ и $\{Y_p\}$ — два насыщенных множества ноль-минимальных семейств. Насытим $\{Y_t\}$ до насыщенного множества $\{Y_v\}$. По предложению 3.2 $\{Y_v\} \subseteq \{Y_s\}$ и $\{Y_v\} \subseteq \{Y_p\}$, следовательно, $\{Y_v\} \subseteq \{Y_t\} = \{Y_s\} \bigcap \{Y_p\}$. Откуда $\{Y_v\} = \{Y_t\}$, т.е. $\{Y_t\}$ — насыщенное множество ноль-минимальных семейств. □

Основная теорема 3.2. *Пусть семейство множеств $\{X_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = \emptyset$. Обозначим $\mathfrak{K}$ — множество всех насыщенных множеств ноль-минимальных его подсемейств, включая $\emptyset$. Тогда из предложений 3.2 и 3.3 следует, что $\mathfrak{K}$ относительно теоретико-множественного включения образует решётку.*

4. ОБОБЩЕНИЕ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ НА СЛУЧАЙ СЕМЕЙСТВ, МИНИМАЛЬНЫХ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ПЕРЕСЕЧЕНИЮ

Вернёмся теперь к общему случаю, когда $\{X_i\}_{i\in I}$ — произвольное $\cap$-минимальное семейство, для которого $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = B$, т.е. B-минимальное. Пусть $\{\acute{X}_i\}_{i\in I}$ — его приведённое семейство, оно будет ноль-минимальным (см. предложение 1.2). Причём для любого $i \in I$

$$X_i = \acute{X}_i \bigcup B. \tag{3}$$

Тогда из теоремы 1.3, учитывая равносильность выражений (1) и (2), получим следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ является B-минимальным тогда и только тогда, когда его производное семейство состоит из множеств, содержащих B как собственное подмножество и попарно пересекающихся по множеству B.*

Множество B-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, будем называть *насыщенным*, если семейство $\{X_v\}_{v\in\bigcup_{s\in S} K_s}$ не содержит в себе B-минимальное подсемейство, не присутствующее в множестве семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$.

Учитывая равенство (3), все результаты для ноль-минимального семейства легко распространяются на общий случай. Таким образом, из предложений 2.1, 3.1, 3.3 и теорем 3.1, 3.2, учитывая равносильность выражений (1) и (2), получим следующие утверждения.

Теорема 4.2. *Множество B-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, является насыщенным тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ имеет место строгое включение*

$$B \subset \bigcap_{s\in S} X^{k_s}.$$

Предложение 4.1. *Пусть семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет пересечение B и $\{X_k\}_{k\in K}$ — его B-минимальное подсемейство ($K \subseteq I$). B-минимальное семейство $\{X_k\}_{k\in K}$ является единственным B-минимальным в семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ в том и только том случае, когда для любого $k \in K$ имеет место строгое включение*

$$B \subset \bigcap_{i\in I\setminus\{k\}} X_i.$$

Теорема 4.3. *Пусть семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет пересечение B и множество B-минимальных его подсемейств $Y_s = \{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, ($K_s \subseteq I$), $s \in S$, является насыщенным. Насыщенное множество семейств $\{Y_s\}$, $s \in S$, является максимальным насыщенными в семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ в том и только том случае, когда для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ имеет место строгое включение*

$$B \subset \bigcap_{i\in I\setminus\{k_s\}_{s\in S}} X_i.$$

Предложение 4.2. *Непустое пересечение двух насыщенных множеств семейств минимальных по одному и тому же пересечению опять является насыщенным множеством семейств минимальных по тому же пересечению.*

Теорема 4.4. *Пусть семейство множеств $\{X_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = B$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество всех насыщенных множеств B-минимальных его подсемейств, включая $\emptyset$. Тогда $\mathfrak{K}$ относительно теоретико-множественного включения образует решётку.*

