На рис. 1 схематично показаны базисные коциклы на торе; значение коцикла на тех рёбрах, которые пересекает пунктирная линия, равно единице, а на остальных — нулю. Рассмотрим теперь умножение базисных коциклов

Учитывая, что $\vartheta \circ V_i^{2,\varepsilon} = h_{\lambda^{\varepsilon}_{\{i\}}} \circ \vartheta$, мы, согласно формуле умножения получим (см. рис. 2)

$$(\alpha \smile \beta)(\vartheta) = \alpha\left(\vartheta V_1^{2,0}\right)\cdot\beta\left(\vartheta V_2^{2,1}\right) - \alpha\left(\vartheta V_2^{2,0}\right)\cdot\beta\left(\vartheta V_1^{2,1}\right) = 0\cdot 0 - (-1)\cdot(-1) = -1.$$

Таким образом, $\beta \smile \alpha$ — базисный элемент двумерных когомологий тора. Далее,

$$(\beta \smile \alpha)(\vartheta) = \beta\left(\vartheta V_1^{2,0}\right)\cdot\alpha\left(\vartheta V_2^{2,1}\right) - \beta\left(\vartheta V_2^{2,0}\right)\cdot\alpha\left(\vartheta V_1^{2,1}\right) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1.$$

Итак, в кольце когомологий $H^*(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ есть две образующие $\alpha$, $\beta$. Причём выполнены соотношения: $\alpha \smile \beta = -\beta \smile \alpha$, а это, в свою очередь, означает, что кольцо когомологий тора с коэффициентами в кольце целых чисел есть внешняя алгебра, т. е. $H^*(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[\alpha, \beta]$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведём итог сказанному. Мы связали с каждым полукубическим множеством $X \in \square_+^{op}\mathrm{Ens}$ и некоторым кольцом $R$, некоторое градуированное кольцо когомологий $H^*(X; R)$. Если в $R$ существует единичный элемент, то такой же элемент существует и в $H^*(X; R)$, и если $R$ коммутативно, то $H^*(X; R)$ кососоммутативно.

## Библиографический список


1. *Хусаинов, А. А.* О группах гомологий полукубических множеств / А. А. Хусаинов // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 224–237. http:// www.emis.de/ journals/SMZ/2008/01/224.html
2. *Хилтон, П.* Теория гомологий / П. Хилтон, С. Уайли. – М.: Мир, 1966. – 452 с.
3. *Маклейн, С.* Гомология / С. Маклейн. – М.: Мир, 1966. – 544 с.


УДК 517.5

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ В СЛУЧАЕ ЦЕЛЫХ $\alpha$ И $\beta$

**А.А. Нурмагомедов**

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Махачкала,
лаборатория теории функций и приближений
E-mail: alimn@mail.ru

В этой работе исследуются асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных с весом $(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\Delta t_j$ на произвольных сетках, состоящих из конечного числа $N$ точек отрезка $[-1, 1]$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании $n$ вместе с $N$, асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Якоби.

**Ключевые слова:** многочлен, ортогональная система, сетка, вес, весовая оценка, асимптотическая формула.

**Asymptotic Properties of Polynomials $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, Orthogonal on Any Sets in the Case of Integers $\alpha$ and $\beta$**

**A.A. Nurmagomedov**

South Mathematical Institute of Vladikavkaz Science Center of the RAS, Mahachkala,
Laboratory of the Theory of Functions and Approximations
E-mail: alimn@mail.ru

Asymptotic properties of polynomials $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, orthogonal with weight $(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\Delta t_j$ on any finite set of $N$ points from segment $[-1, 1]$ are investigated. Namely an asymptotic formula is proved in which asymptotic behaviour of these polynomials as $n$ tends to infinity together with $N$ is closely related to asymptotic behaviour of the Jacobi polynomials.

**Key words:** polynomial, ortogonal system, set, weight, weighted estimate, approximation formula.

## ВВЕДЕНИЕ

Последовательность многочленов, ортогональных на конечном множестве точек действительной прямой $R$, впервые была введена и исследована в целом ряде работ П. Л. Чебышева в связи с задачами математической статистики. В работах А. А. Маркова, Шарлье, М. Ф. Кравчука, Мейкснера, Хана и других изучались системы ортогональных многочленов дискретного переменного, различающиеся выбором сетки и веса. В частности, подробно исследовались разностные свойства дискретных аналогов классических многочленов Эрмита и Лагерра — многочленов, соответственно, М. Ф. Кравчука и Мейкснера.

