УДК 517.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

А.А. Нурмагомедов

Дагестанский государственный педагогический университет,
кафедра математического анализа
E-mail: alimn@mail.ru

В этой работе исследуются асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n(x)$, ортогональных с весом Δt_j на произвольных сетках, состоящих из конечного числа N точек отрезка $[-1,1]$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N, асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лежандра.

About Approximation Multinominals, Orthogonal on Any Grids

A.A. Nurmagomedov

In this work are investigated approximation properties of multinominals $\hat{p}_n(x)$, orthogonal with weight Δt_j on the any grids consisting of final number of points of a piece $[-1,1]$. Namely the approximation formula, in which is established at increase n together with N, approximation behaviour of these multinominals close to approximation behaviour of multinominals Lasiandra.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $T_N = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1]:\ -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$. Рассмотрим также еще одну сетку $X_N = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$, состоящую из N точек x_j, где

$$x_j = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Через

$$\hat{p}_k(x) = \hat{p}_k(x; T_N) \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{1.1}$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке X_N в следующем смысле $(0 \le n, m \le N-1)$:

$$(\hat{p}_n, \hat{p}_m) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_n(x_j)\hat{p}_m(x_j)\Delta t_j = \delta_{nm}, \tag{1.2}$$

где $\triangle t_j = t_{j+1} - t_j, j = 0, 1, \ldots, N-1$. Для определенности будем считать, что старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n(x)$положителен, т.е.

$$\hat{p}_n(x) = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_0,\ k_n > 0. \tag{1.3}$$

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства многочлена $\hat{p}_n(x)$ при $n, N \to \infty$.

Ниже нам понадобится обобщение на интегральные метрики известного неравенства В.А. Маркова для производных алгебраических многочленов. А именно пусть $q_n(x)$ — произвольный алгебраический многочлен степени $n, 0 \le r \le n$. Тогда имеет место $[1,4]$оценка

$$\int\limits_{-1}^{1} \left| q_n^{(r)}(x) \right| dx \le c(r) n^{2r} \int\limits_{-1}^{1} |q_n(x)|\, dx, \tag{1.4}$$

где $c(r), c(\alpha, \beta), \ldots, c(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров. Через $æ_r$ мы обозначим наименьшую константу в неравенстве (1.4), т.е.

$$æ_r = \inf_{q_n} \frac{\int\limits_{-1}^{1} \left| q_n^{(r)}(x) \right| dx}{n^{2r} \int\limits_{-1}^{1} |q_n(x)|\, dx}, \tag{1.5}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим многочленам $q_n(x)$ степени n, не равными нулю тождественно.

Далее, пусть $\hat{P}_n(x)$ — ортонормированный многочлен Лежандра,

$$\delta_N = \max_{0\le j\le N-1} \Delta t_j. \tag{1.6}$$

В данной работе установлена асимптотическая формула:

$$\hat{p}_n(x) = \hat{P}_n(x) + \upsilon_n(x, T_N), \tag{1.7}$$

в которой для остаточного члена $\upsilon_n(x, T_N)$ при $1\le n\le \left(\frac{2}{æ_2}\right)^{1/4} \delta_N^{-1/2}$ имеет место оценка

$$\left|\upsilon_n(x, T_N)\right| \le c\delta_N n^{5/2} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \quad (-1\le x\le 1). \tag{1.8}$$

Последовательность многочленов, ортогональных на конечном множестве точек действительной прямой R, впервые была введена и исследована в целом ряде работ П.Л. Чебышева в связи с задачами математической статистики. В работах А.А. Маркова, Шарлье, М.Ф. Кравчука, Мейкснера, Хана и других изучались системы ортогональных многочленов дискретного переменного, различающиеся выбором сетки и веса. В частности, подробно исследовались разностные свойства дискретных аналогов классических многочленов Эрмита и Лагерра — многочленов соответственно Кравчука и Мейкснера.

Дальнейшее развитие теории многочленов, ортогональных на дискретных системах точек, связано с работами Хана, Вебер и Эрдеи, А.Ф. Никифорова, В.Б. Уварова, С.К. Суслова и многих других математиков и физиков. Были получены многочисленные приложения многочленов, ортогональных на дискретных системах точек в генетике, теории кодирования, квантовой механике, математической статистике и т.д.

