5. *Григолюк, Э.И.* Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
6. *Няшин, Ю.И.* К теории изгиба листовой рессоры / Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, Р.Н. Рудаков // Изв. РАН, МТТ. 2002. № 6. С. 134–143.
7. *Осипенко М.А.* Об одной контактной задаче для системы струн / М.А. Осипенко// Вест. ПГТУ. Сер. Прикладная математика и механика. 2005. № 1. С. 82–86.
8. *Li, H.* Unbonded Contact of Finite Timoshenko Beam on Elastic Layer / H. Li, J.P. Dempsey // J. of Engineering Mechanics. 1988. July. Vol. 114, № 7. P. 1265–1284.
9. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.

УДК 629

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительного эксперимента в механике
E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

Рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА) с помощью ограниченного по модулю управления, ортогонального плоскости орбиты КА. Найдено аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты КА для постоянного на смежных участках активного движения КА управления.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, ориентация, кватернион, оптимальное управление.

Analytical Solution of Differential Equations of Circular Spacecraft Orbit Orientation

I.A. Pankratov, Yu.N. Chelnokov

Saratov State University,
Chair of Computational Experiment in Mechanics
E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

The problem of optimal reorientation of spacecraft's orbit with a limited control, orthogonal to the plane of spacecraft orbit is being investigated. We have found an analytical solution of differential equations of circular spacecraft orbit orientation by control that is permanent on adjacent parts of the active spacecraft's motion.

Key words: spacecraft, orbit, orientation, quaternion, optimal control.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КА

В работах Ю.Н. Челнокова, С.В. Ненахова, Д.А. Сергеева [1–3] рассматривается задача оптимальной переориентации орбиты КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$2\frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \qquad \mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \boldsymbol{i}_1 + \Lambda_2 \boldsymbol{i}_2 + \Lambda_3 \boldsymbol{i}_3, \qquad \mathbf{\Omega}_\xi = \frac{r}{c} u(\cos\varphi\, \boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{i}_2),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \qquad c = \text{const}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}$ — нормированный кватернион ориентации орбиты КА, $\circ$ — символ кватернионного умножения, $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона, $r = |\boldsymbol{r}|$ — модуль радиуса-вектора центра масс КА, $c = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$ — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\boldsymbol{v}$ центра масс КА), φ — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите, u — проекция вектора реактивного ускорения $\boldsymbol{u}$ на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА), p и e — параметр и эксцентриситет орбиты.

При этом необходимо определить ограниченное по модулю управление $\boldsymbol{u}$:

$$-u_{\max} \le u \le u_{\max}, \qquad u = |\boldsymbol{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \qquad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}^0$$

в конечное состояние

$$t = t_1, \qquad \varphi(t_1) = \varphi^*, \qquad \text{vect}(\mathbf{\Lambda}(t_1)) = 0$$

и минимизирующее функционал

$$J_1 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2), \qquad \alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const} \geq 0$$

или функционал

$$J_2 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|), \qquad \alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const} \geq 0. \tag{2}$$

При $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ имеем задачу быстродействия.

Помимо уравнений (1) ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера Λ_j для решения задачи переориентации орбиты КА могут быть использованы уравнения ориентации орбитальной системы координат η в параметрах Эйлера λ_j, имеющие вид

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \boldsymbol{i}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{i}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{i}_3, \qquad \boldsymbol{\omega}_\eta = \frac{r}{c} u \boldsymbol{i}_1 + \frac{c}{r^2} \boldsymbol{i}_3,$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \qquad c = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}$ — нормированный кватернион, характеризующий ориентацию орбитальной системы координат в инерциальной системе координат (ось η_1 направлена вдоль радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ центра масс КА, а ось η_3 перпендикулярна плоскости орбиты). Кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ связан с кватернионом $\boldsymbol{\Lambda}$ ориентации орбиты КА соотношением

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2} \boldsymbol{i}_3\right).$$