Дальнейшее развитие теории многочленов, ортогональных на дискретных системах точек, связано с работами Хана, Вебера и Эрдейи, А. Ф. Никифорова, В. Б. Уварова, С. К. Суслова и многих других математиков и физиков. Были получены многочисленные приложения многочленов, ортогональных на дискретных системах точек в генетике, теории кодирования, квантовой механике, математической статистике и т.д.

Большая часть этих приложений приводят к задаче об асимптотических свойствах и весовых оценках ортогональных многочленов. Целенаправленное ее изучение было проведено в работах И. И. Шарапудинова. Задача состояла в том, чтобы получить такие оценки для остаточных членов асимптотических формул, из которых и известных весовых оценок для классических многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита вытекали бы неулучшаемые по порядку при $n \to \infty$ весовые оценки для многочленов Чебышева, Мейкснера и Кравчука, стремясь одновременно к тому, чтобы эти оценки оставались верны при минимальных ограничениях на рост степени $n$ в зависимости от числа точек сетки $N$.

В монографии (см. [1, гл. 3, § 3.7, теорема 3.7.1]) И. И. Шарапудиновым для ортонормированных на равномерной сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ многочленов Чебышева $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть $\alpha$ и $\beta$ — целые неотрицательные числа, $a > 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x),$$

*для остаточного члена $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ которой при $1 \le n \le aN^{1/2}$ справедлива оценка*

$$|\ \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\ | \le c(\alpha,\beta,a)\frac{n}{\sqrt{N}}\left[\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2}\left[\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2},$$

*где $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ — ортонормированный многочлен Якоби.*

Нам удалось перенести эту теорему на произвольный случай.

Пусть $\alpha$, $\beta$ — целые неотрицательные числа, $T_N = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1]$: $-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$. Рассмотрим также еще одну сетку $X_N = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$, состоящую из $N$ точек $x_j$, где

$$x_j = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Через

$$\hat{p}_k^{\alpha,\beta}(x) = \hat{p}_k^{\alpha,\beta}(x; T_N) \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{0.1}$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке $X_N$ в следующем смысле $(0 \le n, m \le N-1)$:

$$(\hat{p}_n^{\alpha,\beta}, \hat{p}_m^{\alpha,\beta}) = \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_m^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j = \delta_{nm}, \tag{0.2}$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, j = 0, 1, \ldots, N-1$. Для определенности будем считать, что старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$ положителен, т. е.

$$\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x) = k_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0, \qquad k_n > 0. \tag{0.3}$$

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства многочлена $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$ при $n, N \to \infty$.

Ниже нам понадобится обобщение на интегральные метрики известного неравенства В. А. Маркова для производных алгебраических многочленов. А именно пусть $q_n(x)$ — произвольный алгебраический многочлен степени $n, 0 \le r \le n$. Тогда имеет место [2] оценка

$$\int_{-1}^{1}\left|q_n^{(r)}(x)\right|\,dx \le c(r)n^{2r}\int_{-1}^{1}|q_n(x)|\,dx, \tag{0.4}$$

где $c(r), c(\alpha,\beta),\dots,c(\alpha,\beta,\dots,\gamma)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах. Через $æ_r$ мы обозначим наименьшую константу в неравенстве (0.4), т. е.

$$æ_r=\inf_{q_n}\frac{\int\limits_{-1}^{1}\left|q_n^{(r)}(x)\right|\,dx}{n^{2r}\int\limits_{-1}^{1}|q_n(x)|\,dx},$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим многочленам $q_n(x)$ степени $n$, не равными нулю тождественно.

Далее, пусть $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ — ортонормированный многочлен Якоби, $\delta_N=\max\limits_{0\le j\le N-1}\Delta t_j$.

В данной работе установлены:

1) *асимптотическая формула*

$$\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)=\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)+\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x),$$

в которой для остаточного члена $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ при $1\le n\le a\delta_N^{-1/2}$ имеет место оценка

$$\left|\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\le c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{5/2}\left[\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2}\left[\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2},$$

где $0<a<\left(\frac{1-b}{2æ_2}\right)^{1/4}$, $b>0$.