В связи с приложениями указанных многочленов часто возникает вопрос об асимптотических свойствах в том случае, когда степень n растет (вместе с параметром N определяется числом точек сетки). Целенаправленное его изучение было проведено в работах Шарапудинова И.И. Задача состояла в том, чтобы получить такие оценки для остаточных членов асимптотических формул, из которых и известных весовых оценок для классических многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита вытекали бы неулучшаемые по порядку при $n \to \infty$ весовые оценки для многочленов Чебышева, Мейкснера и Кравчука, стремясь одновременно к тому, чтобы эти оценки оставались верны при минимальных ограничениях на рост степени n в зависмости от N.

В работе [5, с. 56-61] И.И. Шарапудиновым для ортонормированных на равномерной сетке многочленов Чебышева $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть α и β — целые неотрицательные числа, $a > 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула:*

$$\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

для остаточного члена $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ которой при $1 \le n \le aN^{1/2}$ справедлива оценка

$$\mid \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \mid \le c(\alpha,\beta,a)\frac{n}{\sqrt{N}} \left[\sqrt{1-t} + \frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2} \left[\sqrt{1+t} + \frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2},$$

где $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ — ортонормированный многочлен Якоби.

При $\alpha = \beta = 0$ нам удалось перенести эту теорему на произвольный случай.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Мы здесь приведем некоторые сведения о многочленах Якоби и Лежандра. Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x) (n = 0, 1, 2, \dots)$ с помощью обобщенной формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{k(x)}\frac{d^n}{dx^n}\{k(x)\sigma^n(x)\}, \tag{2.1}$$

где α, β — произвольные действительные числа, $\sigma(x) = 1 - x^2$, $k(x) = k(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$.

Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Якоби [2, 3]:

производная

$$\frac{d^r}{dx^r} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x) \quad (0 \le r \le n), \tag{2.2}$$

где $(a)_0 = 1, (a)_\nu = a(a+1)\dots(a+\nu-1)$;

весовая оценка

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Одним из частных случаев многочленов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x) (n = 0, 1, 2, \dots)$ при $\alpha = \beta = 0$ являются ортогональные многочлены Лежандра $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$ с единичным весом $k(x) = 1$ на сегменте $[-1, 1]$:

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = \delta_{nm}. \tag{2.4}$$

3. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы здесь докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 3.1. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[-1, 1]$, $-1 = t_0 < < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $x_j = (t_{j+1} + t_j)/2$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\Delta t_j + r_N(f), \tag{3.1}$$

в котором для остаточного члена $r_N(f)$ имеет место оценка

$$|r_N(f)| \le \frac{1}{2}\delta_N^2 \int_{-1}^{1} |f''(t)|\,dt. \tag{3.2}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Далее, воспользовавшись формулой Тейлора, мы можем записать

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx &= \int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[f(x_j) + f'(x_j)(x-x_j) + \int_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\right]dx = \\ &= f(x_j)\Delta t_j + f'(x_j)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(x-x_j)\,dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx = \\ &= f(x_j)\Delta t_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Кратный интеграл в равенстве (3.4) запишем следующим образом:

$$J = \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx = \int_{t_j}^{x_j}\int_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx + \int_{x_j}^{t_{j+1}}\int_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим сначала J_1:

$$J_1 = \int\limits_{t_j}^{x_j} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t) f''(t)\, dt\, dx = -\int\limits_{t_j}^{x_j} f''(t)\, dt \int\limits_{t_j}^{t} (x-t)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{t_j}^{x_j} (t_j - t)^2 f''(t)\, dt. \tag{3.5}$$

Займемся теперь J_2:

$$J_2 = \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t) f''(t)\, dt\, dx = \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} f''(t)\, dt \int\limits_{t}^{t_{j+1}} (x-t)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - t)^2 f''(t)\, dt. \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.6) и (1.6) имеем

$$|J| \le |J_1| + |J_2| \le \frac{1}{2}\delta_N^2 \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(t)|\, dt. \tag{3.7}$$

Тогда из (3.4) и (3.7), мы находим:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\Delta t_j + r_N(f),$$

где

$$|r_N(f)| = \left| \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t) f''(t)\, dt\, dx \right| \le \frac{1}{2}\delta_N^2 \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(t)|\, dt = \frac{1}{2}\delta_N^2 \int\limits_{-1}^{1} |f''(t)|\, dt.$$

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Для нормированного многочлена Лежандра* $\hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ *имеет место следующая формула:*

$$\sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(x)\Delta t_j = 1 - r_{n,N}, \tag{3.8}$$

в которой

$$|r_{n,N}| \le c\delta_N^2 n^3. \tag{3.9}$$

Доказательство. Полагая $f(x) = \hat{P}_n^2(x) = \frac{2n+1}{2} P_n^2(x)$, воспользуемся леммой 3.1. Тогда

$$1 = \int\limits_{-1}^{1} \hat{P}_n^2(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(x_j)\Delta t_j + r_{n,N}, \tag{3.10}$$

