УДК 531.381, 531.395

# ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПРИВОДИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**В.Ю. Ольшанский**

Институт проблем точной механики и управления
Российской академии наук
E-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru

Рассматривается механическая система, состоящая из неизменяемого твердого тела (носителя) и подсистемы, конфигурация и состав которой могут изменяться со временем (движение ее элементов относительно носителя задано). Система движется в однородном поле силы тяжести вокруг неподвижной точки носителя. Получены условия существования интеграла, являющегося обобщением интеграла проекции кинетического момента на случай системы переменной массы. Выполнено приведение системы к автономному виду. Выделен случай существования алгебраического интеграла типа Ковалевской.

**Ключевые слова:** изменение состава и конфигурации, интегралы движения, случай Ковалевской.

**On One Case of Reducibility of the Equations of Motion of a Complex Mechanical System**

**V.Yu. Olshanskiy**

Institute of Precision Mechanics and Control,
Russian Academy of Sciences
E-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru

A mechanical system, consisting of a non-variable rigid body (a carrier) and a subsystem, the configuration and composition of which may vary with time (the motion of its elements with respect to the carrier is specified), is considered. The system moves in a uniform gravitational field around a fixed point of the carrier. Obtained are conditions for the existence of the integral, which is a generalization of the kinetic moment projection integral in the case of variable mass. The system is reduced to an autonomous type. Case of an algebraic integral of the Kovalevskaya type existence is distinguish.

**Key words:** change the composition and configuration, integral of motion, Kovalevskaya case.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания движения носителя используем следующую форму уравнений [1–3]:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}\times\mathbf{x} + \Lambda\mathbf{x} + \mathbf{s}\times\mathbf{a} + \mathbf{N}, \qquad \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}\times\mathbf{x}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{y} = J\mathbf{x}+\mathbf{K}$, $J$ — оператор инерции системы в точке $O$, $\mathbf{K}$ — кинетический момент в движении относительно главной системы отсчета (СО) в неподвижной точке $O$, $\mathbf{K} = \sum m_n\mathbf{r}_n\times\dot{\mathbf{r}}_n$, $(\dot{\ })$ — производная по времени в главной СО, $\mathbf{x}$ — угловая скорость главной СО, симметрический оператор $\Lambda$ задан тождеством [3] $\Lambda\mathbf{z} \equiv \dot{J}\mathbf{z} - \sum m_n[\dot{\mathbf{r}}_n\times(\mathbf{z}\times\mathbf{r}_n) + \mathbf{r}_n\times(\mathbf{z}\times\dot{\mathbf{r}}_n)]$, $\mathbf{s}$ — орт вертикали, $\mathbf{a} = P\mathbf{r}_c$, $P$ — вес тела, $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс, $\mathbf{N} = \mathbf{M}_f + \dot{\mathbf{K}} + \mathbf{M}_r + \mathbf{M}^*$, $\mathbf{M}_f$ — главный момент сил инерции в движении относительно главной СО, $\mathbf{M}_f = -\sum m_n\mathbf{r}_n\times\ddot{\mathbf{r}}_n$, $\mathbf{M}_r$ — главный момент реактивных сил, $\mathbf{M}^*$ — управляющий момент.

Решается задача получения условий существования и нахождения явного вида квадратичного интеграла

$$(\mathbf{y}, F\mathbf{y}) + (\mathbf{y}, G\mathbf{s}) + (\mathbf{s}, Q\mathbf{s}) + (\mathbf{m}, \mathbf{y}) + (\mathbf{n}, \mathbf{s}) + \varphi(t) = \mathrm{const}. \tag{1.2}$$

Ниже показано, что оператор $F$ имеет вид $F = \psi_1 E + \psi_2 J^{-1}$. Квадратичный интеграл вида (1.2) при $\psi_1 = 0$ и условия его существования найдены в работе [1]. Необходимые и достаточные условия существования одного и двух квадратичных интегралов свободного движения ($\mathbf{a} = 0$, $\psi_1 = 0$) получены в работах [2, 3].

Для существования интеграла (1.2) при $\psi_2 \neq 0$ необходимо, чтобы функции $\alpha_i$ были пропорциональны, $\alpha_i = \alpha_{0i}\alpha(t)$, где $\alpha_i = A_i(A_j - A_k)$, $A_i$ — главные моменты инерции. В настоящей работе рассматривается случай $\psi_2 = 0$, когда интеграл вида (1.2) может существовать без данного ограничения на закон изменения главных моментов инерции. Выделен случай, когда система является автономной и обладает обобщенным интегралом энергии, а также случай, когда существует интеграл типа Ковалевской.

