Пусть B — оператор умножения на функцию $p \in \mathrm{L}_\infty(0,\infty)$, причем B и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\varepsilon\|p\|_\infty < \min_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|/2 = |\lambda_1 - \lambda_0|/2 = 3/2,$$

где $\|p\|_\infty = \operatorname*{essential\,sup}_{t\in(0,\infty)} |p(t)|$. Тогда оператор $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$ — самосопряженный, имеет простой спектр и ядерную резольвенту в $\mathbb{H}$.

Пусть $n = 10$, $m = 20$, $\alpha = 1$, функция $p(t) = \exp(-t)(t^3 - 2t^2 + 3t - 1)$, а $\varepsilon = 1$. Поэтому $\varepsilon\|p\|_\infty < 3/2$, $h = \varepsilon/m = 0.05$.

Действуя по аналогии с предыдущими примерами, получим

$$\lambda_0(1) \approx \lambda_{\bar{0}}^{20} = 1.62001614319061257051596195543,$$

$$x_0(1) \approx X_{\bar{0}}^{20}(10,1) = -0.05264000761646135287826538974 4t+$$

$$+0.01273236406345979113565094493 3t^2 - 0.00204673650450553741374697814182t^3+$$

$$+0.000446522703920816561857567 89t^4 - 0.0000747379269078067151938408516 9t^5+$$

$$+0.00000756682745671286932390335t^6 - 0.000000455354377265940100671732 77t^7+$$

$$+0.000000015947695988591824706 16t^8 - 0.2990146182214694081231636 1\cdot 10^{-9}\cdot t^9+$$

$$+0.2309419056744542977 81\cdot 10^{-11}\cdot t^{10} + 0.76898144531205187143293692807 0,$$

$$\|\varpi_0\| := \|C(1)X_{\bar{0}}^{20}(10,1) - \lambda_{\bar{0}}^{20} X_{\bar{0}}^{20}(10,1)\| < 0.0223.$$

Описанный метод обладает достоинством: его нетрудно реализовать на практике, используя компьютерные математические пакеты, а контролировать методом невязок.

Библиографический список

1. *Дородницын А. А.* Избранные научные труды: в 2 т. Т. 1. М.: ВЦ РАН, 1997. 396 с.
2. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001. 382 с.
3. *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 384 с.
4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: в 5 т. Т. 2. М.: Наука, 1967. 656 с.
5. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд-во ТТЛ, 1953. 468 с.

УДК 517.5

МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А.А. Нурмагомедов

Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала,
кафедра прикладной математики
E-mail: alimn@mail.ru

В работе исследуются асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n(t)$, ортогональных с весом Δt_j на произвольных сетках, состоящих из конечного числа N точек отрезка $[-1,1]$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лежандра. Кроме того, исследованы аппроксимативные свойства сумм Фурье по этим многочленам.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, вес, весовая оценка, асимптотическая формула, приближение.

Polynomials, Orthogonal on Non-Uniform Grids

A.A. Nurmagomedov

Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala,
Chair of Applied Mathematics
E-mail: alimn@mail.ru

Asymptotic properties of polynomials $\hat{p}_n(t)$, orthogonal with weight Δt_j on any finite set of N points from segment $[-1,1]$ are investigated. Namely an asymptotic formula is proved in which asymptotic behaviour of these polynomials as n tends to infinity together with N is closely related to asymptotic behaviour of the Lasiandra polynomials. Furthermore are investigated the approximating properties of the sums by Fourier on these polynomials.

Key words: polinomial, ortogonal system, set, weight, weighted estimate, asymptotic formula, approximation.

© Нурмагомедов А. А., 2011

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интерес к теории многочленов, ортогональных на дискретных системах точек, сильно возрос, она получила интенсивное развитие и нашла многочисленные приложения. Большая часть этих приложений приводит к задаче об асимптотических свойствах и весовых оценках ортогональных многочленов. В прикладных и теоретических исследованиях часто применяются разложения в ортогональные ряды. При этом приходится решать следующую промежуточную задачу: для заданной функции $f = f(x)$ из того или иного класса и выбранной ортонормированной системы $\{\varphi_n\}$ требуется оценить отклонение частичной суммы $S_n(f) = S_n(f,x)$ ряда Фурье функции f по системе $\{\varphi_n\}$ от самой функции f.

Приведенная задача хорошо известна и детально изучена для многих классических ортонормированных систем. В частности, в работах [1, 2] было исследовано поведение частичных сумм Фурье – Якоби $S_m^{\alpha,\beta}(f)$ порядка m функции $f \in C[-1,1]$. Доказано, что при $\lambda = \max\{\alpha,\beta\} > -1/2$ норма оператора частичных сумм Фурье – Якоби растет со скоростью $O(m^{\lambda+1/2})$. Тем не менее, оставался ряд классических ортонормированных систем, часто применяемых на практике в качестве базисов, для которых указанная задача почти не была исследована. Это многочлены, ортогональные на сетках.

Основной причиной того, что задача о приближении функций суммами Фурье по ортогональным на сетках многочленам оставалась не решенной, явилось отсутствие исследований по асимптотическим свойствам самих ортогональных многочленов дискретной переменной. И здесь следует заметить, что исследованию этой задачи посвящены многочисленные работы И. И. Шарапудинова. Например, в работе [3] исследован вопрос о сходимости частичных сумм Фурье – Чебышева $S_{n,N}(f)$ порядка $n \le N-1$ к функции $f \in C[-1,1]$ при $n = O(N^{1/2})$. В частности, доказано, что при $n = O(N^{1/2})$ норма оператора $S_{n,N} = S_{n,N}(f)$ в $C[-1,1]$ имеет порядок $\| S_{n,N} \| = O(n^{1/2})$.

И по аналогии с этими работами мы также исследовали асимптотические свойства многочленов, ортогональных на произвольных сетках, и аппроксимативные свойства сумм Фурье по этим многочленам.

Пусть $T_N = \{t_j\}_{j=0}^N$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1] : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$.

Через
$$\hat{p}_k(t) = \hat{p}_k(t;T_N) \qquad (k = 0,1,\ldots,N-1) \tag{0.1}$$
обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке T_N в следующем смысле $(0 \le n,m \le N-1)$:
$$(\hat{p}_n,\hat{p}_m) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_n(t_j)\hat{p}_m(t_j)\Delta t_j = \delta_{nm}, \tag{0.2}$$
где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0,1,\ldots,N-1$. Для определенности будем считать, что старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n(t)$ положителен, т. е.
$$\hat{p}_n(t) = k_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_0, \qquad k_n > 0. \tag{0.3}$$

Ниже нам понадобиться обобщение на интегральные метрики известного неравенства В. А. Маркова для производных алгебраических многочленов. А именно пусть $q_n(t)$ — произвольный алгебраический многочлен степени n, $0 \le r \le n$. Тогда имеет место [4, 5] оценка
$$\int_{-1}^{1} \left| q_n^{(r)}(t) \right| dt \le c(r)n^{2r} \int_{-1}^{1} |q_n(t)|\, dt, \tag{0.4}$$
где $c(r), c(\alpha,\beta),\ldots,c(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах. Через $\varkappa_r$ мы обозначим наименьшую константу в неравенстве (0.4), т. е.
$$\varkappa_r = \inf_{q_n} \frac{\int_{-1}^{1} \left| q_n^{(r)}(t) \right| dt}{n^{2r} \int_{-1}^{1} |q_n(t)|\, dt},$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим многочленам $q_n(t)$ степени n, не равными нулю тождественно.