2) *весовая оценка*

$$|\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)|\le c(\alpha,\beta,a,b)\left(\delta_N n^{5/2}+1\right)\left[\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2}\left[\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2}.$$

Здесь следует отметить, что данная работа есть обобщение ранее полученного нами результата [3] и аналог работы [4] в случае, когда конечная последовательность многочленов $\{\hat{p}_k^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ образует ортонормированную систему на сетке $T_N$ в смысле (0.2).

## 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Мы здесь приведем некоторые сведения о многочленах Якоби. Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ $(n=0,1,2,\dots)$ с помощью обобщенной формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{k(x)}\frac{d^n}{dx^n}\{k(x)\sigma^n(x)\},$$

где $\alpha$, $\beta$ — произвольные действительные числа, $\sigma(x)=1-x^2$, $k(x)=k(x;\alpha,\beta)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Если $\alpha$, $\beta>-1$, то многочлены Якоби образуют ортонормированную систему с весом $k(x)$, т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1}k(x)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\,dx=h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta}=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

и, следовательно, $h_n^{\alpha,\beta}\asymp n^{-1}$ $(n=1,2,\dots)$.

Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Якоби [5]:

*производная*

$$\frac{d^r}{dx^r}P_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r}P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x)\qquad(0\le r\le n),\tag{1.1}$$

где $(a)_0=1,(a)_\nu=a(a+1)\dots(a+\nu-1)$, *весовая оценка* $(-1 \le x \le 1)$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

*в частности,*

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le c(\alpha,\beta)\,(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \qquad \left(0 \le x \le 1-n^{-2}\right), \tag{1.3}$$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le c(\alpha,\beta)n^{\alpha+\frac{1}{2}} \qquad \left(1-n^{-2} \le x \le 1\right), \tag{1.4}$$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le c(\alpha,\beta)\,(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \qquad \left(-1+n^{-2} \le x \le 0\right),$$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le c(\alpha,\beta)n^{\beta+\frac{1}{2}} \qquad \left(-1 \le x \le -1+n^{-2}\right), \tag{1.5}$$

*симметрия*

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x). \tag{1.6}$$

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы здесь докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

**Лемма 2.1.** *Пусть функция* $f(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $x_j = (t_{j+1}+t_j)/2$, $j = 0,1,\ldots,N-1$. *Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\Delta t_j + r_N(f), \tag{2.1}$$

*в котором для остаточного члена* $r_N(f)$ *имеет место оценка*

$$|r_N(f)| \le \frac{1}{8}\delta_N^2 \int\limits_a^b |f''(t)|\,dt. \tag{2.2}$$

**Доказательство.** Имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx.$$

Далее, воспользовавшись формулой Тейлора, мы можем записать

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ f(x_j) + f'(x_j)(x-x_j) + \int\limits_{x_j}^{x} (x-t)f''(t)\,dt \right] dx = f(x_j)\Delta t_j + f'(x_j)\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}(x-x_j)dx +$$
$$+ \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx = f(x_j)\Delta t_j + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx. \tag{2.3}$$

Повторный интеграл в равенстве (2.3) запишем следующим образом:

$$J = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx = \int\limits_{t_j}^{x_j}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx + \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим сначала $J_1$:

$$J_1 = \int\limits_{t_j}^{x_j}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx = -\int\limits_{t_j}^{x_j} f''(t)\,dt \int\limits_{t_j}^{t}(x-t)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{t_j}^{x_j}(t_j-t)^2 f''(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Займемся теперь $J_2$:

$$J_2 = \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t) f''(t)\, dt\, dx = \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} f''(t)\, dt \int\limits_{t}^{t_{j+1}} (x-t)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1}-t)^2 f''(t)\, dt. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) имеем

$$| J | \le \ | J_1 | + | J_2 | \le \frac{1}{8}\delta_N^2 \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} | f''(t) | \ dt. \tag{2.6}$$

Тогда из (2.3) и (2.6) находим

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\Delta t_j + r_N(f),$$

где

$$|r_N(f)| = \left| \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t) f''(t)\, dt\, dx \right| \le \frac{1}{8}\delta_N^2 \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(t)|\, dt = \frac{1}{8}\delta_N^2 \int\limits_a^b |f''(t)|\, dt.$$

Лемма 2.1 доказана.

В качестве следствия леммы 2.1 отметим следующее утверждение.