5. ГЕНЕРАТОРЫ КОНЦЕПТА

Пусть задан контекст [4] $\mathbb{K} = (M_{\bar{\imath}_s}, M_{\bar{n}}, \rho)$, где $\bar{\imath}_s \subseteq \bar{n}$ и $M_{\bar{\imath}_s}$ выбрано в качестве множества объектов. Допустим $X \subset M_{\bar{\imath}_s}$ является $\bar{\imath}_s$-концептом по атрибуту $\bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$, что по определению [4] означает $X = \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s\bar{\jmath}_k}(X)$. Тогда любой $Y' \subseteq Y$, где $Y = \widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)$, является $\bar{\jmath}_k$-генератором этого концепта, если $\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y') = X$. При этом, если для любого собственного подмножества $Y'' \subset Y'$ выполняется $\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y') \neq X$, то Y' является минимальным генератором $\bar{\imath}_s$-концепта X. По определению $\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y') = \bigcap\{\rho_{\bar{\imath}_s}\langle y_{\bar{\jmath}_k}\rangle : y_{\bar{\jmath}_k} \in Y'\}$, т.е. $\bar{\imath}_s$-концепт X определяется семейством $\{\rho_{\bar{\imath}_s}\langle y_{\bar{\jmath}_k}\rangle\}_{y_{\bar{\jmath}_k}\in Y'}$, где Y' — любой его генератор. Поэтому в силу результатов раздела 4 справедливы следующие утверждения.

Теорема 5.1. *Множество всех $\bar{\jmath}_k$-генераторов концепта X совпадает с объединением фильтров в $\mathbf{P}(Y)$, содержащих минимальные $\bar{\jmath}_k$-генераторы этого концепта.* $\square$

Теорема 5.2. *Множество $Y^0 \subseteq Y$ является минимальным $\bar{\jmath}_k$-генератором $\bar{\imath}_s$-концепта X тогда и только тогда, когда для любого $y' \in Y^0$*

$$\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y^0\backslash\{y'\}) \neq X$$

и для любых $y', y'' \in Y^0$, $y' \neq y''$,

$$\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y^0\backslash\{y'\}) \bigcap \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y^0\backslash\{y''\}) = X.$$

Доказательство. Следует из теоремы 4.1. $\square$

Множество минимальных $\bar{\jmath}_k$-генератора $Y_t \subset Y = \widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)$, $t \in T$, $\bar{\imath}_s$-концепта X будем называть *насыщенным*, если их объединение не содержит никаких иных минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов этого концепта.

Теорема 5.3. *Множество минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов $\{Y_t\}$, $t \in T$, $\bar{\imath}_s$-концепта X является насыщенным тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{y_t\}_{t\in T}$ элементов $y_t \in Y_t$ выполняется*

$$\bigcap_{t\in T} \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y_t\backslash\{y_t\}) \neq X.$$

Доказательство. Следует из теоремы 4.2. $\square$

Предложение 5.1. *Минимальный $\bar{\jmath}_k$-генератор $Y^0 \subset Y = \widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)$ $\bar{\imath}_s$-концепта X является единственным минимальным $\bar{\jmath}_k$-генератором $\bar{\imath}_s$-концепта X тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y^0$ выполняется $\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y\backslash\{y\}) \neq X$.*

Доказательство. Следует из предложения 4.1. $\square$

Теорема 5.4. *Насыщенное множество минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов $\{Y_t \subset Y = \widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)\}$, $t \in T$, $\bar{\imath}_s$-концепта X является максимальным насыщенным тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{y_t\}_{t\in T}$ элементов $y_t \in Y_t$ выполняется*

$$\bigcap_{t\in T} \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y\backslash\{y_t\}) \neq X.$$

Доказательство. Следует из теоремы 4.3. $\square$

Предложение 5.2. *Непустое пересечение двух насыщенных множеств минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов $\bar{\imath}_s$-концепта X опять является насыщенным множеством минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов этого концепта.*

Доказательство. Следует из предложения 4.2. $\square$

Теорема 5.5. *Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех насыщенных множеств минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов $\bar{\imath}_s$-концепта X, упорядоченное теоретико-множественным включением. Тогда упорядоченное множество $\mathfrak{G}$ изоморфно соответствующей решётке $\mathfrak{K}$ без наименьшего элемента.*

Доказательство. Следует из теоремы 4.4. $\square$

Библиографический список

1. *Wille R.* Bedeutungen von Begriffsverbanden // *Ganter B., Wille R., Wolff K.E.* Beitrage zur Begriffsanalyse. B. I. Mannheim: Wissenschaftsverlag, 1987. P. 161–211.
2. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis — Mathematical Foundations. Berlin: Springer, 1998.
3. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.
4. *Новиков В.Е.* Генераторы концептов в проблеме распознавания образов // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XIV Междунар. конф. М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2005.