Далее, пусть $\hat{P}_n(t)$ — ортонормированный многочлен Лежандра,

$$\delta_N = \max_{0\le j\le N-1} \Delta t_j. \tag{0.5}$$

В данной работе установлена:

1) *асимптотическая формула*

$$\hat{p}_n(t) = \hat{P}_n(t) + \upsilon_{n,N}(t),$$

в которой для остаточного члена $\upsilon_{n,N}(t)$ при $1\le n\le a\delta_N^{-1/2}$ $\quad (0 < a \le \{(1-b)/(4\varkappa_1)\}^{1/2},\ 0 < b < 1)$ имеет место оценка

$$\left|\upsilon_{n,N}(t)\right| \le c(a,b)\delta_N^{1/2} n^{3/2}\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}.$$

2) *весовая оценка*

$$|\hat{p}_n(t)| \le c(a,b)\left(\delta_N^{1/2} n^{3/2}+1\right)\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} \qquad (-1\le t\le 1).$$

Здесь следует заметить, что аналогичные результаты нами были получены в работе [6] в случае, когда конечная последовательность многочленов $\{\hat{p}_k(t)\}_{k=0}^{N-1}$ образует ортонормированную систему на множестве $X_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$, где $x_j = \dfrac{t_j+t_{j+1}}{2}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

3) *оценка:* для функции Лебега

$$L_{n,N}(t) = \sum_{j=0}^{N-1}\left|\sum_{k=0}^{n} \hat{p}_k(t)\hat{p}_k(t_j)\right|\Delta t_j$$

при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ равномерно относительно $-1 \le t \le 1$ справедливо неравенство

$$L_{n,N}(t) \le c(a,b) n^{1/2}.$$

1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Мы здесь приведем некоторые сведения о многочленах Якоби и Лежандра. Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ с помощью обобщенной формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{k(t)}\frac{d^n}{dt^n}\{k(t)\sigma^n(t)\},$$

где α, β — произвольные действительные числа, $\sigma(t) = 1-t^2$, $k(t) = k(t;\alpha,\beta) = = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$. Если $\alpha, \beta > -1$, то многочлены Якоби образуют ортогональную систему на $[-1, 1]$ с весом $k(t)$ в следующем смысле:

$$\int_{-1}^{1} k(t)P_n^{\alpha,\beta}(t)P_m^{\alpha,\beta}(t)\,dt = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

и, следовательно, $h_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Якоби [7]:

– *производная*

$$\frac{d^r}{dt^r}P_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r}P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(t) \qquad (0\le r\le n), \tag{1.1}$$

где $(a)_0 = 1, (a)_\nu = a(a+1)\ldots(a+\nu-1)$;

– *весовая оценка* $(-1 \le t \le 1)$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-t}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+t}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

в частности

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta)\,(1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \qquad \left(0 \le t \le 1-n^{-2}\right), \tag{1.3}$$
$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta)n^{\alpha+\frac{1}{2}} \qquad \left(1-n^{-2} \le t \le 1\right);$$

– *симметрия*

$$P_n^{\alpha,\beta}(-t) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(t);$$

– *равенство*

$$P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t) = \frac{n+\alpha+1}{n+1}P_n^{\alpha,\beta}(t) - \frac{2n+\alpha+\beta+2}{2(n+1)}(1-t)P_n^{\alpha+1,\beta}(t). \tag{1.4}$$

Одним из частных случаев многочленов Якоби при $\alpha=\beta=0$ являются многочлены Лежандра, ортогональные с единичным весом $k(t)\equiv 1$ на сегменте $[-1,1]$:

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,dt = \delta_{nm},$$

для которых, в частности, неравенство (1.2) имеет вид

$$\sqrt{n}\left|P_n(t)\right| \le c\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь мы докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 2.1. *Пусть функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$, $-1=t_0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N=1$, $\Delta t_j = t_{j+1}-t_j$, $j=0,1,\ldots,N-1$. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)\Delta t_j + r_N(f),$$

в котором для остаточного члена $r_N(f)$ имеет место оценка

$$|r_N(f)| \le \delta_N \int_{-1}^{1} |f'(x)|\,dx. \tag{2.1}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Далее, воспользовавшись формулой Тейлора, мы можем записать

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)\,dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[f(t_j)+\int_{t_j}^{t} f'(x)\,dx\right]dt = f(t_j)\Delta t_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{t_j}^{t} f'(x)\,dx\,dt =$$
$$= f(t_j)\Delta t_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1}-x)f'(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Поскольку (см. (0.5)) $\left|\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}(t_{j+1}-x)f'(x)\,dx\right| \le \delta_N \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}|f'(x)|\,dx$, то из (2.2) и (2.3) мы находим

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)\Delta t_j + r_N(f),$$

где

$$|r_N(f)| = \left|\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}(t_{j+1}-x)f'(x)\,dx\right| \le \delta_N \sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}|f'(x)|\,dx = \delta_N\int\limits_{-1}^{1}|f'(x)|\,dx.$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Для нормированного многочлена Лежандра* $\hat{P}_n(t) = \sqrt{(2n+1)/2}P_n(t)$ *имеет место следующая формула:*

$$\sum_{j=0}^{N-1}\hat{P}_n^2(t_j)\Delta t_j = 1 - r_{n,N}, \tag{2.4}$$

в которой

$$|r_{n,N}| \le c\delta_N n\ln(n+1). \tag{2.5}$$

Доказательство. Полагая $f(t) = \hat{P}_n^2(t) = \dfrac{2n+1}{2}P_n^2(t)$, воспользуемся леммой 2.1. Тогда

$$1 = \int\limits_{-1}^{1}\hat{P}_n^2(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1}\hat{P}_n^2(t_j)\Delta t_j + r_{n,N}, \tag{2.6}$$

где $r_{n,N} = r_N(\hat{P}_n^2)$ и, стало быть,

$$|r_{n,N}| \le \delta_N\int\limits_{-1}^{1}\left|\{\hat{P}_n^2(t)\}'\right|\,dt = 2\delta_N\int\limits_{0}^{1}\left|\{\hat{P}_n^2(t)\}'\right|\,dt. \tag{2.7}$$