## 2. НАХОЖДЕНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛА

Если интеграл (1.2) продифференцировать в силу системы (1.1), то получим тождество

$$(2F\mathbf{y} + G\mathbf{s} + \mathbf{m}, \mathbf{y}\times J^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{k}\times\mathbf{y} + \Lambda J^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{s}\times\mathbf{a} + \mathbf{L}) + (\mathbf{y}, \dot{F}\mathbf{y} + \dot{G}\mathbf{s} + \dot{\mathbf{m}}) +$$

$$+(\mathbf{s}, \dot{Q}\mathbf{s} + \dot{\mathbf{n}}) + \langle G^T\mathbf{y} + 2Q\mathbf{s} + \mathbf{n}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{k}\rangle + \dot{\varphi} \equiv 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{k} = J^{-1}\mathbf{K}$, $\mathbf{L} = \mathbf{N} - \Lambda\mathbf{k}$.

Выделяя члены с $y^3$, получим тождество $\langle F\mathbf{y}, \mathbf{y}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0$, откуда следует представимость оператора $F$ в виде

$$F = \psi_1 E + \psi_2 J^{-1}. \tag{2.2}$$

Выделяя из тождества (2.1) члены с $y^2 s$, получим тождество $\langle G\mathbf{s}, \mathbf{y}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle + \langle G^T\mathbf{y}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0$, которое выполнено, только если $G = pE$.

Выделяя в тождестве (2.1) члены с $s^2 y$, получим тождество $\langle Q\mathbf{s}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0$, откуда следует $Q = qE$. Слагаемое $(\mathbf{s}, Q\mathbf{s})$ в интеграле (1.2) включим в $\varphi(t)$, поскольку $s^2 = 1$.

Интеграл (1.2) теперь можно записать в виде

$$\psi_1 y^2 + \psi_2(\mathbf{y}, J^{-1}\mathbf{y}) + p(\mathbf{s}, \mathbf{y}) + (\mathbf{m}, \mathbf{y}) + (\mathbf{n}, \mathbf{s}) + \varphi(t) = \mathrm{const}. \tag{2.3}$$

Выделяя в тождестве (2.1) члены с $sy$, получим

$$2\langle \psi_1\mathbf{y} + \psi_2 J^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{a}\rangle + p(\mathbf{s}, \Lambda J^{-1}\mathbf{y}) + \dot{p}(\mathbf{y}, \mathbf{s}) + \langle \mathbf{n}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0. \tag{2.4}$$

Если положить здесь $\mathbf{s} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = A_i\mathbf{e}_i$($\mathbf{e}_i$, $A_i$ — собственные векторы и собственные значения оператора $J$), то получим условия

$$\dot{p} + A_i^{-1}\lambda_{ii} p = 0, \qquad i = 1,\, 2,\, 3. \tag{2.5}$$

Если в тождестве (2.4) положить сначала $\mathbf{s} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = A_j\mathbf{e}_j$, затем $\mathbf{s} = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{y} = A_i\mathbf{e}_i$ и сложить полученные равенства, то придем к условиям

$$p\lambda_{ij} = -\psi_1 \Delta A_k \mathbf{a}_k, \qquad \Delta A_i = (A_j - A_k)\delta_{ijk}. \tag{2.6}$$

В случае, когда центр масс не совпадает с неподвижной точкой и динамическая симметрия отсутствует, из условий (2.6) следует, что если $p \equiv 0$, то и $\psi_1 \equiv 0$. Далее будем рассматривать случай $p \neq 0$, $\psi_1 \neq 0$. Тогда из условий (2.5) следует

$$\lambda_{ii} A_i^{-1} = \lambda, \qquad i = 1,\, 2,\, 3, \qquad \lambda = -\dot{p}/p, \tag{2.7}$$

где $\lambda_{ij} = (\mathbf{e}_i, \Lambda\mathbf{e}_j)$. Обозначим

$$\beta = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\xi)\, d\xi\right). \tag{2.8}$$

