

Рис. 4. Зависимость частоты (а) и фазовой скорости (b) для изотропного цилиндра

Библиографический список

1. *Gazis D.C.* Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical Foundation // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1959. № 31. P. 568–573.
2. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 176 с.
3. *Мехтиев М.Ф., Фомина Н.И.* Свободные колебания трансверсально-изотропного полого цилиндра // *Механика композит. материалов.* 2002. Т. 38, № 1. С. 81–98.
4. *Mirsky I.* Axisymmetric vibration of orthotropic cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1964. № 36. P. 2106–2112.
5. *Ohnabe H., Nowinski J. L.* On the propagation of flexural waves in anisotropic bars // *Ing.-Archiv.* 1971. № 40. P. 327–338.
6. *Shuvalov A.L.* The frobenius power series solution for cylindrically anisotropic radially inhomogeneous elastic materials // *J. Mech. Appl. Math.* 2003. 56(3). P. 327–345.
7. *Spencer A. J. M.* Deformations of fibre-reinforced materials. Oxford: ClarendonPress, 1972.
8. *Nayfeh A. H.* The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. № 89. P. 1521–1526.

УДК 532.517.4:536.25

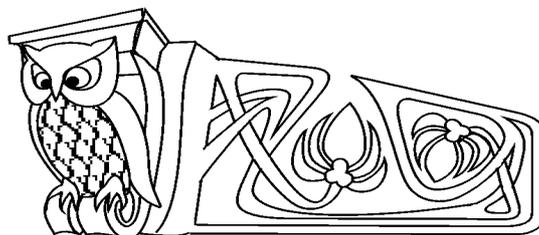
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ТРЕХМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ

И.Б. Палымский

Современная гуманитарная академия (филиал), Новосибирск, кафедра математики
E-mail: palymsky@hnet.ru

В трехмерной постановке рассмотрена задача о конвекции несжимаемой жидкости в прямоугольном параллелепипеде при подогреве снизу. Горизонтальные границы предполагаются свободными от касательных напряжений и изотермическими. Рассчитанный временной спектр температурных пульсаций в центре конвективной ячейки при надкритичности 410 хорошо согласуется с измеренным экспериментально при турбулентной конвекции в газообразном He при криогенной температуре. Для пульсаций скорости получены спектры Болджиано – Обухова $k^{-11/5}$, k^{-3} и k^{-5} . Для температурных пульсаций получены спектры Колмогорова $k^{-5/3}$ и $k^{-2.4}$. Такие спектры указывают на поведение температуры как пассивной примеси и на доминирование силы плавучести для скорости. Наличие ясно идентифицируемых спектров в исследуемом конвективном течении позволяет характеризовать данный процесс как развитую турбулентность.

Ключевые слова: моделирование, турбулентность, гидродинамика, конвекция, теплоперенос, спектр.



Numerical Investigation of Spectrums of Three-Dimensional Turbulent Convection

I.B. Palymskiy

Modern University for the Humanities (Branch), Novosibirsk, Chair of Mathematics
E-mail: palymsky@hnet.ru

The three-dimensional turbulent convective flows of viscous and incompressible fluid in a rectangular parallelepiped numerically is simulated at heating from below. The horizontal boundaries are stress-free and isothermal. The calculated time spectrum of temperature pulsations at supercriticality is equal to 410 in centre of convective cell has a good agreement with experimental data for convection in cryogenic He. The Obukhov – Bolgiano spectra $k^{-11/5}$, k^{-3} and k^{-5} have been found for velocity pulsations. Also for temperature pulsations the Kolmogorov $k^{-5/3}$ and $k^{-2.4}$ are obtained. Such spectrums denote on temperature behavior as passive admixture and that dominant force for velocity is buoyancy.

Key words: simulation, turbulence, hydrodynamics, convection, heat transfer, spectrum.



ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача о конвекции Рэлея – Бенара в различных постановках исследовалась численно [1–7] и экспериментально [8–12]. Наибольший интерес вызывают исследования при высокой надкритичности $r = Ra/Ra_{cr}$, где Ra и Ra_{cr} — число Рэлея и критическое значение числа Рэлея, ввиду их очевидной связи с проблемой прямого численного моделирования турбулентности, здесь и ниже Pr — число Прандтля.

При численном моделировании различают две постановки задачи о конвекции в бесконечном горизонтальном слое — со свободными (от напряжений) и жесткими (с условием прилипания) горизонтальными границами, как правило, решение предполагается периодическим в горизонтальных направлениях или удовлетворяющим специальным граничным условиям [13]. Обе постановки задачи часто приводят к решениям, которые различаются лишь количественно, а не качественно [14]. Этим и относительной простотой решения задачи о конвекции со свободными граничными условиями и объясняется интерес к этой постановке. Конвекция со свободными от касательных напряжений границами физически реальна и реализована в эксперименте [15].

Основные трудности при численном моделировании конвекции при высокой надкритичности связаны с наличием быстрорастущих линейных возмущений, так при $r = 950$ и $Pr = 10$ существуют возмущения, растущие в линейном приближении как $\exp(198t)$, что накладывает серьезные ограничения на численные методы. Между тем число Рейнольдса Re является относительно медленно растущей функцией надкритичности в конвекции Рэлея – Бенара и $Re \leq 44$ при $r \leq 950$ ($Pr = 10$).

Диссипация и генерация энергии турбулентности растут при увеличении надкритичности приблизительно как $r^{1.3}$ [1, 16]. При достаточно высокой надкритичности большой поток переносимой из области генерации в область диссипации энергии обуславливает образование инерционных интервалов и спектров. Интерес к исследованию спектров обусловлен тем, что наличие четко идентифицируемых инерционных интервалов и спектров характеризует рассматриваемый процесс как развитую турбулентность и показывает, какие физические механизмы являются доминирующими [17].