Далее, в силу (1.1)

$$\{\hat{P}_n^2(t)\}' = \frac{2n+1}{2}\left\{P_n^2(t)\right\}' = (2n+1)\{P_n(t)P_n'(t)\} = \frac{(2n+1)(n+1)}{2}P_n(t)P_{n-1}^{1,1}(t).$$

Поэтому в силу весовой оценки (1.2) ((1.5)) получим

$$\left|\{\hat{P}_n^2(t)\}'\right| \le c(n+1)\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-2}.$$

Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\int\limits_{0}^{1}\left|\{\hat{P}_n^2(t)\}'\right|\,dt \le c(n+1)\int\limits_{0}^{1}\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-2}dt \le c(n+1)\ln(n+1). \tag{2.8}$$

Сопоставляя (2.6)–(2.8), приходим к оценке (2.5). Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $\varkappa_1\delta_N n^2 < 1/4$. *Тогда для ортонормированного многочлена* (0.3) *имеет место следующая формула:*

$$\int\limits_{-1}^{1}\hat{p}_n^2(t)\,dt = 1 + R_{n,N},$$

в которой

$$|R_{n,N}| \le \frac{4\varkappa_1\delta_N n^2}{1-4\varkappa_1\delta_N n^2}. \tag{2.9}$$

Доказательство. В силу леммы 2.1

$$\int_{-1}^{1} \hat{p}_n^2(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_n^2(t_j)\Delta t_j + R_{n,N}, \tag{2.10}$$

где $R_{n,N} = r_N(\hat{p}_n^2)$ и, стало быть, в силу (2.1)

$$|R_{n,N}| \le \delta_N \int_{-1}^{1} \left|\{\hat{p}_n^2(t)\}'\right|\,dt. \tag{2.11}$$

Далее, из неравенства (0.4) следует, что

$$\int_{-1}^{1} \left|\{\hat{p}_n^2(t)\}'\right|\,dt \le 4\varkappa_1 n^2 \int_{-1}^{1} \hat{p}_n^2(t)\,dt. \tag{2.12}$$

Сопоставляя (2.11) и (2.12), получим

$$|R_{n,N}| \le 4\varkappa_1 \delta_N n^2 \int_{-1}^{1} \hat{p}_n^2(t)\,dt. \tag{2.13}$$

Кроме того, из (2.10) и (2.13) следует, что

$$\int_{-1}^{1} \hat{p}_n^2(t)\,dt \le 1 + 4\varkappa_1 \delta_N n^2 \int_{-1}^{1} \hat{p}_n^2(t)\,dt. \tag{2.14}$$

Если теперь $\varkappa_1 \delta_N n^2 < 1/4$, то из (2.14) получаем

$$\int_{-1}^{1} \hat{p}_n^2(t)\,dt \le \frac{1}{1 - 4\varkappa_1 \delta_N n^2}. \tag{2.15}$$

А теперь из (2.13) и (2.15) непосредственно следует оценка (2.9). Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Пусть k_n — старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n(t)$, а λ_n — старший коэффициент многочлена Лежандра $\hat{P}_n(t)$. Тогда*

$$\frac{1}{1 + c\delta_N n \ln(n+1)} \le \frac{k_n}{\lambda_n} \le \frac{1}{(1 - 4\varkappa_1 \delta_N n^2)^{1/2}}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что если $\widehat{P}_n(t) = \lambda_n \widetilde{P}_n(t)$, то

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_n^2(t)\,dt},$$

где $\tilde{P}_n(t)$ — многочлен Лежандра с единичным старшим коэффициентом. Если $\hat{p}_n(t)$ — многочлен из последовательности (0.1), то

$$k_n^2 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{N-1} \tilde{p}_n^2(t_j)\Delta t_j}, \tag{2.17}$$

где $\tilde{p}_n(t)$ — многочлен из последовательности (0.1) с единичным старшим коэффициентом. Далее, в силу (2.4), (2.5) и (2.17) получим:

$$\frac{k_n^2}{\lambda_n^2} = \frac{1}{\lambda_n^2 \sum\limits_{j=0}^{N-1} \tilde{p}_n^2(t_j)\Delta t_j} \ge \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(t_j)\Delta t_j} \ge \frac{1}{1 + c\delta_N n \ln(n+1)}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует левая часть неравенства (2.16). Чтобы доказать правую часть этого неравенства, мы воспользуемся интегральным неравенством Коши – Буняковского. Тогда получим:

$$\frac{k_n}{\lambda_n} = \int\limits_{-1}^{1} \hat{p}_n(t)\hat{P}_n(t)\,dt \le \left(\int\limits_{-1}^{1} \hat{p}_n^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-1}^{1} \hat{P}_n^2(t)\,dt\right)^{1/2} \le \frac{1}{(1-4\varkappa_1\delta_N n^2)^{1/2}}.$$

Лемма 2.4 доказана.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{p}_n(t)$

Здесь мы получим асимптотическую формулу для многочленов $\hat{p}_n(t)$, ортонормированных на T_N в смысле (0.2).

Теорема 3.1. *Пусть* $0<b<1$, $0<a\le\{(1-b)/(4\varkappa_1)\}^{1/2}$ *и* $1\le n\le a\delta_N^{-1/2}$. *Тогда имеет место асимптотическая формула:*

$$\hat{p}_n(t) = \hat{P}_n(t) + \upsilon_{n,N}(t), \tag{3.1}$$

где для остаточного члена $\upsilon_{n,N}(t)$ *которой справедлива оценка*

$$\left|\upsilon_{n,N}(t)\right| \le c(a,b)\delta_N^{1/2}n^{3/2}\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Оценим следующий интеграл:

$$\int\limits_{-1}^{1}\{\upsilon_{n,N}(t)\}^2\,dt = \int\limits_{-1}^{1}\left\{\hat{P}_n(t)-\hat{p}_n(t)\right\}^2\,dt = \int\limits_{-1}^{1}\hat{P}_n^2(t)\,dt - 2\int\limits_{-1}^{1}\hat{P}_n(t)\hat{p}_n(t)\,dt + \int\limits_{-1}^{1}\hat{p}_n^2(t)\,dt = I_1+I_2+I_3.$$

Ясно, что $I_1=1$, $I_2=-2\dfrac{k_n}{\lambda_n}$. А в силу (2.15) $I_3 = 1+\dfrac{4\varkappa_1\delta_N n^2}{1-4\varkappa_1\delta_N n^2}$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1}\{\upsilon_{n,N}(t)\}^2\,dt \le \frac{c\delta_N n\ln(n+1)}{1+c\delta_N n\ln(n+1)} + \frac{4\varkappa_1\delta_N n^2}{1-4\varkappa_1\delta_N n^2} < c(a,b,\varkappa_1)\delta_N n^2. \tag{3.3}$$

Из неравенства (3.3), используя теорему 7.71.1 [7], легко получить утверждение теоремы 3.1.