Аналитическое решение уравнений (1) или (3) в случае произвольного управления $u = u(t)$ неизвестно. Оптимальное управление, находимое из условия максимума функции Гамильтона – Понтрягина по переменной u, в случае минимизации функционала (2) или при решении задачи быстродействия сохраняет постоянное значение на смежных участках активного движения КА (см., например, работу Ю.Н. Челнокова [4]). В статье Ю.Н. Челнокова [5] найдено аналитическое решение кинематических уравнений движения твердого тела в параметрах Эйлера в случае, когда вектор угловой скорости твердого тела является постоянным по направлению в связанном базисе, но переменным по модулю. Проекции вектора мгновенной угловой скорости орбитальной системы координат на ее оси при условии, что орбита КА круговая, а управление постоянно, являются неизменными. Отметим, что орбиты спутников орбитальных группировок ГЛОНАСС и GPS близки к круговым. С учетом результатов, полученных в [5], аналитическое решение уравнений (3) на отдельном участке активного движения КА для моментов времени $t \in [t_k, t_{k+1}]$, когда $u = \mathrm{const}$, имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t_k) \circ \left(\cos\frac{\omega t}{2} + \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2} \boldsymbol{\omega}_\eta\right), \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = \frac{r}{c} u \boldsymbol{i}_1 + \frac{c}{r^2} \boldsymbol{i}_3, \quad \omega = |\boldsymbol{\omega}_\eta| = \sqrt{u^2 \frac{r^2}{c^2} + \frac{c^2}{r^4}} = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Уравнения (1) в отличие от уравнений (3) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) с переменными коэффициентами даже в случае переориентации круговой орбиты КА с помощью кусочно-постоянного управления. Указанное обстоятельство значительно усложняет процесс нахождения аналитического решения данной системы дифференциальных уравнений.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Укажем еще один способ получения аналитического решения дифференциальных уравнений (3) при условии, что орбита КА является круговой, а управление постоянным. Кватернионное дифференциальное уравнение (3) эквивалентно четырем скалярным:

$$\frac{d\lambda_0}{dt} = -u\frac{r}{c}\lambda_1 - \frac{c}{r^2}\lambda_3, \qquad \frac{d\lambda_1}{dt} = u\frac{r}{c}\lambda_0 - \frac{c}{r^2}\lambda_2,$$
$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{c}{r^2}\lambda_1 - u\frac{r}{c}\lambda_3, \qquad \frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{c}{r^2}\lambda_0 - u\frac{r}{c}\lambda_2, \qquad u,\, r,\, c\, -\, \mathrm{const}. \tag{5}$$

Продифференцируем левые и правые части уравнений (5) по времени. Имеем:

$$\frac{d^2\lambda_0}{dt^2} = -u\frac{r}{c}\frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{c}{r^2}\frac{d\lambda_3}{dt}, \qquad \frac{d^2\lambda_1}{dt^2} = u\frac{r}{c}\frac{d\lambda_0}{dt} - \frac{c}{r^2}\frac{d\lambda_2}{dt},$$

$$\frac{d^2\lambda_2}{dt^2} = -\frac{c}{r^2}\frac{d\lambda_1}{dt} - u\frac{r}{c}\frac{d\lambda_3}{dt}, \qquad \frac{d^2\lambda_3}{dt^2} = \frac{c}{r^2}\frac{d\lambda_0}{dt} - u\frac{r}{c}\frac{d\lambda_2}{dt}.$$

Воспользовавшись теперь формулами (5) для первых производных по времени, получим

$$4\frac{d^2\lambda_i}{dt^2} = \left(-u^2\frac{r^2}{c^2} - \frac{c^2}{r^4}\right)\lambda_i = -\omega^2\lambda_i, \qquad i = \overline{0,3}.$$

Или в кватернионном виде

$$4\frac{d^2\boldsymbol{\lambda}}{dt^2} = -\omega^2\boldsymbol{\lambda}, \qquad \omega^2 = u^2\frac{r^2}{c^2} + \frac{c^2}{r^4}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения ориентации круговой орбиты КА приводятся к уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, частота колебаний которого равна $\omega/2$ и выражается через параметры орбиты r, c и управление u. Общее решение данной системы однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами известно. Оно имеет вид

$$\lambda_i = C_i^{(1)}\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) + C_i^{(2)}\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right), \qquad i = \overline{0,3}, \tag{6}$$

где $\omega = \sqrt{u^2\frac{r^2}{c^2} + \frac{c^2}{r^4}}$; $C_i^{(1)}$, $C_i^{(2)}$, $i = \overline{0,3}$ — постоянные интегрирования.

В кватернионной форме решение запишется следующим образом:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{C}^{(1)}\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \boldsymbol{C}^{(2)}\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right),$$

где $\boldsymbol{C}^{(j)} = C_0^{(j)} + C_1^{(j)}\boldsymbol{i}_1 + C_2^{(j)}\boldsymbol{i}_2 + C_3^{(j)}\boldsymbol{i}_3$, $j = 1, 2$ — кватернионные постоянные интегрирования.