Известно два основных сценария развития турбулентности [17]. Изотермический сценарий Колмогорова предполагает наличие двух инерционных интервалов переноса энергий пульсаций температуры и скорости с формированием одинаковых спектров $k^{-5/3}$, где k — волновое число в случае зависимости от пространственных переменных либо частота от времени. Силы плавучести здесь существенной роли не играют, другими словами, в этом сценарии температура — пассивная примесь.

Напротив, Р. Болджиано и А. Обухов предположили существование инерционного интервала для переноса энергии пульсаций температуры и в области больших масштабов равенство по порядку величины членов плавучести и нелинейного переноса. Это приводит к спектрам $k^{-7/5}$ для температуры и $k^{-11/5}$ для скорости.

В экспериментах по турбулентной конвекции для пульсаций температуры наблюдались спектр Колмогорова $k^{-5/3}$, спектры Болджиано – Обухова $k^{-7/5}$ и $k^{-2.4}$ [8–11, 18]. Для пульсаций скорости наблюдались спектры Болджиано – Обухова $k^{-11/5}$ и $k^{-1.35}$, но спектр Колмогорова $k^{-5/3}$ не обнаружен [10, 12].

А измерением одномерного спектра пульсаций вертикальной скорости в стратифицированной атмосфере показано, что в определенном диапазоне высот (до 2500 м) выполняется закон $k^{-2.42}$, близкий к закону Болджиано – Обухова $k^{-11/5}$ [19]. А в более высоких слоях атмосферы (около 8000 м) на малых частотах в спектре скорости отчетливо виден закон Ламли – Шура k^{-3} [20].

В немногочисленных численных исследованиях турбулентной трехмерной конвекции при высокой надкритичности для пульсаций температуры были получены спектры Болджиано – Обухова $k^{-7/5}$ [3] и k^{-1} [1], но спектры Колмогорова $k^{-5/3}$ и $k^{-2.4}$ не обнаружены. Для пульсаций скорости — спектры $k^{-5/3}$, k^{-3} [1–3], но спектр Болджиано – Обухова $k^{-11/5}$ не наблюдался. Отметим очень приближенное соответствие закону Колмогорова $k^{-5/3}$ для скорости [1, 2] и k^{-1} [1] — для температуры.

В [13] проведено исследование спектров пульсаций температуры и скорости при двумерной конвекции. Для пульсаций температуры наблюдались спектры $k^{-5/3}$, $k^{-2.4}$ и $k^{-11/5}$, k^{-5} — для пульсаций скорости.



Цель работы — изучение спектров трехмерной конвекции со свободными граничными условиями при умеренно высокой надкритичности (до $r \leq 950$) и сравнение рассчитанного временного спектра пульсаций температуры с полученным в эксперименте.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В приближении Буссинеска рассматриваются трехмерные конвективные течения вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном параллелепипеде при подогреве снизу. Прямоугольная в плане область течения имеет размеры π/α и π/β в горизонтальных направлениях, где α и β — минимальные волновые числа. Горизонтальные границы области считаются изотермическими.

Исходная система уравнений в безразмерных переменных, записанная в отклонениях от равновесного решения, имеет вид [13]

$$\begin{aligned} u_x + v_y + w_z = 0, \quad u_t + \frac{1}{Pr}(uu_x + vv_y + ww_z) + P_x = \Delta u, \quad v_t + \frac{1}{Pr}(uv_x + vv_y + wv_z) + P_y = \Delta v, \\ w_t + \frac{1}{Pr}(uw_x + vw_y + ww_z) + P_z = \Delta w + Ra \cdot Q, \\ Q_t + \frac{1}{Pr}(uQ_x + vQ_y + wQ_z) = \frac{1}{Pr} \Delta Q + \frac{w}{Pr}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, w, p — компоненты вектора скорости и давление, Q — отклонение температуры от равновесного линейного профиля (полная температура равна $\Theta = 1 - y + Q$), $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ — оператор Лапласа, действующий на функцию f , $Ra = g\beta_t H^3 dQ / \chi\nu$ — число Рэлея, $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля, g — ускорение силы тяжести, β_t, ν, χ — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, H — толщина слоя и dQ — разность температур на горизонтальных границах, x, y и z — горизонтальные и вертикальная координаты. В дальнейшем для краткости будем называть Q и Θ температурой.

Трехмерная конвекция рассматривается с изотермическими и свободными от касательных напряжений горизонтальными границами $z = 0, 1$: $u_z = v_z = w = Q = 0$. Такие граничные условия физически реальны и реализованы в эксперименте [15].

Искомые величины u, v, w, p, Q разыскиваются в виде

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M u_{knm}(t) \rho_k \rho_n \rho_m \cos(\alpha kx) \cos(\beta ny) \cos(\pi mz), \\ v(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^M v_{knm}(t) \rho_m \sin(\alpha kx) \sin(\beta ny) \cos(\pi mz), \\ w(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} w_{knm}(t) \rho_n \sin(\alpha kx) \cos(\beta ny) \sin(\pi mz), \\ p(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M p_{knm}(t) \rho_n \rho_m \sin(\alpha kx) \cos(\beta ny) \cos(\pi mz), \\ Q(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} Q_{knm}(t) \rho_n \sin(\alpha kx) \cos(\beta ny) \sin(\pi mz), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\rho_k = 0.5$ при $k = 0, K$, $\rho_k = 1$ при $1 \leq k \leq K - 1$, $u_{0,0,0}$ в (2).