**Следствие 2.1.** *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$, $-1 = t_0 < < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = 1$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $x_j = (t_{j+1}+t_j)/2$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\Delta t_j + r_N(f), \tag{2.1$'$}$$

*в котором для остаточного члена $r_N(f)$ имеет место оценка*

$$|r_N(f)| \le \frac{1}{8}\delta_N^2 \int\limits_{-1}^{1} |f''(t)|\, dt. \tag{2.2$'$}$$

**Лемма 2.2.** *Пусть $\alpha$, $\beta > -1$,*

$$x_1^* = \min\{x_j : -1 + n^{-2} \le x_j \le 1 - n^{-2}\}, \qquad x_2^* = \max\{x_j : -1 + n^{-2} \le x_j \le 1 - n^{-2}\}.$$

*Тогда для нормированного многочлена Якоби $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta}(x)$ имеет место следующая формула:*

$$\sum_{x_1^* \le x_j \le x_2^*} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j))^2 \Delta t_j = 1 - r_{n,N}, \tag{2.7}$$

*в которой*

$$|r_{n,N}| \le c(\alpha,\beta)\delta_N^2 n^3. \tag{2.8}$$

**Доказательство.** Мы имеем

$$1 = \int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\, dx = \int\limits_{-1}^{-1+n^{-2}} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\, dx +$$

$$+ \int\limits_{-1+n^{-2}}^{1-n^{-2}} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\, dx + \int\limits_{1-n^{-2}}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\, dx = I_1 + I_2 + I_3. \tag{2.9}$$

Вначале оценим $I_1$. В силу (1.5) имеем

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{-1+n^{-2}} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx \le c(\alpha,\beta) n^{2\beta+1} \int\limits_{-1}^{-1+n^{-2}} (1+x)^\beta\,dx \le c(\alpha,\beta) n^{-1}. \qquad (2.10)$$

Далее, из (1.4) мы находим, что

$$I_3 = \int\limits_{1-n^{-2}}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx \le c(\alpha,\beta) n^{2\alpha+1} \int\limits_{1-n^{-2}}^{1} (1-x)^\alpha\,dx \le c(\alpha,\beta) n^{-1}. \qquad (2.11)$$

Теперь перейдем к оценке интеграла $I_2$. Полагая $f(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2 = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1} \times$ $\times (1-x)^\alpha(1+x)^\beta(P_n^{\alpha,\beta}(x))^2$, воспользуемся леммой 3.1. Тогда

$$\int\limits_{-1+n^{-2}}^{1-n^{-2}} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx = \sum_{x_1^*\le x_j\le x_2^*} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j))^2\Delta t_j + \bar{r}_{n,N}, \qquad (2.12)$$

где $\bar{r}_{n,N} = r_N((1-x)^\alpha(1+x)^\beta(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2)$, и, стало быть,

$$|\bar{r}_{n,N}| \le \frac{1}{8}\delta_N^2 \int\limits_{-1+n^{-2}}^{1-n^{-2}} \left|\{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}''\right|\,dx. \qquad (2.13)$$

Далее, в силу (1.1) имеем

$$\{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}'' = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1}\{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(P_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}\}'' =$$
$$= \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1}\{\varphi(x)(1-x)^{\alpha-2}(1+x)^{\beta-2}(P_n^{\alpha,\beta}(x))^2 + (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\psi(x)\{(P_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}' +$$
$$+(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\{(P_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}''\} = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1}\{\varphi(x)(1-x)^{\alpha-2}(1+x)^{\beta-2}(P_n^{\alpha,\beta}(x))^2 +$$
$$+(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\psi(x)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) +$$
$$+2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\left(\frac{n+\alpha+\beta+1}{2}P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x)\right)^2 +$$
$$+\frac{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)}{2}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n-2}^{\alpha+2,\beta+2}(x)\},$$

где $\varphi(x) = (\beta-\alpha)^2 + 2(\beta-\alpha)[1-(\alpha+\beta)x] + (\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)x^2$, $\psi(x) = 2[\beta-\alpha-(\alpha+\beta)x]$. Поэтому в силу (1.3) получим $(0 \le x \le 1-n^{-2})$