Учитывая условие (2.5), параметр $p(t)$ запишем в виде

$$p = p_0\beta, \qquad p_0 = \mathrm{const}. \tag{2.9}$$

Тождество (2.4) при выполнении условий (2.5), (2.6), (2.9) запишется в виде

$$\psi_1(\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{a}\rangle + \langle J^{-1}\mathbf{y}, J\mathbf{s}, \mathbf{a}\rangle) + 2\psi_2\langle J^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{a}\rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0.$$

Данное тождество эквивалентно следующему тождеству:

$$\psi_1(\mathbf{a} \times \mathbf{y} + J(\mathbf{a} \times J^{-1}\mathbf{y})) + 2\psi_2 \mathbf{a} \times J^{-1}\mathbf{y} + J^{-1}\mathbf{y} \times \mathbf{n} \equiv 0,$$

которое выполнено, только если параметр $\mathbf{n}$ имеет вид

$$\mathbf{n} = \psi_1\mathbf{r} + 2\psi_2\mathbf{a}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{a}\,\mathrm{tr}\,J - J\mathbf{a}. \tag{2.10}$$

При $p \neq 0$ из условий (2.6) следует, что параметры $\lambda_{ij}$ должны быть пропорциональны $\Delta A_k a_k$. Обозначим

$$\psi_1 = p\eta \tag{2.11}$$

и запишем условие (2.6) в виде

$$\lambda_{ij} = -\eta \Delta A_k a_k, \qquad (i, j, k). \tag{2.12}$$

Выделяя в (2.1) члены с $\mathbf{y}^2$, придем к тождеству

$$(\mathbf{y}, 2\lambda F\mathbf{y} + \dot{F}\mathbf{y} - 2\psi_1 \eta J^{-1}(\mathbf{a} \times J\mathbf{y}) - (2\psi_2 \mathbf{r} - 4\psi_2 \eta \mathbf{a} + \mathbf{m}) \times J^{-1}\mathbf{y}) \equiv 0. \tag{2.13}$$

Полагая здесь $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, получим $\dot{F} + 2\lambda F = 0$, или, учитывая определение (2.8) параметра $\beta$, $\beta\dot{F} - 2\dot{\beta}F = 0$, откуда следует $F = \beta^2 C$, $C = \mathrm{diag}\,(c_i) = \mathrm{const}$. Учитывая представление (2.2) оператора $F$, получим

$$\psi_1 + \psi_2 A_i^{-1} = c_i \beta^2, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2.14}$$

Умножая эти равенства на $\alpha_i$ и складывая, придем к условию

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0. \tag{2.15}$$

Если $\psi_2 \neq 0$, $\Delta A_i \neq 0$, то из условий (2.14) следует, что постоянные $c_i$ попарно различны. Учитывая тождество $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, из условия (2.15) получим, что $\alpha_i$ пропорциональны, $\alpha_i = \alpha_{0i}\alpha(t)$. Далее рассмотрим случай, когда функции $A_i(t)$ не связаны этим дополнительным ограничением. Это возможно, если $\psi_2 = 0$. При этом из условий (2.9), (2.11), (2.14) следует $\psi_1 = \beta^2\mathrm{const}$ и

$$\eta = \eta_0 \beta. \tag{2.16}$$

Параметр $\mathbf{n}$ в силу формул (2.9)–(2.11) равен $\mathbf{n} = p_0\beta\eta\mathbf{r}$. Тождество (2.13) принимает вид $(\mathbf{y}, 2\psi_1\eta J^{-1}(\mathbf{a} \times J\mathbf{y}) - \mathbf{m} \times J^{-1}\mathbf{y}) \equiv 0$. Используя равенство $\langle J^{-1}\mathbf{y}, J\mathbf{y}, \mathbf{a}\rangle = \langle J^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{r}\rangle$, запишем последнее тождество в виде $\langle \mathbf{y}, J^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{m} - 2\psi_1\eta\mathbf{r}\rangle \equiv 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{m} = 2\psi_1\eta\mathbf{r} = 2\eta\mathbf{n}$.