«Мягкие» граничные условия первого и второго рода на боковых границах $x = 0, \pi/\alpha$; $y = 0, \pi/\beta$ ставятся исходя из вида решения (2), например, при $x = 0$ и $0 \leq y \leq \pi/\beta$ из (2) находим, что $u_x = v = w = Q = 0$ — условия на вертикальной плоскости, проходящей через центр конвективного вала, параллельно его оси. Граничные условия при $y = 0$ и $0 \leq x \leq \pi/\alpha$: $u_y = v = w_y = Q_y = 0$ соответствуют условиям на границе конвективной ячейки. Некоторая искусственность такой постановки обусловлена желанием обеспечить преимущество с двумерными расчетами работы [16], где приведено сравнение с экспериментальными результатами при небольшой надкритичности.

Пусть $r = Ra/Ra_{cr}$ — надкритичность, где $Ra_{cr} = 657.5$ — критическое значение числа Рэлея.



2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И ЕГО АПРОБАЦИЯ

Кратко опишем спектрально-разностный вариант псевдо-спектрального метода, который применяется для решения системы (1). Двумерный вариант данного метода применялся для расчетов конвекции при высокой надкритичности со свободными и жесткими граничными условиями [16], описание метода расчета, результаты линейного и нелинейного (на модельной нелинейной системе уравнений) анализа, результаты тестовых расчетов приведены в работах [21, 22].

Следуя общей идеологии расщепления на линейные и нелинейные процессы, переход от слоя n к слою $n + 1$ по времени производится в три этапа. На первом этапе расщепления решается полная линейная система уравнений и устанавливается соответствие в линейном приближении спектральных характеристик численного метода и дифференциальной задачи, на втором — учитываются нелинейные члены и на третьем — восстанавливается выполнение уравнения неразрывности, нарушенное на втором этапе расщепления.

Конечно-разностный метод, использующий подобное расщепление по физическим процессам получил большое распространение, но при расчете сложных течений спектральный и псевдо-спектральный (метод коллокаций) методы более эффективны [23]. В отличие от широко используемого варианта псевдо-спектрального метода [1, 5, 6] в предлагаемой его спектрально-разностной модификации на первом этапе расщепления решается полная линейная система уравнений, содержащая члены вязкости, плавучести и давления, что обеспечивает соответствие в линейном приближении спектральных характеристик численного метода и дифференциальной задачи, а на втором — вместо вычисления пространственных производных по точным формулам используется разностная схема, что снимает проблему вычислительной устойчивости [23].

На первом этапе расщепления учитываем линейное развитие возмущений, без учета взаимодействия гармоник

$$\begin{aligned} u_t + P_x &= \frac{1}{2} \Delta u, & v_t + P_y &= \frac{1}{2} \Delta v, & w_t + P_z &= \frac{1}{2} \Delta w + RaQ, \\ Q_t &= \frac{1}{2Pr} \Delta Q + \frac{w}{Pr}, & u_x + v_y + w_z &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для эффективного решения уравнений нелинейного конвективного переноса для u , v , w и Q половина вязких членов учтена на втором этапе расчета. После подстановки решения (2) в систему (3) и исключения давления с помощью уравнения неразрывности, вместо (3) получим систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для четырех неизвестных амплитуд u_{knm} , v_{knm} , w_{knm} и Q_{knm} . Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается аналитически, без применения каких-либо аппроксимаций по времени по формулам, выведенным программой аналитических вычислений Maple V R5.

На втором этапе учитывается нелинейный конвективный перенос, т.е. принимается во внимание взаимодействие гармоник:

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{Pr}(uu_x + vu_y + wu_z) &= \frac{1}{2} \Delta u, & v_t + \frac{1}{Pr}(uv_x + vv_y + wv_z) &= \frac{1}{2} \Delta v, \\ w_t + \frac{1}{Pr}(uw_x + vw_y + ww_z) &= \frac{1}{2} \Delta w, & Q_t + \frac{1}{Pr}(uQ_x + vQ_y + wQ_z) &= \frac{1}{2Pr} \Delta Q. \end{aligned}$$

Здесь применена явная схема (с аппроксимацией направленными разностями первого порядка производных в нелинейных членах и поправкой А.А. Самарского) при достаточной разрешимости по пространству второго порядка точности [24].

На третьем этапе расщепления восстанавливается выполнение уравнения неразрывности, нарушенное на втором этапе:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = -\text{grad}(p), \quad \frac{\text{div}(u^{n+2/3})}{\tau} = \Delta p. \quad (4)$$

Подстановка в систему (4) решений в форме (2) приводит систему (4) к системе алгебраических соотношений. Пересчет искоемых полей из спектрального пространства в физическое и обратно производился по стандартным программам быстрого преобразования Фурье по косинусам и синусам.

При обработке данных расчетов осреднением по времени и горизонтальным координатам вычисляется профиль средней температуры и находится поле температурных пульсаций в каждый момент времени. Затем одномерным преобразованием Фурье (по косинусам и синусам в горизонтальных направлениях и по синусам в вертикальном) и осреднением по всем однородным координатам квадратов амплитуд Фурье гармоник пульсаций находятся одномерные пространственные энергетические спектры [17]. По полю температуры и скорости вычислялись одномерные пространственные спектры EQ_k , EQ_n , EQ_m и EV_k , EV_n , EV_m для направлений x , y , z , соответственно.