$$\left|\{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}''\right| \le c(\alpha,\beta)[\mid \varphi(x)\mid (1-x)^{\alpha-2}(\sqrt{n}\mid P_n^{\alpha,\beta}(x)\mid)^2 +$$
$$+n\mid\psi(x)\mid(1-x)^{\alpha-1}\sqrt{n}\mid P_n^{\alpha,\beta}(x)\mid\sqrt{n-1}\mid P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x)\mid + n^2(1-x)^\alpha\left(\sqrt{n-1}\mid P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x)\mid\right)^2 +$$
$$+n^2(1-x)^\alpha\sqrt{n}\mid P_n^{\alpha,\beta}(x)\mid\sqrt{n-2}\mid P_{n-2}^{\alpha+2,\beta+2}(x)\mid] \le c(\alpha,\beta)[\mid\varphi(x)\mid(1-x)^{\alpha-2}\left((1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)^2 +$$
$$+n\mid\psi(x)\mid(1-x)^{\alpha-1}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{4}} +$$
$$+n^2(1-x)^\alpha\left((1-x)^{-\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{4}}\right)^2 + n^2(1-x)^\alpha(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{\alpha+2}{2}-\frac{1}{4}}] \le$$
$$\le c(\alpha,\beta)\left[\mid\varphi(x)\mid(1-x)^{-5/2} + n\mid\psi(x)\mid(1-x)^{-2} + n^2(1-x)^{-3/2}\right].$$

Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\int\limits_{0}^{1-n^{-2}} \left|\{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}''\right|\,dx \le Z_1 + Z_2 + Z_3, \qquad (2.14)$$

где

$$Z_1 = c(\alpha,\beta) \int\limits_0^{1-n^{-2}} |\ \varphi(x)\ |\ (1-x)^{-5/2}\, dx \le c(\alpha,\beta) n^3, \tag{2.15}$$

$$Z_2 = c(\alpha,\beta) n \int\limits_0^{1-n^{-2}} |\ \psi(x)\ |\ (1-x)^{-2}\, dx \le c(\alpha,\beta) n^3, \tag{2.16}$$

$$Z_3 = c(\alpha,\beta) n^2 \int\limits_0^{1-n^{-2}} (1-x)^{-3/2} dx \le c(\alpha,\beta) n^3. \tag{2.17}$$

Из (2.14)–(2.17) находим

$$\int\limits_0^{1-n^{-2}} \left| \{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}'' \right| dx \le c(\alpha,\beta) n^3.$$

Случай $-1+n^{-2} \le x \le 0$ равенством (1.6) приводится к рассмотренному.

Следовательно,

$$\int\limits_{-1+n^{-2}}^{1-n^{-2}} \left| \{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}'' \right| dx \le c(\alpha,\beta) n^3. \tag{2.18}$$

Сопоставляя (2.18), (2.9)–(2.13), приходим к утверждению леммы 2.2. □

**Лемма 2.3.** *Пусть* $\alpha, \beta$ *— целые неотрицательные числа и* $æ_2 \delta_N^2 n^4 < 1/2$. *Тогда для ортонормированного многочлена* (0.3) *имеет место следующая формула:*

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\, dx = 1 + R_{n,N},$$

*в которой*

$$|R_{n,N}| \le \frac{2æ_2 \delta_N^2 n^4}{1 - 2æ_2 \delta_N^2 n^4}. \tag{2.19}$$

**Доказательство.** В силу следствия 2.1

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x_j))^2 \Delta t_j + R_{n,N}, \tag{2.20}$$

где $R_{n,N} = r_N((1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2)$ и стало быть в силу (2.2′)

$$|R_{n,N}| \le \frac{1}{8} \delta_N^2 \int\limits_{-1}^{1} \left| \{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}'' \right| dx. \tag{2.21}$$

Далее, из неравенства (0.4) следует, что

$$\int\limits_{-1}^{1} \left| \{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\}'' \right| dx \le 16æ_2 n^4 \int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\, dx. \tag{2.22}$$

Сопоставляя (2.21) и (2.22), получим

$$|R_{n,N}| \le 2æ_2 \delta_N^2 n^4 \int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\, dx. \tag{2.23}$$

Кроме того, из (2.20) и (2.23) следует, что

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx \le 1+2æ_2\delta_N^2 n^4\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx. \tag{2.24}$$

Если теперь $æ_2\delta_N^2 n^4<1/2$, то из (2.24) получаем

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx \le \frac{1}{1-2æ_2\delta_N^2 n^4}. \tag{2.25}$$

А теперь из (2.23) и (2.25) непосредственно следует оценка (2.19). Лемма 2.3 доказана.