Сопоставляя (3.1), (3.2) с (1.5), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.2. *Пусть* $0<b<1$, $0<a\le\{(1-b)/(4\varkappa_1)\}^{1/2}$ *и* $1\le n\le a\delta_N^{-1/2}$. *Тогда существует постоянная* $c(a,b)>0$ *такая, что*

$$|\hat{p}_n(t)|\le c(a,b)\left(\delta_N^{1/2}n^{3/2}+1\right)\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} \qquad (-1\le t\le 1). \tag{3.4}$$

4. ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ $\hat{p}_n(t)$

Пусть $C[-1,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $f(t)$ с нормой

$$\| f \| = \| f \|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le t\le 1} | f(t) |,$$

$\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени n, $E_n(f) = \min\limits_{q_n\in\mathcal{P}_n} \| f - q_n \|_{C[-1,1]}$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени n.

Через $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f,t)$ обозначим частичную сумму n-го порядка ряда Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\hat{p}_k(t)\}_{k=0}^{N-1}$, т. е. $S_{n,N}(f) = \sum\limits_{k=0}^{n}\hat{f}_k\hat{p}_k(t)$, где $\hat{f}_k = \sum\limits_{j=0}^{N-1} f(t_j)\hat{p}_k(t_j)\Delta t_j$.

Рассмотрим задачу об оценке отклонения частичной суммы $S_{n,N}(f)$ ряда Фурье функции f по системе $\{\hat{p}_k(t)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции f при $t\in[-1,1]$ и $n,N\to\infty$.

Положим

$$L_{n,N}(t) = \sum_{j=0}^{N-1}\left|K_{n,N}(t,t_j)\right|\Delta t_j, \tag{4.1}$$

$$K_{n,N}(t,t_j) = \sum_{k=0}^{n} \hat{p}_k(t)\hat{p}_k(t_j). \tag{4.2}$$

Как известно, задача об оценке величины $|f(t) - S_{n,N}(f,t)|$ с помощью неравенства Лебега

$$|f(t) - S_{n,N}(f,t)| \le (1 + L_{n,N}(t))E_n(f) \tag{4.3}$$

сводится к задаче об оценке функции Лебега $L_{n,N}(t)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть* $f \in C[-1,1]$, $0 < b < 1$, $0 < a \le \left(\dfrac{1-b}{4\varkappa_1}\right)^{1/2}$, $n = O(\delta_N^{-1/5})$. *Тогда справедливо неравенство* $(-1 \le t \le 1)$

$$L_{n,N}(t) \le c(a,b)n^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $0 \le t \le 1 - 4n^{-2}$. Функцию $L_{n,N}(t)$, определяемую равенством (4.1), разобьем по следующей схеме:

$$L_{n,N}(t) = \sum_{-1 \le t_j \le -1/2} |\, K_{n,N}(t,t_j) \,|\, \Delta t_j + \sum_{-1/2 \le t_j \le y_1} |\, K_{n,N}(t,t_j) \,|\, \Delta t_j +$$

$$+ \sum_{y_1 \le t_j \le y_2} |\, K_{n,N}(t,t_j) \,|\, \Delta t_j + \sum_{y_2 \le t_j \le 1} |\, K_{n,N}(t,t_j) \,|\, \Delta t_j = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \tag{4.4}$$

где $y_1 = t - \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{n}$, $y_2 = t + \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{n}$.

Чтобы оценить A_1, воспользуемся формулой Кристоффеля – Дарбу $(n \le N-2)$:

$$\sum_{k=0}^{n} \hat{p}_k(t)\hat{p}_k(t_j) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{\hat{p}_{n+1}(t)\hat{p}_n(t_j) - \hat{p}_n(t)\hat{p}_{n+1}(t_j)}{t - t_j}, \tag{4.5}$$

где k_n — старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n(t)$. Далее, пользуясь, с одной стороны, тем, что для старшего коэффициента λ_n ортонормированного многочлена Лежандра $\widehat{P}_n(t)$ имеет место неравенство $\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \le c$, а с другой стороны, в силу неравенства (2.16) мы имеем

$$\mu_n = \frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \frac{k_n/\lambda_n}{k_{n+1}/\lambda_{n+1}} \le c\frac{1 + \delta_N n \ln(n+1)}{(1 - 4\varkappa_1 \delta_N n^2)^{1/2}} \le c(b)(1 + \delta_N n \ln(n+1)) \le$$

$$\le c(b)\left(1 + \delta_N n^2 \cdot \frac{\ln(n+1)}{n}\right) \le c(a,b). \tag{4.6}$$

Из $n = O(\delta_N^{-1/5})$ следует $n + 1 = O(\delta_N^{-1/5})$. Кроме того, если $0 \le t \le 1 - 4n^{-2}$ и $-1 \le t_j \le -1/2$, то $\dfrac{1}{|t - t_j|} \le 2$. Отсюда и в силу (4.2), (4.5), (4.6) находим

$$A_1 = \sum_{-1 \le t_j \le -1/2} |\, K_{n,N}(t,t_j) \,|\, \Delta t_j \le |K_{n,N}(t,t_0)|\Delta t_0 + \sum_{-1 < t_j \le -1+4n^{-2}} |\, K_{n,N}(t,t_j) \,|\, \Delta t_j +$$

$$+ \sum_{-1+4n^{-2} < t_j \le -1/2} |\, K_{n,N}(t,t_j) \,|\, \Delta t_j \le c(a,b)\left[|\, \hat{p}_{n+1}(t)\hat{p}_n(t_0) \,| + |\, \hat{p}_n(t)\hat{p}_{n+1}(t_0) \,|\right] \Delta t_0 +$$

$$+ c(a,b) \sum_{-1 < t_j \le -1+4n^{-2}} (|\, \hat{p}_{n+1}(t)\hat{p}_n(t_j) \,| + |\, \hat{p}_n(t)\hat{p}_{n+1}(t_j) \,|) \, \Delta t_j +$$

$$+ c(a,b) \sum_{-1+4n^{-2} < t_j \le -1/2} (|\, \hat{p}_{n+1}(t)\hat{p}_n(t_j) \,| + |\, \hat{p}_n(t)\hat{p}_{n+1}(t_j) \,|) \, \Delta t_j = A_{10} + A_{11} + A_{12}. \tag{4.7}$$

Оценим A_{10}. В силу (0.5), (3.4) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ имеем $(t_0 = -1)$

$$A_{10} \le c(a,b)\left[|p_{n+1}(t)|n^{1/2} + |p_n(t)|(n+1)^{1/2}\right] \Delta t_0 \le$$

$$\leq c(a,b)n^{1/2}[|p_{n+1}(t)|+|p_n(t)|]\delta_N \leq c(a,b)n\delta_N \leq c(a,b)n^{-4}. \tag{4.8}$$