По аналогии с двумерными расчетами [16, 21, 22] в данной работе полагалось $\alpha = \beta = 1$, расчеты проводились при $50 \leq r \leq 950$ и $Pr = 10$. Исключение составляют данные расчетов на рис. 1, полученные для корректного сопоставления с экспериментом при $r = 410$ и $Pr = 0.8$.

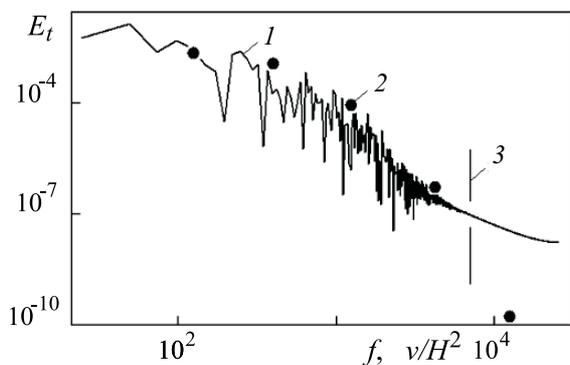


Рис. 1. Временной спектр температуры, 1 — расчет, 2 — эксперимент [8], 3 — $f = f_d$

Результаты тестирования двумерной версии вычислительного алгоритма даны в [21]. Для проверки правильности работы трехмерного вычислительного алгоритма, проведено сравнение средних величин на двумерном решении, которое было рассчитано по двумерному [21] и трехмерному вычислительным алгоритмам при $r = 5$ и $Pr = 10$. Использовалось $[33 \times 17]$ гармоник в двумерном расчете и $[33 \times 9 \times 17]$ — в трехмерном.

Вычисленное число Нуссельта

$$Nu(t) = \frac{\alpha\beta}{2\pi^2} \int_0^{\pi/\beta} \int_0^{\pi/\alpha} (Q_z(t, x, y, 0) + Q_z(t, x, y, 1)) dx dy - 1$$

(в двумерном варианте определяется по аналогии) после осреднения по времени отличалось на 1%, среднеквадратичная скорость V_{me} — на 5.9% и среднеквадратичное значение температурных пульсаций Q_{me} — на 2.6% от характерной температуры. Такое совпадение можно считать неплохим для методов, использующих различные искомые переменные: функция тока, вихрь [21] и скорость, давление — в настоящей работе.

Все расчеты проведены с числом гармоник 65^3 . Для проверки достаточности разрешимости проведены тестовые расчеты при $r = 950$ с числом гармоник 129^3 и 33^3 . По результатам расчетов с разрешимостями 65^3 и 129^3 при помощи квадратичной экстраполяции вычислялось точное значение средних величин. Результаты тестовых расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Проверка достаточной разрешимости

Разрешимость	Nu	Re	Q_{me}
33^3	12.30 (14.2)	48.39 (21.2)	0.2503 (3.1)
65^3	13.68 (4.5)	44.05 (10.4)	0.2481 (2.2)
129^3	14.18 (1.2)	40.95 (2.6)	0.2441 (0.5)
Точное значение	14.33	39.92	0.2428

Примечание. В скобках приведены отклонения от точного значения в процентах, $Re = V_{me}/Pr$ — число Рейнольдса.

По приведенным в табл. 1 значениям числа Re видно, что величина схемной вязкости при 65^3 составляет примерно 10% от физической, видна сходимость средних величин.

Вычислялось и диссипативное волновое число [1]:

$$k_d = 2\pi \left(\frac{(Nu - 1)Ra}{Pr^2} \right)^{0.25},$$

которое было равно 102.04, 105.38, 105.51 и 105.55 в расчетах с разрешимостями 33^3 , 65^3 , 129^3 и при квадратичной экстраполяции, соответственно.

По кинетической энергии определялось среднее горизонтальное волновое число, характеризующее горизонтальный масштаб вихрей, содержащий основную долю кинетической энергии:

$$K_{me} = \frac{\sum_{k,n} \sqrt{k^2 + n^2} E_{kn}^2}{\sum_{k,n} E_{kn}^2}. \tag{5}$$



Здесь $Ek = \sum_{k,n} E_{kn}^2$ — кинетическая энергия, а

$$E_{kn}^2 = \frac{\pi^2}{16\alpha\beta} \sum_{m=0}^{m=M} (u_{knm}^2 \rho_k \rho_n \rho_m + v_{knm}^2 \rho_m + w_{knm}^2 \rho_n). \quad (6)$$

Суммирования в (5) и (6) производятся во всем диапазоне изменения индексов: $0 \leq k \leq K$, $0 \leq n \leq N$ и $0 \leq m \leq M$, при этом отсутствующие в представлении (2) гармоники доопределяются нулями.

Значение K_{me} было равно 3.157, 3.309, 3.544 и 3.622 в расчетах с разрешимостями $33^3, 65^3, 129^3$ и при квадратичной экстраполяции, соответственно.

По приведенным значениям k_d и K_{me} также видна сходимость.

Для контроля точности проверялось выполнение интегральных соотношений, например, полученное умножением уравнения для температуры системы (1) на Q и интегрированием по области $Gt = \{0 \leq x, y \leq \pi, 0 \leq z \leq 1, t^n \leq t \leq t^{n+1}\}$ с учетом граничных условий

$$\frac{\frac{1}{2} \int_G (Q^n)^2 + \frac{1}{Pr} \int_{Gt} WQ}{\frac{1}{2} \int_G (Q^{n+1})^2 + \frac{1}{Pr} \int_{Gt} (Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2)} = 1,$$

где $G = \{0 \leq x, y \leq \pi, 0 \leq z \leq 1\}$.