**Лемма 2.4.** *Пусть $\alpha,\beta$ — целые неотрицательные числа, $\delta_N=O(n^{-2})$, $k_n$ — старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, а $\lambda_n$ — старший коэффициент многочлена Якоби $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$. Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{1}{1+c(\alpha,\beta)\delta_N^2 n^3}\le\frac{k_n}{\lambda_n}\le\frac{1}{(1-2æ_2\delta_N^2 n^4)^{1/2}}. \tag{2.26}$$

**Доказательство.** Легко заметить, что

$$\lambda_n^2=\frac{1}{\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx}, \tag{2.27}$$

где $\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ — многочлен Якоби с единичным старшим коэффициентом. Если $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$ — многочлен из последовательности (0.1), то

$$k_n^2=\frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}(p_n^{\alpha,\beta}(x_j))^2\Delta t_j}, \tag{2.28}$$

где $p_n^{\alpha,\beta}(x)$ — многочлен из последовательности (0.1) с единичным старшим коэффициентом. Далее, в силу (2.27) и (2.28) получим:

$$\frac{k_n^2}{\lambda_n^2}=\frac{1}{\lambda_n^2\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}(p_n^{\alpha,\beta}(x_j))^2\Delta t_j}\ge\frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j))^2\Delta t_j}. \tag{2.29}$$

Последнюю сумму в неравенстве (2.29) представим в виде

$$\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j))^2\Delta t_j=\sum_{-1<x_j<-1+n^{-2}}+\sum_{x_1^*\le x_j\le x_2^*}+\sum_{1-n^{-2}<x_j<1}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3. \tag{2.30}$$

Оценим $\sigma_1$. В силу весовой оценки (1.5) мы имеем

$$\sigma_1=\sum_{-1<x_j<-1+n^{-2}}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j))^2\Delta t_j\le c(\alpha,\beta)\sum_{-1<x_j<-1+n^{-2}}(1+x_j)^{\beta}(n^{\beta+1/2})^2\Delta t_j\le$$
$$\le c(\alpha,\beta)n^{2\beta+1}\sum_{-1<x_j<-1+n^{-2}}(1+x_j)^{\beta}\Delta t_j\le c(\alpha,\beta)n^{2\beta+1}n^{-2\beta}\sum_{-1<x_j<-1+n^{-2}}\Delta t_j\le$$
$$\le c(\alpha,\beta)n\left[\sum_{-1<t_{j+1}<-1+n^{-2}}(t_{j+1}-t_j)+(t_{p+1}-t_p)\right]\le c(\alpha,\beta)n(n^{-2}+\delta_N)\le c(\alpha,\beta)n^{-1}, \tag{2.31}$$

где $p=\max\limits_{-1<x_j<-1+n^{-2}} j$.

Теперь оценим $\sigma_3$. В силу (1.4) мы находим, что

$$\sigma_3 = \sum_{1-n^{-2}<x_j<1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j))^2\Delta t_j \le c(\alpha,\beta) \sum_{1-n^{-2}<x_j<1} (1-x_j)^{\alpha}(n^{\alpha+1/2})^2\Delta t_j \le$$

$$\le c(\alpha,\beta)n^{2\alpha+1} \sum_{1-n^{-2}<x_j<1} (1-x_j)^{\alpha}\Delta t_j \le c(\alpha,\beta)n^{2\alpha+1}n^{-2\alpha} \sum_{1-n^{-2}<x_j<1} \Delta t_j \le$$

$$\le c(\alpha,\beta)n \left[ \sum_{1-n^{-2}<t_{j+1}\le 1} (t_{j+1}-t_j) + (t_{q-1}-t_q) \right] \le c(\alpha,\beta)n(n^{-2}+\delta_N) \le c(\alpha,\beta)n^{-1}, \qquad (2.32)$$

где $q = \min\limits_{1-n^{-2}<x_j<1} j$.

Сопоставляя (2.29)–(2.32) и (2.7)–(2.8), имеем

$$\frac{k_n^2}{\lambda_n^2} \ge \frac{1}{1+c(\alpha,\beta)\delta_N^2 n^3}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует левая часть неравенства (2.26).

Для доказательства правой части этого неравенства, воспользуемся интегральным неравенством Коши – Буняковского. Тогда получим

$$\frac{k_n}{\lambda_n} = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\,dx \le$$

$$\le \left( \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx \right)^{1/2} \left( \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx \right)^{1/2} \le \frac{1}{(1-2æ_2\delta_N^2 n^4)^{1/2}}\ .$$

Лемма 2.4 доказана.

## 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$

Здесь мы получим асимптотическую формулу для многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортонормированных на $X_N$ в смысле (0.2).