Если $-1 < t_j \leq -1+4n^{-2}$, то $2-4n^{-2} \leq 1-t_j < 2$, $0 < 1+t_j \leq 4n^{-2}$. Тогда в силу (3.4) получаем ($n = O(\delta_N^{-1/5})$):

$$A_{11} \leq c(a,b) \sum_{-1<t_j\leq -1+4n^{-2}} (|\,\hat{p}_{n+1}(t)\,| \left[\sqrt{1+t_j}+\frac{1}{n}\right]^{-1/2} +|\,\hat{p}_n(t)\,| \left[\sqrt{1+t_j}+\frac{1}{n+1}\right]^{-1/2})\Delta t_j \leq$$

$$\leq c(a,b)\left[|\hat{p}_{n+1}(t)|n^{1/2}+|\hat{p}_n(t)|(n+1)^{1/2}\right] \sum_{-1<t_j\leq -1+4n^{-2}} \Delta t_j \leq$$

$$\leq c(a,b)n^{1/2}\left[|\hat{p}_{n+1}(t)|+|\hat{p}_n(t)|\right]n^{-2} \leq c(a,b)n^{-1}. \tag{4.9}$$

Если же $-1+4n^{-2} < t_j \leq -1/2$, то $(3/2) \leq 1-t_j \leq 2-4n^{-2} < 2$ и $4n^{-2} \leq 1+t_j \leq 1/2$. Следовательно,

$$A_{12} \leq c(a,b)\left[|\hat{p}_{n+1}(t)|+|\hat{p}_n(t)|\right] \sum_{-1+4n^{-2}<t_j\leq -1/2} (1+t_j)^{-1/4}\Delta t_j \leq$$

$$\leq c(a,b)\left[|\hat{p}_{n+1}(t)|+|\hat{p}_n(t)|\right] \int\limits_{-1+4n^{-2}}^{-1/2} (1+\tau)^{-1/4}d\tau \leq c(a,b)\min\{(1-t)^{-1/4},\, n^{1/2}\}. \tag{4.10}$$

Сопоставляя (4.7)–(4.10), находим

$$A_1 \leq c(a,b)\min\{(1-t)^{-1/4},\, n^{1/2}\}. \tag{4.11}$$

Теперь оценим A_2. Пользуясь (4.2), (4.5) и асимптотической формулой (3.1), получаем:

$$A_2 \leq c(a,b) \sum_{-1/2\leq t_j\leq y_1} \left|\frac{\hat{p}_{n+1}(t)\hat{p}_n(t_j)-\hat{p}_n(t)\hat{p}_{n+1}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j =$$

$$= c(a,b) \sum_{-1/2\leq t_j\leq y_1} |\{(\widehat{P}_{n+1}(t)+\upsilon_{n+1,N}(t))(\widehat{P}_n(t_j)+\upsilon_{n,N}(t_j))-$$

$$-(\widehat{P}_n(t)+\upsilon_{n,N}(t))(\widehat{P}_{n+1}(t_j)+\upsilon_{n+1,N}(t_j))\}/\{t-t_j\}|\Delta t_j \leq$$

$$\leq c(a,b)\Bigg\{ \sum_{-1/2\leq t_j\leq y_1} \left|\frac{\widehat{P}_{n+1}(t)\widehat{P}_n(t_j)-\widehat{P}_n(t)\widehat{P}_{n+1}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+ \sum_{-1/2\leq t_j\leq y_1} \left|\frac{\widehat{P}_{n+1}(t)\upsilon_{n,N}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j + \sum_{-1/2\leq t_j\leq y_1} \left|\frac{\widehat{P}_n(t_j)\upsilon_{n+1,N}(t)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+ \sum_{-1/2\leq t_j\leq y_1} \left|\frac{\upsilon_{n+1,N}(t)\upsilon_{n,N}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j + \sum_{-1/2\leq t_j\leq y_1} \left|\frac{\widehat{P}_n(t)\upsilon_{n+1,N}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+ \sum_{-1/2\leq t_j\leq y_1} \left|\frac{\widehat{P}_{n+1}(t_j)\upsilon_{n,N}(t)}{t-t_j}\right|\Delta t_j + \sum_{-1/2\leq t_j\leq y_1} \left|\frac{\upsilon_{n,N}(t)\upsilon_{n+1,N}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j \Bigg\} =$$

$$= A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}+A_{25}+A_{26}+A_{27}. \tag{4.12}$$

Займемся A_{21}. Пользуясь тождеством (1.4) при $\alpha=\beta=0$, можем записать

$$P_{n+1}(t)P_n(t_j)-P_n(t)P_{n+1}(t_j) = (1-t_j)P_n^{1,0}(t_j)P_n(t)-(1-t)P_n^{1,0}(t)P_n(t_j).$$

Тогда учитывая, что $\widehat{P}_n(t) = \sqrt{(2n+1)/2}P_n(t)$, в силу (1.3), (1.5) имеем

$$A_{21} \leq c(a,b)\frac{2n+1}{2} \sum_{-\frac{1}{2}\leq t_j\leq y_1} \left|\frac{(1-t_j)P_n^{1,0}(t_j)P_n(t)-(1-t)P_n^{1,0}(t)P_n(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j \leq c(a,b)(1-t)^{-1/4}\times$$

$$\times \sum_{-\frac{1}{2}\le t_j\le y_1} \frac{(1-t_j)^{1/4}}{t-t_j}\Delta t_j + c(a,b)(1-t)^{1/4} \sum_{-\frac{1}{2}\le t_j\le y_1} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t-t_j}\Delta t_j = A_{21}^{(1)} + A_{21}^{(2)}. \tag{4.13}$$

Далее, в силу неравенства $(1-t_j)^{1/4} \le (1-t)^{1/4} + (t-t_j)^{1/4}$ получаем:

$$A_{21}^{(1)} \le c(a,b)\left[\sum_{-\frac{1}{2}\le t_j\le y_1} \frac{\Delta t_j}{t-t_j} + (1-t)^{-1/4} \sum_{-\frac{1}{2}\le t_j\le y_1} \frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{3/4}}\right] \le$$

$$\le c(a,b)\left[\int\limits_{-1/2}^{y_1} \frac{d\tau}{t-\tau} + (1-t)^{-1/4} \int\limits_{-1/2}^{y_1} \frac{d\xi}{(t-\xi)^{3/4}}\right] \le$$

$$\le c(a,b)\left[\left(\ln\frac{n}{\sqrt{1-t^2}} + \ln(3/2)\right) + (1-t)^{-1/4}(t+1/2)^{1/4}\right] \le$$

$$\le c(a,b)\left[\ln(n+1) + n^{1/2}\right] \le c(a,b)n^{1/2}. \tag{4.14}$$

А так как для $-1/2 \le t_j \le t - \sqrt{1-t}/n$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1/4} \le (1-t_j)^{-1/4} \le \left(1-t+\frac{\sqrt{1-t}}{n}\right)^{-1/4},$$