Запишем оператор $\Lambda$ в виде

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \qquad \Lambda_1 = \lambda J. \tag{2.17}$$

Из условия (2.7) следует, что диагональные элементы матрицы оператора (в главном базисе) $\Lambda_2$ равны нулю. В соответствии с условием (2.12) внедиагональные элементы $\Lambda_2$совпадают с соответствующими элементами оператора, заданного тождеством

$$\Lambda_2\mathbf{z} \equiv \eta[(J\mathbf{z}) \times \mathbf{a} + J(\mathbf{a} \times \mathbf{z})]. \tag{2.18}$$

Интеграл (2.3) можно теперь записать в виде

$$p(\eta y^2 + (\mathbf{y}, \mathbf{s}) + 2\eta^2(\mathbf{y}, \mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r}, \mathbf{s})) + \varphi(t) = \mathrm{const}. \tag{2.19}$$

При выполнении полученных выше необходимых условий в тождестве (2.1) остаются только слагаемые с первыми степенями по $\mathbf{y}$, $\mathbf{s}$ и свободный член, их обращение в ноль приводит к условиям:

$$\beta^2(\mathbf{L} + \eta_0\mathbf{r} \times \mathbf{k}) + \eta_0((\beta^3\mathbf{r})^{\cdot} + \lambda\beta^3\mathbf{r}) + \eta_0\beta^4(\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \eta_0 J^{-1}(J\mathbf{r} \times \mathbf{a})) = 0, \tag{2.20}$$

$$\beta\mathbf{L} + 2\eta_0\beta^3\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \eta_0\beta^2\mathbf{r} \times \mathbf{k} + \eta_0(\beta^2\mathbf{r})^{\cdot} = 0, \tag{2.21}$$

$$2p_0\eta_0^2\beta^3(\mathbf{r}, \mathbf{L}) + \dot{\varphi} = 0. \tag{2.22}$$

Учитывая, что $\dot{\beta} = -\lambda\beta$, условие (2.20) запишем в виде

$$\beta\mathbf{L} + \eta_0\beta^2\mathbf{r} \times \mathbf{k} + \eta_0(\beta^2\mathbf{r})^{\cdot} + \eta_0\beta^3\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \eta_0\beta^3 J^{-1}((J\mathbf{r}) \times \mathbf{a}) = 0. \tag{2.23}$$

Покажем, что условия (2.21), (2.23) совпадают. Вычитая эти равенства, получим $J^{-1}((J\mathbf{r}) \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times \mathbf{r} = 0$. Учитывая выражение (2.10) для $\mathbf{r}$, проверяем, что последнее равенство является верным. Таким образом, остаются условия (2.21), (2.22).

Получим теперь выражение для $\varphi(t)$. Исключим $\mathbf{L}$ из равенств (2.21), (2.22), тогда $-2p_0\eta_0^3\beta^2(\mathbf{r}, (\beta^2\mathbf{r})^{\cdot}) + \dot{\varphi} = 0$ и отсюда $\varphi = p\eta^3 r^2 + \mathrm{const}$. Интеграл (2.19) можно теперь записать в виде

$$\eta(\mathbf{y} + \eta\mathbf{r})(\mathbf{s} + \eta(\mathbf{y} + \eta\mathbf{r})) = \mathrm{const}. \tag{2.24}$$

Необходимое условие (2.21) при учете равенства $\mathbf{L} = \mathbf{N} - \Lambda\mathbf{k}$ записывается в виде

$$\eta\mathbf{N} + \dot{\eta}\mathbf{K} + 2\eta^2\mathbf{a} \times \mathbf{K} + 2\eta^3(J\mathbf{a}) \times \mathbf{a} + (\eta^2\mathbf{r})^{\cdot} = 0.$$

Если обозначить $\mathbf{M} = \mathbf{M}_f + \mathbf{M}_r + \mathbf{M}^*$, то данное условие приводится к виду $\eta\mathbf{M} + 2\eta^2\mathbf{a} \times (\mathbf{K} - \eta J\mathbf{a}) + (\eta\mathbf{K} + \eta^2\mathbf{r})^{\cdot} = 0$, или

$$\eta\mathbf{M} + \dot{\mathbf{d}} + 2\eta\mathbf{a} \times \mathbf{d} = 0, \mathbf{d} = \eta\mathbf{K} + \eta^2\mathbf{r}. \tag{2.25}$$

## 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРИ СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕГРАЛА

Будем далее считать, что полученные выше необходимые условия существования интеграла (2.16), (2.17), (2.18), (2.25) выполнены.