**Теорема 3.1.** *Пусть $\alpha$ и $\beta$ — целые неотрицательные числа, $b>0$, $0<a<\left(\frac{1-b}{2æ_2}\right)^{1/4}$. Тогда имеет место асимптотическая формула:*

$$\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x) = \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x), \qquad (3.1)$$

*в которой для остаточного члена $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ при $1\le n\le a\delta_N^{-1/2}$ справедлива оценка*

$$|\ \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\ | \le c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{5/2} \left[\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2} \left[\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2}. \qquad (3.2)$$

**Доказательство.** Оценим следующий интеграл

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \left\{\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right\}^2 dx = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \left\{\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) - \hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)\right\}^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx - 2\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)\,dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x))^2\,dx = I_1+I_2+I_3.$$

Ясно, что $I_1 = 1$, $I_2 = -2k_n/\lambda_n$. В силу леммы 2.3 имеем

$$I_3 \le 1 + \frac{2æ_2\delta_N^2 n^4}{1 - 2æ_2\delta_N^2 n^4}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \left\{ v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \right\}^2 dx \le \frac{c(\alpha,\beta)\delta_N^2 n^3}{1 + c(\alpha,\beta)\delta_N^2 n^3} + \frac{2æ_2\delta_N^2 n^4}{1 - 2æ_2\delta_N^2 n^4} < c(\alpha,\beta,a,b,æ_2)\delta_N^2 n^4. \quad (3.3)$$

Из неравенства (3.3), используя теорему 7.71.1 работы [5], легко получить утверждение теоремы 3.1. □

Сопоставляя (3.1), (3.2) с (1.2), приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.2.** *Пусть $\alpha$ и $\beta$ — целые неотрицательные числа, $b > 0$, $0 < a < \left(\frac{1-b}{2æ_2}\right)^{1/4}$, $1 \le n \le a\delta_N^{-\frac{1}{2}}$, $-1 \le x \le 1$. Тогда существует постоянная $c(\alpha,\beta,a,b) > 0$ такая, что*

$$|\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)| \le c(\alpha,\beta,a,b)\left(\delta_N n^{5/2} + 1\right)\left[\sqrt{1-x} + \frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2}\left[\sqrt{1+x} + \frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 07-01-00143-*а*).

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю И. И. Шарапудинову за поставленную задачу, а также за ряд полезных замечаний.

**Библиографический список**

1. *Шарапудинов, И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам / И.И. Шарапудинов. – Махачкала: ДНЦ, 2004. – 276 с.

2. *Даугавет, И. К.* О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов / И. К. Даугавет, С. З. Рафальсон // Вестн. Ленинград. ун-та. – 1974. – № 19. – С. 18–24.

3. *Нурмагомедов, А. А.* Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках / А. А. Нурмагомедов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – 2008. – Т. 8, вып. 1. Сер. Математика. Механика. Информатика. – С. 25–31.

4. *Нурмагомедов, А. А.* Асимптотика многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$, ортогональных на произвольных сетках / А. А. Нурмагомедов // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию: Сб. докл. VI Междунар. конф. «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». – Владикавказ, 2008. – С. 200–211.

5. *Сеге, Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

УДК 517.54

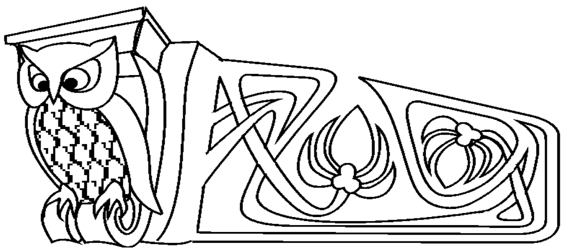
# ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ЧАСТНОГО ВИДА УРАВНЕНИЯ ЛЁВНЕРА

**Д.В. Прохоров, А.М. Захаров**

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: ProkhorovDV@info.sgu.ru

Приводится решение в квадратурах частного случая уравнения Лёвнера для полуплоскости.

**Ключевые слова:** уравнение Лёвнера, интегрируемость, сингулярное решение.



**Integrability of a Partial Case of the Löwner Equation**

**D.V. Prokhorov, A.M. Zakharov**

Saratov State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: ProkhorovDV@info.sgu.ru

We give a quadrature solution to the partial case of the Löwner equation for the upper half-plane.

**Key words:** the Löwner equation, integrability, singular solution.