то

$$A_{21}^{(2)} \le c(a,b) \sum_{-\frac{1}{2}\le t_j\le y_1} \frac{\Delta t_j}{t-t_j} \le c(a,b) \int\limits_{-1/2}^{y_1} \frac{d\tau}{t-\tau} \le$$

$$\le c(a,b)\left(\ln\frac{n}{\sqrt{1-t^2}} + \ln\frac{3}{2}\right) \le c(a,b)\ln(n+1). \tag{4.15}$$

Из (4.13)–(4.15) имеем

$$A_{21} \le c(a,b)n^{1/2}. \tag{4.16}$$

Для $-1/2 \le t_j \le t - \sqrt{1-t^2}/n$ имеем $t - t_j \le 1 - t_j$. Отсюда и в силу (1.5) ((1.3) при $\alpha = 0$), (3.2) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ получаем

$$A_{22} \le c(a,b)\delta_N^{1/2} n^{3/2}(1-t)^{-1/4} \sum_{-1/2\le t_j\le y_1} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t-t_j}\Delta t_j \le c(a,b)\delta_N^{1/2} n^2 \sum_{-1/2\le t_j\le y_1} \frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{5/4}} \le$$

$$\le c\delta_N^{1/2} n^2 \int\limits_{-1/2}^{y_1} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/4}} \le c(a,b)\delta_N^{1/2} n^{5/2} \le c(a,b). \tag{4.17}$$

Аналогично доказываются следующие оценки $(n = O(\delta_N^{-1/5}))$:

$$A_{2i} \le c(a,b) \qquad (i = 3,5,6). \tag{4.18}$$

Далее, в силу (3.2) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ находим

$$A_{24} \le c(a,b)\delta_N n^3 (1-t)^{-1/4} \sum_{-1/2\le t_j\le y_1} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t-t_j}\Delta t_j \le c(a,b)\delta_N n^{7/2} \sum_{-1/2\le t_j\le y_1} \frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{5/4}} \le$$

$$\le c(a,b)\delta_N n^{7/2} \int\limits_{-1/2}^{y_1} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/4}} \le c(a,b)\delta_N n^4 \le c(a,b)n^{-1}. \tag{4.19}$$

Такую же оценку допускает и A_{27}. Отсюда и из (4.12), (4.16)–(4.19) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ получаем

$$A_2 \le c(a,b)n^{1/2}. \tag{4.20}$$

Теперь оценим A_3. В силу (3.4), (4.2) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ имеем

$$A_3 = \sum_{y_1 \le t_j \le y_2} |K_{n,N}(t,t_j)|\Delta t_j \le \sum_{k=0}^{n} |\hat{p}_k(t)| \sum_{y_1 \le t_j \le y_2} |\hat{p}_k(t_j)|\Delta t_j \le$$

$$\le c(a,b) \sum_{k=0}^{n} |\ \hat{p}_k(t)\ | \sum_{y_1 \le t_j \le y_2} (1-t_j)^{-1/4}\Delta t_j \le c(a,b) \sum_{k=0}^{n} |\ \hat{p}_k(t)\ | \ \frac{y_2 - y_1}{(1-y_2)^{1/4}} =$$

$$= c(a,b) \sum_{k=0}^{n} |\hat{p}_k(t)| \frac{\frac{\sqrt{1-t^2}}{n}}{\left(1 - t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}\right)^{1/4}} < c(a,b)(1-t)^{-1/4} n \frac{(1-t)^{1/2}}{n(1-t)^{1/4}\left(1 - \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)} \le c(a,b). \quad (4.21)$$

Перейдем к оценке A_4. В силу (3.1), (4.2), (4.5) и (4.6) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ мы находим

$$A_4 = c(a,b) \sum_{y_2 \le t_j \le 1} \left| \frac{\hat{p}_{n+1}(t)\hat{p}_n(t_j) - \hat{p}_n(t)\hat{p}_{n+1}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j \le$$

$$\le c(a,b)\{ \sum_{y_2 \le t_j \le 1} \left| \frac{\widehat{P}_{n+1}(t)\widehat{P}_n(t_j) - \widehat{P}_n(t)\widehat{P}_{n+1}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j +$$

$$+ \sum_{y_2 \le t_j \le 1} \left| \frac{\widehat{P}_{n+1}(t)\upsilon_{n,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{y_2 \le t_j \le 1} \left| \frac{\widehat{P}_n(t_j)\upsilon_{n+1,N}(t)}{t - t_j} \right| \Delta t_j +$$

$$+ \sum_{y_2 \le t_j \le 1} \left| \frac{\upsilon_{n+1,N}(t)\upsilon_{n,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{y_2 \le t_j \le 1} \left| \frac{\widehat{P}_n(t)\upsilon_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j +$$

$$+ \sum_{y_2 \le t_j \le 1} \left| \frac{\widehat{P}_{n+1}(t_j)\upsilon_{n,N}(t)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{y_2 \le t_j \le 1} \left| \frac{\upsilon_{n,N}(t)\upsilon_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j\} =$$

$$= A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} + A_{45} + A_{46} + A_{47}. \quad (4.22)$$

Рассмотрим A_{42}. В силу (1.5), (3.2) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ имеем

$$A_{42} \le c(a,b)\delta_N^{1/2} n^{3/2} (1-t)^{-1/4} \sum_{y_2 \le t_j \le \frac{1+t}{2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j - t} \Delta t_j +$$

$$+ c(a,b)\delta_N^{1/2} n^{3/2} (1-t)^{-1/4} \sum_{\frac{1+t}{2} \le t_j \le 1 - n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j - t} \Delta t_j +$$

$$+ c(a,b)\delta_N^{1/2} n^{3/2} (1-t)^{-1/4} \sum_{1 - n^{-2} \le t_j \le 1} \frac{n^{1/2}}{t_j - t} \Delta t_j = A_{42}^{(1)} + A_{42}^{(2)} + A_{42}^{(3)}. \quad (4.23)$$