где $r_{n,N} = r_N(\hat{P}_n^2)$, и стало быть

$$|r_{n,N}| \le \frac{1}{2}\delta_N^2 \int\limits_{-1}^{1} \left| \{\hat{P}_n^2(x)\}'' \right| dx = \delta_N^2 \int\limits_{0}^{1} \left| \{\hat{P}_n^2(x)\}'' \right| dx. \tag{3.11}$$

Далее, в силу (2.2)

$$\left\{\hat{P}_n^2(x)\right\}'' = \frac{2n+1}{2}\left\{P_n^2(x)\right\}'' = (2n+1)\{P_n(x)P_n'(x)\}' =$$

$$= (2n+1)\left\{ \left(\frac{n+1}{2} P_{n-1}^{1,1}(x)\right)^2 + \frac{(n+1)_2}{2^2} P_{n-2}^{2,2}(x) P_n(x) \right\} =$$

$$= (2n+1)\left\{\left(\frac{n+1}{2}P_{n-1}^{1,1}(x)\right)^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{4}P_{n-2}^{2,2}(x)P_n(x)\right\}.$$

Поэтому в силу весовой оценки (2.3) получим

$$\left|\{\hat{P}_n^2(x)\}''\right| \le cn^2\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-3}.$$

Отсюда,в свою очередь, имеем

$$\int\limits_0^1 \left|\{\hat{P}_n^2(x)\}''\right| \le cn^2 \int\limits_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-3} \le cn^3. \tag{3.12}$$

Сопоставляя (3.10) – (3.12), приходим к оценке (3.9). Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3.*Пусть* $\frac{1}{2}\text{æ}_2\delta_N^2 n^4 < 1$. *Тогда для ортонормированного многочлена* (1.3) *имеет место следующая формула:*

$$\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx = 1 + R_{n,N}, \tag{3.13}$$

в которой

$$|R_{n,N}| \le \frac{\text{æ}_2\delta_N^2 n^4}{2-\text{æ}_2\delta_N^2 n^4}. \tag{3.14}$$

Доказательство. В силу леммы 3.1

$$\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_n^2(x_j)\Delta t_j + R_{n,N}, \tag{3.15}$$

где $R_{n,N} = r_N(\hat{p_n^2})$ и стало быть в силу (3.2)

$$|R_{n,N}| \le \frac{1}{2}\delta_N^2 \int\limits_{-1}^1 \left|\{\hat{p}_n^2(x)\}''\right|\,dx. \tag{3.16}$$

Далее, из неравенства (1.4) следует, что

$$\int\limits_{-1}^1 \left|\{\hat{p}_n^2(x)\}''\right|\,dx \le \text{æ}_2 n^4 \int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx. \tag{3.17}$$

Сопоставляя (3.16) и (3.17), получим

$$|R_{n,N}| \le \frac{1}{2}\text{æ}_2\delta_N^2 n^4 \int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx. \tag{3.18}$$

Кроме того, из (3.15) и (3.18) следует, что

$$\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx \le 1 + \frac{1}{2}\text{æ}_2\delta_N^2 n^4 \int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx. \tag{3.19}$$

Если теперь $\frac{1}{2}\text{æ}_2\delta_N^2 n^4 < 1$, то из (3.19) получаем

$$\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx \le \frac{2}{2-\text{æ}_2\delta_N^2 n^4}. \tag{3.20}$$

Теперь из (3.18) и (3.20) непосредственно следует оценка (3.14). Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $k_n = k_n(T_n, V_n)$ — старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n(x)$, а λ_n — старший коэффициент многочлена Лежандра $\hat{P}_n(x)$. Тогда*

$$\frac{k_n}{\lambda_n} \geq \frac{1}{1 + c\delta_n^2 n^3}. \tag{3.21}$$

Доказательство. Легко заметить, что

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_n^2(x)\, dx}, \tag{3.22}$$

где $\tilde{P}_n(x)$ — многочлен Лежандра с единичным старшим коэффициентом. Если $\hat{p}_n(x)$ — многочлен из последовательности (1.1), то

$$k_n^2 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} p_n^2(x_j)\Delta t_j}, \tag{3.23}$$

где $p_n(x)$ — многочлен из последовательности (1.1) с единичным старшим коэффициентом. Далее, в силу (3.8), (3.9) и (3.23) получим

$$\frac{k_n^2}{\lambda_n^2} = \frac{1}{\lambda_n^2 \sum_{j=0}^{N-1} p_n^2(x_j)\Delta t_j} \geq \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(x_j)\Delta t_j} \geq \frac{1}{1 + c\delta_N^2 n^3}. \tag{3.24}$$

Отсюда, в свою очередь, непосредственно следует оценка (3.21). Лемма 3.4 доказана.