Введем переменную $\mathbf{u} = \eta\mathbf{y} + \eta^2\mathbf{r}$. Интеграл (2.24) запишется в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{u} + \mathbf{s}) = \mathrm{const}. \tag{3.1}$$

Покажем, что система (1.1) приводится к виду

$$\dot{\mathbf{u}} = \eta^{-1}\mathbf{u} \times J^{-1}\mathbf{u} + \eta\mathbf{u} \times (3\mathbf{a} - (\mathrm{tr}\, J)J^{-1}\mathbf{a}) + \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \eta\mathbf{s} \times \mathbf{a}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \eta^{-1}\mathbf{s} \times J^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{s} \times (\eta J^{-1}\mathbf{r} + \mathbf{k}). \tag{3.2}$$

Первое уравнение системы (1.1) записывается в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y} \times J^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{k} \times \mathbf{y} + \lambda\mathbf{y} + \eta(\mathbf{y} \times \mathbf{a} + J(\mathbf{a} \times J^{-1}\mathbf{y})) + \mathbf{s} \times \mathbf{a} - 2\eta_0^2\beta^2\mathbf{a} \times \mathbf{r} - \eta_0\beta\mathbf{r} \times \mathbf{k} - \eta_0\beta^{-1}(\beta^2\mathbf{r})^{\cdot}.$$

Здесь $\lambda = -\dot{\beta}/\beta$, а в силу условия (2.16) $\eta = \eta_0\beta$. Если учесть определение (2.10) параметра $\mathbf{r}$ и тождество $J(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (J\mathbf{b}) \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times J\mathbf{a} + (\mathrm{tr}\, J)\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, то уравнение записывается в виде

$$(\eta\mathbf{y} + \eta^2\mathbf{r})^{\cdot}/\eta = (\mathbf{y} + \eta\mathbf{r}) \times J^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{k} \times (\mathbf{y} + \eta\mathbf{r}) + 2\eta(\mathbf{y} + \eta\mathbf{r}) \times \mathbf{a} + \mathbf{s} \times \mathbf{a}.$$

При переходе к переменной $\mathbf{u}$ получаем первое уравнение системы (3.2). Аналогично получаем второе уравнение этой системы.

Если перейти к переменным $d\tau = dt/\eta$, $\mathbf{a}_1 = \eta^2\mathbf{a}$, $\mathbf{k}_1 = \eta\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_1 = \eta^2\mathbf{r}$, то система (3.2) запишется в виде

$$d\mathbf{u}/d\tau = \mathbf{u} \times J^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (3\mathbf{a}_1 - (\mathrm{tr}\, J)J^{-1}\mathbf{a}_1) + \mathbf{k}_1 \times \mathbf{u} + \mathbf{s} \times \mathbf{a}_1, \qquad d\mathbf{s}/d\tau = \mathbf{s} \times J^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{s} \times (J^{-1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_1).$$

Данная система преобразуется к симметричному виду:

$$d\mathbf{u}/d\tau = \mathbf{u} \times (J^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{b}) + \mathbf{v} \times \mathbf{a}_1, \qquad d\mathbf{v}/d\tau = \mathbf{v} \times (J^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{b}) + \mathbf{u} \times \mathbf{a}_1, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{s}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}_1 - (\mathrm{tr}\, J)J^{-1}\mathbf{a}_1 - \mathbf{k}_1$.

Интеграл (3.1) записывается в виде

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathrm{const}. \tag{3.4}$$

Система (3.3) обладает также интегралом

$$u^2 + v^2 = \mathrm{const}. \tag{3.5}$$

Этот интеграл является следствием интегралов (3.4) и $\gamma^2 = 1$.

Систему (3.3) можно также записать в следующей форме [4]:

$$d\mathbf{u}/d\tau = \mathbf{u} \times \partial H/\partial\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \partial H/\partial\mathbf{v}, \qquad d\mathbf{v}/d\tau = \mathbf{v} \times \partial H/\partial\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \partial H/\partial\mathbf{v}, \tag{3.6}$$

где $H = (\mathbf{u}, J^{-1}\mathbf{u})/2 + (\mathbf{b}, \mathbf{u}) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{v})$. Интегралы (3.4), (3.5) определяются функциями Казимира последней системы $F_1 = u^2 + v^2$, $F_2 = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

## 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим случай, когда система (3.3), а следовательно, и исходная система (1.1), приводятся к автономному виду. Это возможно, если $J = \nu J_0$, $\mathbf{a}_1 = \nu^{-1}\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b} = \nu^{-1}\mathbf{b}_0$, $\mathbf{k}_1 = \nu^{-1}\mathbf{k}_0$, где $J_0$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{k}_0 = \mathrm{const}$. Данные условия эквивалентны следующим условиям:

$$J = \nu J_0, \qquad \mathbf{a} = (\nu\eta^2)^{-1}\mathbf{a}_0, \qquad \mathbf{K} = \eta^{-1}\mathbf{K}_0. \tag{4.1}$$