Если $y_2 \le t_j \le (1+t)/2$, то $1 - t_j \ge t_j - t$. Тогда для $A_{42}^{(1)}$ при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ получаем

$$A_{42}^{(1)} \le c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}} n^2 \sum_{y_2 \le t_j \le \frac{1+t}{2}} \frac{\Delta t_j}{(t_j - t)^{\frac{5}{4}}} = c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}} n^2 \sum_{y_2 \le t_j \le \frac{1+t}{2}} \frac{\Delta t_j}{(t_{j+1} - t)^{\frac{5}{4}}} \frac{(t_{j+1} - t)^{\frac{5}{4}}}{(t_j - t)^{\frac{5}{4}}} <$$

$$< c(a,b)\delta_N^{1/2} n^2 \sum_{y_2 \le t_j \le \frac{1+t}{2}} \frac{\Delta t_j}{(t_{j+1} - t)^{\frac{5}{4}}} \left(\frac{\delta_N}{t_j - t} + 1 \right)^{\frac{5}{4}} \le c(a,b)\delta_N^{1/2} n^2 \int_{y_2}^{\frac{1+t}{2}} \frac{d\tau}{(\tau - t)^{5/4}} \le$$

$$\le c(a,b)\delta_N^{1/2} n^2 n^{1/2} \le c(a,b). \quad (4.24)$$

Если же $(1+t)/2 \le t_j \le 1-n^{-2}$, то $1-t_j \le t_j - t$. Тогда для $A_{42}^{(2)}$ имеем

$$A_{42}^{(2)} \le c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}} n^2 \sum_{\frac{1+t}{2} \le t_j \le 1-n^{-2}} \frac{\Delta t_j}{(1-t_j)^{5/4}} \le c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}} n^2 \int\limits_{\frac{1+t}{2}}^{1-n^{-2}} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{5/4}} \le$$

$$\le c(a,b)\delta_N^{1/2} n^2 \left[n^{1/2} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-1/4} \right] \le c(a,b). \quad (4.25)$$

Далее, для $A_{42}^{(3)}$ имеет место оценка

$$A_{42}^{(3)} \le c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}} n^{\frac{5}{2}} \sum_{1-n^{-2} \le t_j \le 1} \frac{1}{t_j - t}\Delta t_j \le c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}} n^{\frac{9}{2}} \sum_{1-n^{-2} \le t_j \le 1} \Delta t_j \le c(a,b)\delta_N^{1/2} n^{5/2} \le c(a,b).$$

Отсюда и из (4.23)–(4.25) выводим

$$A_{42} \le c(a,b). \quad (4.26)$$

Аналогично доказываются следующие оценки:

$$A_{4i} \le c(a,b) \qquad (i = 3,5,6). \quad (4.27)$$

Перейдем к рассмотрению сумм A_{44} и A_{47}, остановившись для определенности на A_{44}. В силу (3.2) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ имеем

$$A_{44} \le c(a,b)\delta_N n^3 (1-t)^{-1/4} \sum_{y_2 \le t_j \le \frac{1+t}{2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j - t}\Delta t_j +$$

$$+ c(a,b)\delta_N n^3 (1-t)^{-1/4} \sum_{\frac{1+t}{2} \le t_j \le 1-n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j - t}\Delta t_j +$$

$$+ c(a,b)\delta_N n^3 (1-t)^{-1/4} \sum_{1-n^{-2} \le t_j \le 1} \frac{n^{1/2}}{t_j - t}\Delta t_j = A_{44}^{(1)} + A_{44}^{(2)} + A_{44}^{(3)}. \quad (4.28)$$

Для $y_2 \le t_j \le (1+t)/2$ имеем $1-t_j \ge t_j - t$. Следовательно, по аналогии с (4.24) получаем:

$$A_{44}^{(1)} \le c(a,b)\delta_N n^{\frac{7}{2}} \sum_{y_2 \le t_j \le \frac{1+t}{2}} \frac{\Delta t_j}{(t_j - t)^{5/4}} \le c(a,b)\delta_N n^{7/2} \int\limits_{y_2}^{\frac{1+t}{2}} \frac{d\tau}{(\tau - t)^{5/4}} \le$$

$$\le c(a,b)\delta_N n^{\frac{7}{2}} n^{1/2} \le c(a,b) n^{-1}. \quad (4.29)$$

Поскольку $1-t_j \le t_j - t$ для $(1+t)/2 \le t_j \le 1-n^{-2}$, то

$$A_{44}^{(2)} \le c(a,b)\delta_N n^{\frac{7}{2}} \sum_{\frac{1+t}{2} \le t_j \le 1-n^{-2}} \frac{\Delta t_j}{(1-t_j)^{5/4}} \le$$

$$\le c(a,b)\delta_N n^{\frac{7}{2}} \int\limits_{\frac{1+t}{2}}^{1-n^{-2}} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{5/4}} \le c(a,b)\delta_N n^4 \le c(a,b) n^{-1}. \quad (4.30)$$

Далее, для $A_{44}^{(3)}$ имеет место оценка

$$A_{44}^{(3)} \le c(a,b)\delta_N n^4 \sum_{1-n^{-2} \le t_j \le 1} \frac{1}{t_j - t}\Delta t_j \le c(a,b)\delta_N n^6 \sum_{1-n^{-2} \le t_j \le 1} \Delta t_j \le$$

$$\le c(a,b)\delta_N n^4 \le c(a,b) n^{-1}. \quad (4.31)$$

Сопоставляя (4.28)–(4.31), получаем:

$$A_{44} \le c(a,b)n^{-1}. \tag{4.32}$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$A_{47} \le c(a,b)n^{-1}. \tag{4.33}$$

Оценим A_{41}. Аналогично тому как была установлена оценка (4.17), находим

$$A_{41} \le c(a,b)\frac{2n+1}{2}\sum_{y_2\le t_j\le 1}\left|\frac{(1-t_j)P_n^{1,0}(t_j)P_n(t)-(1-t)P_n^{1,0}(t)P_n(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j \le$$

$$\le c(a,b)(1-t)^{-\frac{1}{4}}\left[\sum_{y_2\le t_j\le 1-n^{-2}}\frac{(1-t_j)^{1/4}}{t_j-t}\Delta t_j+n^{-1/2}\sum_{1-n^{-2}\le t_j\le 1}\frac{\Delta t_j}{t_j-t}\right]+$$

$$+c(a,b)(1-t)^{1/4}\left[\sum_{y_2\le t_j\le 1-n^{-2}}\frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t}\Delta t_j+n^{1/2}\sum_{1-n^{-2}\le t_j\le 1}\frac{\Delta t_j}{t_j-t}\right]\le$$

$$\le c(a,b)\{(1-t)^{-1/4}\sum_{y_2\le t_j\le 1-n^{-2}}\frac{(1-t_j)^{1/4}}{t_j-t}\Delta t_j+(1-t)^{1/4}\sum_{y_2\le t_j\le 1-n^{-2}}\frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t}\Delta t_j+$$

$$+\sum_{1-n^{-2}\le t_j\le 1}\frac{\Delta t_j}{t_j-t}+n^{1/2}\sum_{1-n^{-2}\le t_j\le 1}\frac{\Delta t_j}{t_j-t}\}=A_{41}^{(1)}+A_{41}^{(2)}+A_{41}^{(3)}+A_{41}^{(4)},$$