Аналогично умножением уравнений системы (1) для u, v и w на u, v и w , соответственно, и интегрированием по Gt получаем интегральное соотношение для кинетической энергии.

Табл. 2 показывает хорошую точность выполнения осредненных по времени локальных интегральных соотношений при $r = 950$, видна сходимость к 1 при увеличении разрешимости.

Таблица 2

Проверка интегральных соотношений

Разрешимость	Энергия	Температура
33^3	0.99625	0.99693
65^3	0.99889	0.99877
129^3	0.99986	0.99975

Профили средней температуры и среднеквадратичных температурных пульсаций при этом практически совпадали, а по профилям пульсаций скорости наблюдалась сходимость при последовательном увеличении пространственной разрешимости [13]. Одномерные энергетические спектры пульсаций температуры и скорости при разрешимостях 65^3 и 129^3 практически совпадают.

Как показали методические расчеты, спектры являются очень консервативной характеристикой, медленно изменяющейся при увеличении надкритичности и пространственной разрешимости, поэтому для исследования спектров достигнутая точность достаточна.

3. ВРЕМЕННОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СПЕКТРЫ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

Приведем результаты сравнения рассчитанного временного энергетического спектра (квадрат модуля Фурье гармоник) пульсаций температуры в центре конвективной ячейки с экспериментальными данными по турбулентной конвекции газообразного He при $5^\circ K$ [8].

Эксперименты проводились в цилиндрической ячейке из нержавеющей стали с аспектным отношением 0.5 (диаметр, отнесенный к высоте) и критическим числом Рейля $1.7 \cdot 10^4$ [25]. Расчеты проводились при совпадающих с экспериментом надкритичности $r = 410$ и числе Прандтля $Pr = 0.8$.

На рис. 1 частота f отложена в единицах ν/H^2 , расчетные и экспериментальные спектральные кривые нормированы так, чтобы интеграл по всем частотам был равен 1. Граничные условия и геометрия области в расчете и эксперименте различны и это несколько понижает ценность сравнения. Однако спектр в расчете и эксперименте вычислялся по пульсациям температуры в центре ячейки, где влияние граничных условий минимально из-за относительной удаленности от границ. Это и уже отмеченная выше консервативность спектров позволяют надеяться на правомерность такого сравнения.

Заметное различие приведенных на рис. 1 расчетных и экспериментальных данных наблюдается только на диссипативных частотах порядка $f_d = V \cdot Re^{3/4}/H$, где V — среднеквадратичная скорость и $Re = V \cdot H/\nu$ — число Рейнольдса [26].

На рис. 2 приведены временные спектры числа Нуссельта при $r = 400$ (рис. 2, а) и $r = 950$ (рис. 2, б). Временной энергетический спектр числа Нуссельта при $r = 950$ весьма сложный, с характерным



для стохастических процессов заполнением длинноволновой части спектра [28, 29], а при $r = 400$ спектр простой, с четко видными выделенными частотами, кратными основной $f_0 = 99$, при почти полном отсутствии движений с частотами $f < f_0$. Качественное различие спектров на рис. 1 и 2, обусловлено отличием в числе Прандтля (0.8 и 10).

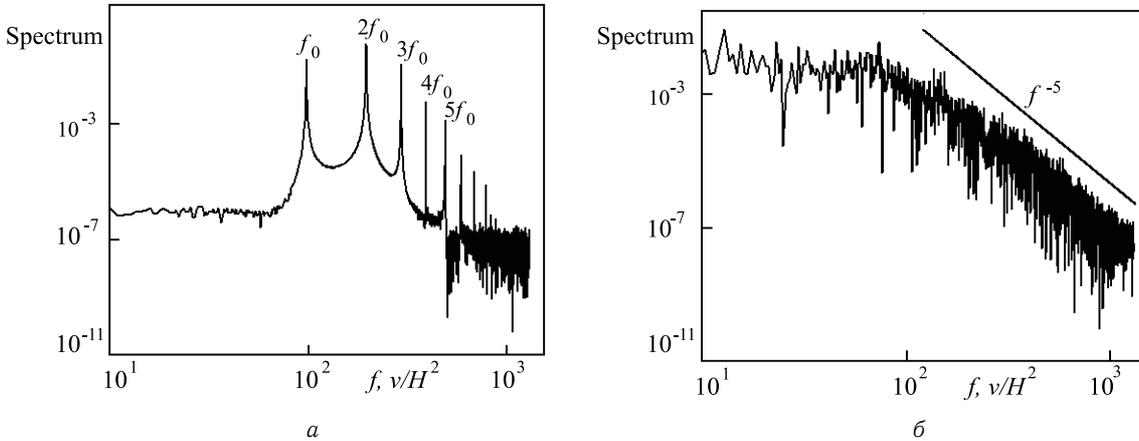


Рис. 2. Временной энергетический спектр числа Нуссельта, а – $r = 400$, б – $r = 950$

Для пульсаций температуры и скорости при $Pr = 10$ характерные спектры формируются при $r \geq 500$ и имеют устойчивый характер вплоть до $r = 950$. Ниже везде $Pr = 10$ и $r = 950$ на рис. 3–5. Высокочастотные участки спектров на рис. 3–5 не приведены из-за их нефизичности ввиду искажения численными эффектами на краю спектра разностных операторов [27].

Теперь рассмотрим одномерные пространственные энергетические спектры температурных пульсаций. На рис. 3 показаны спектры, соответствующие горизонтальным направлениям x (рис.3, а) и y (рис.3, б), видны продолжительные участки со степенными законами $k^{-2.4}$ и $k^{-5/3}$ соответственно. В спектре температурных пульсаций, соответствующем вертикальному направлению, виден участок со степенным законом $k^{-5/3}$.