Произвольные постоянные $C_i^{(1)}$ и $C_i^{(2)}$, $i = \overline{0,3}$ найдем, удовлетворяя начальным условиям

$$\boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^0, \qquad 2\left.\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt}\right|_{t=0} = \boldsymbol{\lambda}(0)\circ\boldsymbol{\omega}_\eta.$$

Учитывая, что $\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\omega}{2}\left[-C_i^{(1)}\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) + C_i^{(2)}\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right]$, $i = \overline{0,3}$, имеем:

$$\begin{gathered} C_0^{(2)} = \left(-u\frac{r}{c}\lambda_1^0 - \frac{c}{r^2}\lambda_3^0\right)/\omega, \qquad C_1^{(2)} = \left(u\frac{r}{c}\lambda_0^0 + \frac{c}{r^2}\lambda_2^0\right)/\omega, \\ C_2^{(2)} = \left(-\frac{c}{r^2}\lambda_1^0 - u\frac{r}{c}\lambda_3^0\right)/\omega, \qquad C_3^{(2)} = \left(\frac{c}{r^2}\lambda_0^0 - u\frac{r}{c}\lambda_2^0\right)/\omega, \qquad C_i^{(1)} = \lambda_i^0, \qquad i = \overline{0,3}. \end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, в скалярной форме решение кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат (3) дается в виде формул (6), а произвольные постоянные интегрирования находятся по формулам (7). Записав (6) в кватернионной форме, получим решение (4).

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КА

Для решения уравнений (1) удобно перейти к новой независимой переменной — истинной аномалии, тогда в скалярной форме кватернионное уравнение ориентации орбиты запишется так:

$$\begin{aligned} &2\frac{d\Lambda_0}{d\varphi} = N(-\Lambda_1\cos\varphi - \Lambda_2\sin\varphi), \\ &2\frac{d\Lambda_1}{d\varphi} = N(\Lambda_0\cos\varphi - \Lambda_3\sin\varphi), \\ &2\frac{d\Lambda_2}{d\varphi} = N(\Lambda_3\cos\varphi + \Lambda_0\sin\varphi), \\ &2\frac{d\Lambda_3}{d\varphi} = N(-\Lambda_2\cos\varphi + \Lambda_1\sin\varphi), \qquad N = \frac{ur^3}{c^2} > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) — система четырех линейных ОДУ первого порядка с переменными 2π-периодическими коэффициентами. Сведем ее к одному ОДУ с постоянными коэффициентами относительно переменной Λ_0. Для этого три раза продифференцируем первое уравнение системы (8). Имеем:

$$2\frac{d^2\Lambda_0}{d\varphi^2} = N\left(-\frac{N}{2}\Lambda_0 + \Lambda_1\sin\varphi - \Lambda_2\cos\varphi\right), \qquad 2\frac{d^3\Lambda_0}{d\varphi^3} = N\left(-\frac{4+N^2}{2N}\frac{d\Lambda_0}{d\varphi} - \frac{N}{2}\Lambda_3\right),$$
$$2\frac{d^4\Lambda_0}{d\varphi^4} = N\left(-\frac{4+N^2}{2N}\frac{d^2\Lambda_0}{d\varphi^2} - \frac{N}{2}\frac{d\Lambda_3}{d\varphi}\right). \tag{9}$$

Первые уравнения систем (8) и (9), рассмотренные совместно, являются системой линейных алгебраических уравнений второго порядка относительно переменных Λ_1 и Λ_2. Решив ее, получаем:

$$\Lambda_1 = -\frac{2}{N}\frac{d\Lambda_0}{d\varphi}\cos\varphi + \left(\frac{2}{N}\frac{d^2\Lambda_0}{d\varphi^2} + \frac{N}{2}\Lambda_0\right)\sin\varphi,$$
$$\Lambda_2 = -\left(\frac{2}{N}\frac{d^2\Lambda_0}{d\varphi^2} + \frac{N}{2}\Lambda_0\right)\cos\varphi - \frac{2}{N}\frac{d\Lambda_0}{d\varphi}\sin\varphi. \tag{10}$$

Из второго уравнения системы (9) следует, что

$$\Lambda_3 = -\frac{4}{N^2}\frac{d^3\Lambda_0}{d\varphi^3} - \frac{4+N^2}{N^2}\frac{d\Lambda_0}{d\varphi}. \tag{11}$$

Подставляя $d\Lambda_3/d\varphi$ из последнего уравнения системы (8) с учетом формул (10) в третье уравнение системы (9), получим искомое однородное ОДУ четвертого порядка с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$2\frac{d^4\Lambda_0}{d\varphi^4} + (2+N^2)\frac{d^2\Lambda_0}{d\varphi^2} + \frac{N^4}{8}\Lambda_0 = 0, \qquad N = u\frac{r^3}{c^2}. \tag{12}$$