УДК 512.643.2+512.558

О НУЛЯХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В.Б. Поплавский

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: poplavskivb@mail.ru

В статье изучаются свойства внешностей и внутренностей матриц с элементами из произвольной булевой алгебры. Внешняя и внутренняя части образуют вырожденную часть матрицы, определитель которой равен нулю. Показано, в частности, что внешние матрицы образуют нормальные множества в булевой алгебре всех булевых квадратных матриц и нижнюю полурешетку, а внутренности –- верхнюю полурешетку, которой принадлежат линейные комбинации и даже многочлены от внутренних матриц.

Ключевые слова: булевы матрицы, определитель, вырожденные матрицы.

On Determinant Zeros of Boolean Matrices

V.B. Poplavski

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: poplavskivb@mail.ru

The properties of exteriority and interiority of square matrices with elements from arbitrary Boolean algebra are studied in this paper. The exterior and interior parts form a degenerate part of a matrix with zero determinant. It is shown, in particular, that the set of exterior parts is a normal set in the Boolean algebra of all Boolean square matrices and it is a lower semilattice. The set of interior parts is an upper semilattice. Moreover linear combinations and even polynomials of the interiorities also belong to it.

Key words: Boolean matrices, determinant, degenerate matrices.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\langle \mathbf{B}_{n\times n}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$ есть булева алгебра квадратных матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$. Операции $\cup, \cap, '$ (объединение, пересечение и дополнение) и, следовательно, отношение частичного порядка $\subseteq$ определяются для матриц поэлементно. Нулем и единицей такой вторичной булевой алгебры служат матрицы O и J, образованные целиком из нулей 0 и единиц 1 соответственно. С другой стороны, матрицы из $\mathbf{B}_{n\times n}$ образуют полумодуль с двумя операциями, объединением матриц (заменяющим сложение) $A\cup B = (a^i_j \cup b^i_j) \in \mathbf{B}_{n\times n}$ и пересечением матрицы с элементом из булевой алгебры (заменяющим умножение на скаляр) $\lambda \cap A = (\lambda \cap a^i_j) \in \mathbf{B}_{n\times n}$. Здесь a^i_j и b^i_j — элементы, стоящие в i-й строке и j-м столбце матриц $A = (a^i_j)$ и $B = (b^i_j)$ соответственно. Кроме этого множество $\mathbf{B}_{n\times n}$ относительно произведения, определяемого для матриц $A = (a^i_j)$ и $B = (b^i_j)$ как $C = A \sqcap B$ с элементами $c^i_s = \bigcup_{t=1}^n (a^i_t \cap b^t_s)$, образует решеточно упорядоченную полугруппу с единицей E. Здесь E — матрица, по главной диагонали которой стоят единицы, а на остальных местах — нули.

Пусть $\overset{+}{P}$ и $\overset{-}{P}$ обозначают множества всех четных и нечетных n-подстановок ($n \geq 2$). Полуперманенты, определяемые формулами

$$\overset{+}{\nabla} A = \bigcup_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in \overset{+}{P}} \bigcap_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}, \qquad \overset{-}{\nabla} A = \bigcup_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in \overset{-}{P}} \bigcap_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k},$$

позволяют рассмотреть перманент $\operatorname{Per} A = \overset{+}{\nabla} A \cup \overset{-}{\nabla} A$, определитель, равный симметрической разности полуперманентов, т. е. $\operatorname{Det} A = (\overset{+}{\nabla} A \setminus \overset{-}{\nabla} A) \cup (\overset{-}{\nabla} A \setminus \overset{+}{\nabla} A)$, и общую часть полуперманентов

© В.Б. Поплавский, 2009