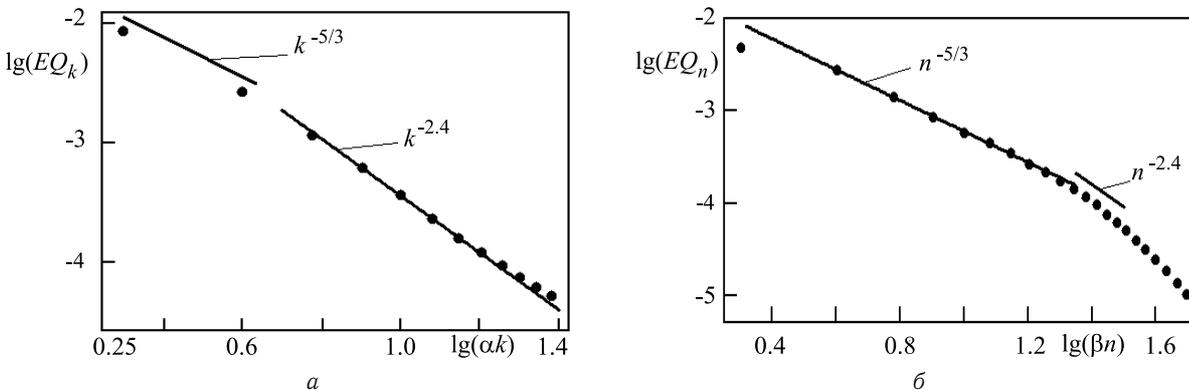


Рис. 3. Спектры температурных пульсаций в горизонтальных направлениях: а – x , б – y

Спектры $k^{-5/3}$ и $k^{-2.4}$ в спектре пульсаций температуры были получены при двумерном моделировании сложных режимов конвекции [13].

Спектры $k^{-5/3}$ и $k^{-2.4}$ наблюдались в экспериментах по турбулентной конвекции в газообразном гелии при криогенной температуре [8, 11]. Спектр $k^{-2.4}$ пока не получил теоретического и физического обоснования, а наблюдавшийся спектр $k^{-5/3}$ указывает на поведение температуры как пассивной примеси [17].

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ПУЛЬСАЦИЙ СКОРОСТИ

Рассмотрим теперь одномерные энергетические спектры пульсаций скорости. На рис. 4 приведены спектры, отвечающие горизонтальным направлениям x (рис.4, а) и y (рис.4, б), видны продолжительные участки со степенными законами Болджиано – Обухова $k^{-11/5}$ и n^{-3} соответственно. Спектр n^{-3} наблюдался при численном исследовании турбулентной конвекции Рэлея – Бенара [1, 2].

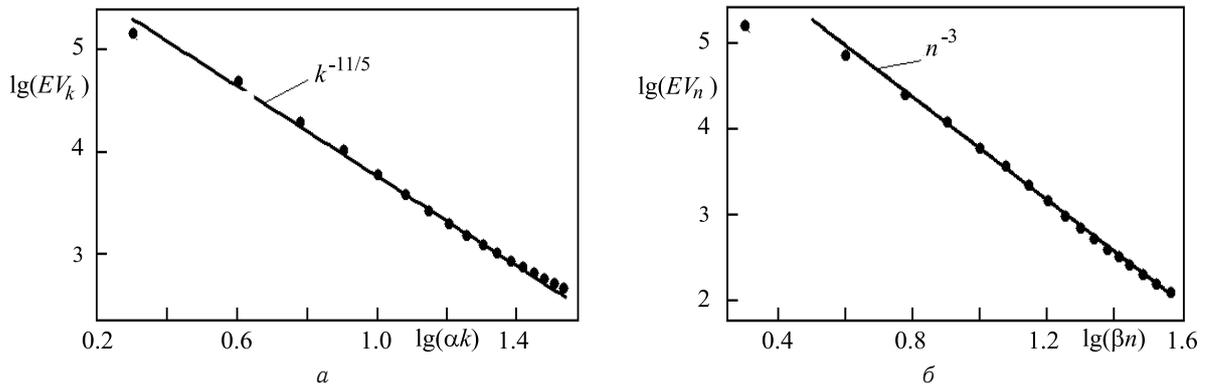


Рис. 4. Спектры пульсаций скорости в горизонтальных направлениях: а – x , б – y

На рис. 5 приведен спектр, отвечающий вертикальному направлению z . Ясно виден спектр m^{-5} , предсказанный теоретически для турбулентной конвекции с высоким числом Прандтля [17].

Спектры $k^{-11/5}$ и k^{-5} в спектре пульсаций скорости были получены при двумерном моделировании конвекции [13].

Подчеркнем, что степенные законы $k^{-11/5}$ и k^{-3} в спектре скорости типичны для стратифицированных течений и известны как законы Болджиано – Обухова и Ламли – Шура, что указывает на доминирование силы плавучести. Степенные законы Болджиано – Обухова и Ламли – Шура для пульсаций скорости наблюдались в стратифицированной атмосфере [19, 20] и, дополнительно, закон Болджиано – Обухова — в лабораторных экспериментах по турбулентной конвекции [10, 12].