где

$$A_{41}^{(4)}\le c(a,b)n^{5/2}\sum_{1-n^{-2}\le t_j\le 1}\Delta t_j\le c(a,b)n^{1/2},\qquad A_{41}^{(3)}\le c(a,b)\int_{1-n^{-2}}^{1}\frac{d\tau}{\tau-t}\le c(a,b)\ln(n+1),$$

$$A_{41}^{(2)}\le c(a,b)\sum_{y_2\le t_j\le 1-n^{-2}}\frac{(1-t_j)^{-\frac{1}{4}}}{t_j-t}\Delta t_j=c(a,b)\sum_{y_2\le t_j\le \frac{1+t}{2}}\frac{(1-t_j)^{-\frac{1}{4}}}{t_j-t}\Delta t_j+$$

$$+c(a,b)\sum_{\frac{1+t}{2}\le t_j\le 1-n^{-2}}\frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t}\Delta t_j\le c(a,b)\left[\sum_{y_2\le t_j\le\frac{1+t}{2}}\frac{\Delta t_j}{(t_j-t)^{5/4}}+\sum_{\frac{1+t}{2}\le t_j\le 1-n^{-2}}\frac{\Delta t_j}{(1-t_j)^{5/4}}\right]\le$$

$$\le c(a,b)\left[\int_{y_2}^{\frac{1+t}{2}}\frac{d\tau}{(\tau-t)^{5/4}}+\int_{\frac{1+t}{2}}^{1-n^{-2}}\frac{d\zeta}{(1-\zeta)^{5/4}}\right]\le c(a,b)n^{1/2}.$$

Далее, в силу неравенства $(1-t_j)^{1/4}\le(1-t)^{1/4}+(t_j-t)^{1/4}$ получаем:

$$A_{41}^{(1)}\le c(a,b)\left[\sum_{y_2\le t_j\le 1-n^{-2}}\frac{\Delta t_j}{t_j-t}+(1-t)^{-1/4}\sum_{y_2\le t_j\le 1-n^{-2}}\frac{\Delta t_j}{(t_j-t)^{3/4}}\right]\le$$

$$\le c(a,b)\left[\int_{y_2}^{1-n^{-2}}\frac{d\tau}{\tau-t}+(1-t)^{-1/4}\int_{y_2}^{1-n^{-2}}\frac{d\xi}{(\xi-t)^{3/4}}\right]\le c(a,b)\left[\ln(n+1)+n^{1/2}\right]\le c(a,b)n^{1/2}.$$

Следовательно, $A_{41}\le c(a,b)n^{1/2}$. Отсюда сопоставляя (4.22), (4.26), (4.27), (4.32), (4.33), мы выводим ($n=O(\delta_N^{-1/5})$)

$$A_4\le c(a,b)n^{1/2}. \tag{4.34}$$

Собираем оценки (4.11), (4.20), (4.21), (4.34) и, сопоставляя их с равенством (4.4), находим

$$L_{n,N}(t)\le c(a,b)n^{1/2}, \tag{4.35}$$

где $0\le t\le 1-4n^{-2}$, $n=O(\delta_N^{-1/5})$.

Перейдем к случаю, когда $1-4n^{-2}\le t\le 1$. Чтобы оценить $L_{n,N}(t)$ при $1-4n^{-2}\le t\le 1$, разобьем сумму в правой части равенства (4.1) по следующей схеме:

$$L_{n,N}(t)=\sum_{-1\le t_j\le -1/2}|K_{n,N}(t,t_j)|\Delta t_j+\sum_{-1/2\le t_j\le 1-n^{-2}}|K_{n,N}(t,t_j)|\Delta t_j+$$

$$+\sum_{1-n^{-2}\le t_j\le 1}|\,K_{n,N}(t,t_j)\,|\,\Delta t_j=B_1+B_2+B_3. \tag{4.36}$$

При $1-4n^{-2}\le t\le 1$ имеем $1-t\le 4n^{-2}$. Следовательно, из (1.5) вытекает оценка $|\widehat{P}_n(t)|\le cn^{1/2}$. Учитывая это неравенство, суммы B_1 и B_2 оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано для A_1, A_2 и A_3. Это дает при $n=O(\delta_N^{-1/5})$

$$B_1\le c(a,b)n^{1/2},\qquad B_2\le c(a,b)n^{1/2}. \tag{4.37}$$

Что касается B_3, то воспользовавшись оценкой (3.4), имеем

$$B_3=\sum_{1-n^{-2}\le t_j\le 1}\left|\sum_{k=0}^{n}\hat p_k(t)\hat p_k(t_j)\right|\Delta t_j\le c(a,b)\sum_{1-n^{-2}\le t_j\le 1}\left|\sum_{k=0}^{n}k\right|\Delta t_j\le$$

$$\le c(a,b)n^2\sum_{1-n^{-2}\le t_j\le 1}\Delta t_j\le c(a,b). \tag{4.38}$$

Из (4.36)–(4.38) получаем ($n=O(\delta_N^{-1/5})$):

$$L_{n,N}(t)\le c(a,b)n^{1/2},\qquad (1-4n^{-2}\le t\le 1). \tag{4.39}$$

Сопоставляя (4.35) и (4.39), убеждаемся в справедливости теоремы в случае, когда $0\le t\le 1$. Далее, посредством аналогичных рассуждений, такую же оценку можно получить и для случая, когда $-1\le t\le 0$. Теорема 4.1 доказана полностью.

Из (4.3) и теоремы 4.1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть* $f\in C[-1,1], 0<b<1, 0<a\le\left\{\frac{1-b}{4\varkappa_1}\right\}^{1/2}, n=O(\delta_N^{-1/5})$. *Тогда равномерно относительно* $-1\le t\le 1$ *справедлива оценка*

$$|\,f(t)-S_{n,N}(f,t)\,|\le c(a,b)E_n(f)n^{1/2}.$$

Из теоремы 4.2 и теоремы Джексона вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть* $f\in Lip_\gamma M, \frac{1}{2}<\gamma\le 1, 0<b<1, 0<a\le\left\{\frac{1-b}{4\varkappa_1}\right\}^{1/2}, n=O(\delta_N^{-1/5})$. *Тогда справедлива оценка* $\|\,f-S_{n,N}(f)\,\|\le c(a,b,\gamma,M)(n+1)^{1/2-\gamma}$.

Выражаю глубокую признательность профессору И.И. Шарапудинову за постановку задачи и помощь в ее реализации.

Библиографический список

1. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функция Лебега сумм Фурье – Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та. 1968. Вып. 1. С. 11–13.

2. *Бадков В. М.* Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье – Якоби // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, вып. 6. С. 1263–1283.

3. *Шарапудинов И. И.* О сходимости метода наименьших квадратов // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 3. С. 131–143.

4. *Даугавет И. К., Рафальсон С. З.* О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестн. Ленинград. ун-та. 1974. № 19. С. 18–24.

5. *Конягин С. В.* О неравенстве В. А. Маркова для многочленов в метрике L // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1980. № 145. С. 117–125.

6. *Нурмагомедов А. А.* Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2008. Т. 8. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 28–31.

7. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.