При выполнении условий (4.1) система (3.3) приводится к автономному виду

$$d\mathbf{u}/d\theta = \mathbf{u}\times(J_0^{-1}\mathbf{u}+\mathbf{b}_0)+\mathbf{v}\times\mathbf{a}_0, \qquad d\theta = d\tau/\nu = dt/(\nu\eta), \qquad d\mathbf{v}/d\theta = \mathbf{v}\times(J_0^{-1}\mathbf{u}+\mathbf{b}_0)+\mathbf{u}\times\mathbf{a}_0. \tag{4.2}$$

Необходимое условие (2.25) принимает вид

$$\mathbf{M} = (\nu\eta^2)^{-1}(\mathbf{K}_0 - J_0\mathbf{a}_0)\times\mathbf{a}_0.$$

Система (4.2) записывается в форме (3.6) (с заменой $\tau$ на $\theta$) с гамильтонианом, не зависящим явно от времени, который дает обобщенный интеграл энергии

$$H_{\mathrm{a}} = (\mathbf{u}, J_0^{-1}\mathbf{u})/2 + (\mathbf{b}_0, \mathbf{u}) + (\mathbf{a}_0, \mathbf{v}) = \mathrm{const}. \tag{4.3}$$

Выделим случай, исследованный в работе [5], когда система (4.2) имеет алгебраический интеграл четвертой степени типа интеграла Ковалевской (при более жестких ограничениях интеграл Ковалевской для исходной системы (1.1) указан в работе [6]). Этот случай задается гамильтонианом следующего вида:

$$H = (u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2)/2 + \zeta_3 u_3 + \zeta_1 v_1.$$

Для приведения гамильтониана (4.3) к данному виду необходимо выполнение условий

$$A_{01} = A_{02} = 2A_{03}, \qquad \mathbf{a}_0 = \zeta_1\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{b}_0 = \zeta_3\mathbf{e}_3. \tag{4.4}$$

Положим $\mathbf{u} = A_{01}\mathbf{z}$, $\mathbf{v} = A_{01}\mathbf{w}$, $J_0 = A_{01}I$, $I = \mathrm{diag}\,(1,1,1/2)$ и запишем систему (4.2) в виде

$$d\mathbf{z}/d\theta = \mathbf{z}\times(I^{-1}\mathbf{z}+\mathbf{b}_0)+\mathbf{w}\times\mathbf{a}_0, \qquad d\mathbf{w}/d\theta = \mathbf{w}\times(I^{-1}\mathbf{z}+\mathbf{b}_0)+\mathbf{z}\times\mathbf{a}_0. \tag{4.5}$$

Дополнительный интеграл имеет вид [5]

$$(z_1^2 - z_2^2 - 2\zeta_1 w_1 + \zeta_1^2)^2 + 4(z_1 z_2 - \zeta_1 w_2)^2 - 4\zeta_3^2(z_1^2+z_2^2) - 4\zeta_3(z_3(z_1^2+z_2^2+\zeta_1^2) - 2\zeta_1 z_1 z_3) = \mathrm{const}.$$

Интегрируемость системы (4.5) при выполнении условий (4.4) показана в работе [5].

### Библиографический список

1. *Ольшанский, В.Ю.* Линейный и квадратичный интегралы сложной механической системы / В.Ю. Ольшанский // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60, вып. 1. – С. 37–46.

2. *Ольшанский, В.Ю.* Свободное движение сложной механической системы с квадратичными интегралами / В.Ю. Ольшанский // Космические исследования. – 1996. – Т. 34, № 2. – С. 145–149.

3. *Ольшанский, В.Ю.* О приводимости уравнений свободного движения сложной механической системы / В.Ю. Ольшанский // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, вып. 5. – С. 768–777.

4. *Борисов, А.В.* Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.

5. *Borisov, A.V.* Kovalevskaya top and generalizations of integrable systems / A.V. Borisov, I.S. Mamaev, A.G. Kholmskaya // Reg.&Ch. Dyn. – 2000. – V. 6, № 1. – P. 1–16.

6. *Ольшанский, В.Ю.* О динамике механической системы изменяемой конфигурации и состава в случае Ковалевской / В.Ю. Ольшанский // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. – 2008. – Т. 4(36). – С. 39–44.