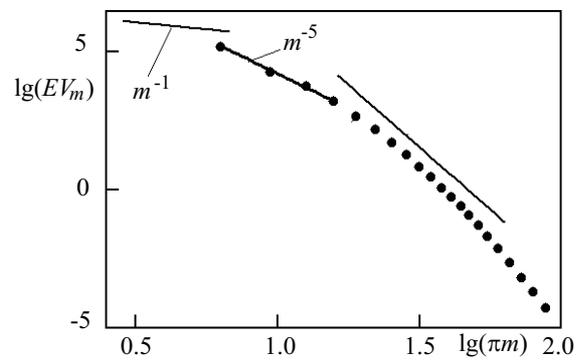


Рис. 5. Спектр пульсаций скорости в вертикальном направлении

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Временной спектр температурных пульсаций в центре конвективной ячейки, рассчитанный по трехмерной модели со свободными граничными условиями, при надкритичности 410 имеет хорошее согласование с экспериментальными данными по турбулентной конвекции в газообразном He при криогенной температуре [8]. Существенные отклонения наблюдаются только на диссипативных частотах.

Для пульсаций скорости получены спектры Болджиано – Обухова $k^{-11/5}$, k^{-3} и k^{-5} . Спектр Болджиано – Обухова наблюдался в экспериментах по турбулентной конвекции [10, 12], k^{-3} — в трехмерных расчетах турбулентной конвекции [1, 2] и известен как закон Ламли – Шура в стратифицированной атмосфере, а k^{-5} — предсказан теоретически для турбулентной конвекции при высоком числе Прандтля [17]. Отметим, что спектр Колмогорова $k^{-5/3}$ для пульсаций скорости, наблюдавшийся в численных исследованиях турбулентной конвекции [1–3], в настоящей работе не был обнаружен, что объясняется низким числом Рейнольдса ($Re \leq 44$) в расчетах данной работы [30]. Также относительно низкими числами Рейнольдса объясняется и отсутствие изотропии малых масштабов в горизонтальных направлениях (согласно [30] изотропия малых масштабов наблюдается при $Re \geq 100$). В двумерных расчетах [13] получены спектры Болджиано – Обухова $k^{-11/5}$ и k^{-5} для пульсаций скорости. Подчеркнем, что степенные законы Болджиано – Обухова и Ламли – Шура в спектре скорости типичны для стратифицированных течений, что указывает на доминирование силы плавучести.

Для температурных пульсаций, как и в двумерных расчетах [13], получены спектры Колмогорова $k^{-5/3}$ и $k^{-2.4}$. Спектр $k^{-5/3}$ и $k^{-2.4}$ для температурных пульсаций наблюдались в экспериментах по турбулентной конвекции [8, 9, 11, 18]. Спектр $k^{-2.4}$ пока не получил теоретического и физического обоснования, а наблюдавшийся спектр $k^{-5/3}$ указывает на поведение температуры как пассивной примеси [17]. Отметим, что спектр Болджиано – Обухова $k^{-7/5}$, наблюдавшийся в экспериментальных



исследованиях [8, 9, 11, 18], в расчетах данной работы не наблюдался, как и в численных исследованиях [1, 2]. Спектр Болджиано – Обухова $k^{-7/5}$ обнаружен во временных спектрах при трехмерном моделировании турбулентной конвекции воздуха при огромной надкритичности (до $r \approx 3 \cdot 10^7$) [3]. Предположительной причиной отсутствия спектра Болджиано – Обухова для пульсаций температуры в расчетах данной работы может быть недостаточно большое значение надкритичности.

Частичное подтверждение возможности одновременной реализации двух сценариев турбулентности (изотермического Колмогорова и Болджиано – Обухова) получено в эксперименте по конвекции глицерина в вертикальной тороидальной ячейке, где в зависимости от расположения датчиков термодатчиков для температурных пульсаций реализуется спектр Колмогорова либо Болджиано – Обухова [18].

В заключение подчеркнем, что хотя относительно невысокие числа Рейнольдса ($Re \leq 44$) в расчетах данной работы обуславливают отсутствие изотропии малых масштабов двух горизонтальных направлений, наличие ясно идентифицируемых спектров в исследуемом конвективном течении, которые имеют устойчивый характер и наблюдаются при $500 \leq Ra/Ra_{cr} \leq 950$, позволяет нам характеризовать данный процесс как турбулентность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-96070).