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{p}_n(x)$

Здесь мы получим асимптотическую формулу для многочленов $\hat{p}_n(x)$, ортонормированных на X_N в смысле (1.2).

Теорема 4.1 *Пусть* $\frac{æ_2}{2}\delta_N^2 n^4 < 1$. *Тогда имеет место асимптотическая формула:*

$$\hat{p}_n(x) = \hat{P}_n(x) + \upsilon_n(x, T_N), \tag{4.1}$$

где для остаточного члена $\upsilon_n(x, X_N)$ которой справедлива оценка

$$\Big|\upsilon_n(x, T_N)\Big| \leq c\delta_N^2 n^{5/2} \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Оценим следующий интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \{\upsilon_n(x, T_N)\}^2\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \Big\{\hat{P}_n(x) - \hat{p}_n(x)\Big\}^2\, dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \hat{P}_n^2(x)\, dx - 2\int\limits_{-1}^{1} \hat{P}_n(x)\hat{p}_n(x)\, dx + \int\limits_{-1}^{1} \hat{p}_n^2(x)\, dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Ясно, что $I_1 = 1, \quad I_2 = -2\dfrac{k_n}{\lambda_n}, \quad I_3 = 1 + \dfrac{æ_2\delta_N^2 n^4}{2 - æ_2\delta_N^2 n^4}$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1} \{\upsilon_n(x, T_N)\}^2\, dx \leq \frac{c\delta_N^2 n^3}{1 + c\delta_N^2 n^3} + \frac{æ_2\delta_N^2 n^4}{2 - æ_2\delta_N^2 n^4} < æ_2\delta_N^2 n^4. \tag{4.3}$$

Из неравенства (4.3), используя теорему 7.71.1 [2], легко получить утверждение теоремы 4.1.

Сопоставляя (4.1), (4.2) с (2.5), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть* $a > 0$ *и* $\delta_N^2 n^4 \le a$. *Тогда существует постоянная* $c(a) > 0$ *такая, что*

$$|\hat{p}_n(x)| \le c(a) \left(\delta_N n^{5/2} + 1\right) \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \quad (-1 \le x \le 1).$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю И.И. Шарапудинову за поставленную задачу, а также за ряд полезных замечаний.

Библиографический список

1. *Даугавет И.К., Рафальсон С.З.* О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестник Ленингр. ун-та. 1974. № 19. С. 18–24.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. С. 244–271.
4. *Конягин С.В.* О неравенстве В.А. Маркова для многочленов в метрике L // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1980. № 145. С. 117–125.
5. *Шарапудинов И.И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: Изд-во ДНЦ, 2004. С. 35–36.

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНЫХ УЗЛОВЫХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

В.А. Юрко

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Получено решение обратных узловых и обратных спектральных задач для дифференциальных операторов второго порядка на конечном интервале с условиями разрыва внутри интервала, выявлены связи между этими двумя классами обратных задач.

On Inverse Nodal and Spectral Problems for Boundary Value Problems with Discontinuity Conditions Inside the Interval

V.A. Yurko

The solution of inverse nodal and inverse spectral problems is presented for second-order differential operators on a finite interval with discontinuity conditions inside the interval. Connections between these two classes of inverse problems are established.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуются обратные узловые и обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов. Обратные спектральные задачи заключаются в восстановлении дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в естествознании и технике (см., например, [1]–[4] и список литературы в них). Обратные узловые задачи заключаются в построении операторов по заданным узлам (нулям) собственных функций [5]–[7]. В данной работе получены результаты по обратным спектральным и узловым задачам для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на конечном интервале с условиями разрыва внутри интервала, а также выявлены тесные связи между этими двумя классами обратных задач.

Рассмотрим краевую задачу $B = B(q)$ для уравнения Штурма – Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{1}$$

на конечном интервале $0 < x < T$ с краевыми условиями Дирихле

$$y(0) = y(T) = 0 \tag{2}$$

и с условиями разрыва

$$y(T/2 + 0) = a_1 y(T/2 - 0), \quad y'(T/2 + 0) = a_1^{-1} y'(T/2 - 0) + a_2 y(T/2 - 0). \tag{3}$$