Библиографический список

1. Kerr R.M. Rayleigh number scaling in numerical convection // J. Fluid Mech. 1996. V. 310. P. 139–179.
2. Malevsky A.V. Spline-characteristic method for simulation of convective turbulence // J. Comput. Phys. 1996. V. 123, № 2. P. 466–475.
3. Verzicco R., Camussi R. Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell // J. Fluid Mech. 2003. V. 477. P. 19–49.
4. Shishkina O., Wagner C. Analysis of thermal dissipation rates in turbulent Rayleigh – Benard convection // J. Fluid Mech. 2006. V. 546. P. 51–60.
5. Cortese T., Balachandar S. Vortical nature of thermal plumes in turbulent convection // Phys. Fluids. A. 1993. V. 5, № 12. P. 3226–3232.
6. Curry J.H., Herring J.R., Loncaric J., Orszag S.A. Order and disorder in two- and three-dimensional Benard convection // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 1–38.
7. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Шмидт В.М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 545–548.
8. Wu X.-Z., Kananoff L., Libchaber A., Sano M. Frequency power spectrum of temperature fluctuations in free convection // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64, № 18. P. 2140–2143.
9. Cioni S., Ciliberto S., Sommeria J. Temperature structure functions in turbulent convection at low Prandtl number // Europhys. Lett. 1995. V. 32, № 5. P. 413–418.
10. Ashkenazi S., Steinberg V. Spectra and statistics of velocity and temperature fluctuations in turbulent convection // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83, № 23. P. 4760–4763.
11. Niemela J.J., Skrbek L., Sreenivasan K.R., Donnelly R.J. Turbulent convection at very high Rayleigh numbers // Nature. 2000. V. 404, № 20. P. 837–840.
12. Shang X.-D., Xia K.-Q. Scaling of the velocity power spectra in turbulent thermal convection // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 065301–1–4.
13. Палымский И.Б. Численное исследование спектров турбулентной конвекции Рэлея – Бенара // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 2. С. 145–156.
14. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея – Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 247 с.
15. Goldstein R.J., Graham D.J. Stability of a horizontal fluid with zero shear boundaries // Phys. Fluids. 1969. V. 12, № 6. P. 1133–1137.
16. Палымский И.Б. Численное моделирование двумерной конвекции, роль граничных условий // Известия РАН. МЖГ. 2007. № 4. С. 61–71.
17. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели / Ин-т компьютерных исследований. М.; Ижевск, 2003. 292 с.
18. Браже Р.А., Куделин О.Н. Экспериментальная реализация модели Лоренца конвективной неустойчивости жидкости в вертикальной тороидальной ячейке // Изв. вузов. ПНД. 2006. Т. 14, № 6. С. 88–98.
19. Атмосфера: Справочник / Под ред. Ю.С. Седунова Л.: Гидрометеиздат, 1991. 510 с.
20. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 319 с.
21. Палымский И.Б. Численное моделирование двумерной конвекции при высокой надкритичности // Успехи механики. 2006. № 4. С. 3–28.
22. Палымский И.Б. Линейный и нелинейный анализ численного метода расчета конвективных течений // Сиб. журн. вычисл. математики. 2004. Т. 7, № 2. С. 143–163.
23. Шуманн У., Гретцбах Г., Кляйзер Л. Прямые методы численного моделирования турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. 464 с.
24. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 285 с.
25. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.



26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
 27. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. 2-е изд. М.: Наука, 1978. 687 с.
 28. Palymskiy I.B., Fomin P.A., Hieronymus H. The Rayleigh–Benard convection in gas with chemical

- reactions // Сиб. журн. вычисл. математики. 2007. Т. 10, № 4. Р. 371–383.
 29. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 378 с.
 30. Турбулентность. Принципы и применение / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980. 535 с.

УДК 539.3

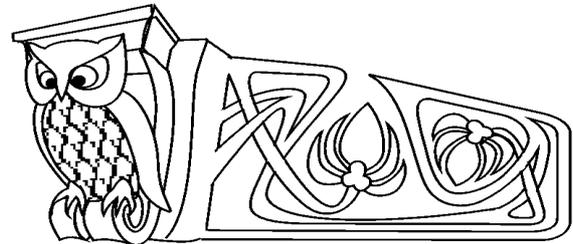
ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

О.М. Ромакина

Саратовский государственный университет,
 кафедра компьютерной алгебры и теории чисел
 E-mail: romakinaom@hotmail.ru

При предположениях классической теории Кирхгофа рассматривается задача об установившихся колебаниях тонкой прямоугольной пластинки из упругого ортотропного материала. Двумерная краевая задача сводится к одномерной модифицированным методом сплайн-коллокации. Одномерная задача решается численно устойчивым методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты вычислений первых трех резонансных частот и графики, изображающие форму деформированной срединной поверхности, для трех вариантов условий на контуре.

Ключевые слова: метод сплайн-коллокации, ортотропная пластинка.



On the Steady Transverse Vibrations of a Rectangular Orthotropic Plate

O.M. Romakina

Saratov State University,
 Chair of Computer's Algebra and Theory of Numbers
 E-mail: romakinaom@hotmail.ru

The problem of the steady transverse vibrations of a rectangular orthotropic plate under the classical Kirchhoff theory assumptions is considered. Two-dimensional problem is reduced to one-dimensional via the modified spline-collocation method. One-dimensional problem is numerically solved with the stable discrete orthogonalization method. Numerical results for three resonance frequencies and plots for deformed middle-surface are presented for three types of boundary conditions on the edges.

Key words: modied method of spline collocation, ortotropic plate.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Уравнение для определения прогиба w при динамическом изгибе ортотропной пластинки в рамках классической теории Кирхгофа, как известно [1], имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (1)$$

где $w = w(x, y, t)$ — прогиб точек срединной плоскости; h — толщина пластинки; t — время; координатные оси x и y направлены по главным направлениям анизотропии; D_i ($i = 1, 2, 3$) — соответствующие жесткости; ρ — плотность материала.

Будем рассматривать установившиеся колебания пластинки под действием поперечной нагрузки интенсивности

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \sin \omega t. \quad (2)$$

Тогда в безразмерных переменных $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ (a и b — размеры пластинки в плане) для безразмерной амплитуды $W(\xi, \eta)$ прогиба $w(x, y, t) = hW(\xi, \eta) \sin \omega t$ из (1) с учетом (2) следует уравнение

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \mu_4 c^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \mu_1 c^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - \lambda^4 W = q_0(\xi, \eta) / D_1^*, \quad (3)$$

где $\lambda^4 = \rho h_0^2 a^2 \omega^2 / D_1^*$ — безразмерный частотный параметр.

Амплитудные значения внутренних моментов и обобщенных поперечных усилий выражаются через функцию W по формулам

$$M_x^* = -a^2 D_1^* \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \nu_2 c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), \quad M_y^* = -a^2 D_1^* \mu_1 \left(\nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), \quad H_{xy} = -a^2 D_1^* \mu_2 c \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta},$$