Начальные условия для этого ОДУ с учетом формул для нахождения производных от Λ_0 запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Lambda_0\big|_{\varphi=\varphi_0} &= \Lambda_{00}^0,\\
\frac{d\Lambda_0}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0} &= \frac{N}{2}\left(-\Lambda_{10}^0\cos\varphi_0 - \Lambda_{20}^0\sin\varphi_0\right) = \Lambda_{00}^1,\\
\frac{d^2\Lambda_0}{d\varphi^2}\bigg|_{\varphi=\varphi_0} &= \frac{N}{2}\left(-\frac{N}{2}\Lambda_{00}^0 + \Lambda_{10}^0\sin\varphi_0 - \Lambda_{20}^0\cos\varphi_0\right) = \Lambda_{00}^2,\\
\frac{d^3\Lambda_0}{d\varphi^3}\bigg|_{\varphi=\varphi_0} &= \frac{N}{2}\left(\frac{4+N^2}{4}[\Lambda_{10}^0\cos\varphi_0 + \Lambda_{20}^0\sin\varphi_0] - \frac{N}{2}\Lambda_{30}^0\right) = \Lambda_{00}^3.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\Lambda_{j0}^0 = \Lambda_j|_{\varphi=\varphi_0}$, $j = \overline{0,3}$.

Решение ОДУ (12) ищем в виде $\Lambda_0 = e^{s\varphi}$, $s \in \mathbb{C}$ [6]. Характеристическое уравнение запишется так:

$$2s^4 + (2+N^2)s^2 + \frac{N^4}{8} = 0. \tag{14}$$

Для решения биквадратного алгебраического уравнения (14) сделаем замену $z = s^2$, $z \in \mathbb{C}$. Имеем

$$2z^2 + (2+N^2)z + \frac{N^4}{8} = 0. \tag{15}$$

Дискриминант уравнения (15) $D = 4 + 4N^2 > 0$. Так как $(2+N^2)^2 > D$, то уравнение (15) имеет два различных отрицательных действительных корня. Следовательно, корни характеристического уравнения (14) являются чисто мнимыми:

$$s_{1,2,3,4} = \left[\begin{array}{l}\pm is^+,\\ \pm is^-.\end{array}\right.$$

Здесь $s^+ = 0.5\sqrt{2+N^2+\sqrt{4+4N^2}}$, а $s^- = 0.5\sqrt{2+N^2-\sqrt{4+4N^2}}$.

Таким образом, общее решение однородного ОДУ (12) имеет вид

$$\Lambda_0 = C_1\cos[s^+(\varphi-\varphi_0)] + C_2\sin[s^+(\varphi-\varphi_0)] + C_3\cos[s^-(\varphi-\varphi_0)] + C_4\sin[s^-(\varphi-\varphi_0)]. \qquad (16)$$

Система четырех линейных алгебраических уравнений для нахождения произвольных постоянных C_i, $i=\overline{1,4}$, записанная с учетом начальных условий (13), имеет вид

$$C_1 + C_3 = \Lambda_{00}^0, \qquad s^+C_2 + s^-C_4 = \Lambda_{00}^1,$$

$$-(s^+)^2C_1 - (s^-)^2C_3 = \Lambda_{00}^2, \qquad -(s^+)^3C_2 - (s^-)^3C_4 = \Lambda_{00}^3,$$

Решая ее, находим, что

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Lambda_{00}^2 + (s^-)^2\Lambda_{00}^0}{(s^-)^2-(s^+)^2}, \qquad & C_2 &= \frac{(s^-)^2\Lambda_{00}^1 + \Lambda_{00}^3}{(s^-)^2s^+ - (s^+)^3}, \\ C_3 &= \frac{(s^+)^2\Lambda_{00}^0 + \Lambda_{00}^2}{(s^+)^2-(s^-)^2}, \qquad & C_4 &= \frac{\Lambda_{00}^3 + (s^+)^2\Lambda_{00}^1}{(s^+)^2s^- - (s^-)^3}. \end{aligned} \qquad (17)$$

Компоненты векторной части кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$ ориентации орбиты КА с учетом (10) и (11) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= A(s^+)B(s^+)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + A(s^-)B(s^-)\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_2 &= A(s^+)D(s^+)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + A(s^-)D(s^-)\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_3 &= A(s^+)F(s^+)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + A(s^-)F(s^-)\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (18)$$

где

$$A(s) = (\sin[s(\varphi-\varphi_0)]\cos[s(\varphi-\varphi_0)]), \qquad B(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{N}s\cos\varphi & \left(\frac{N}{2}-\frac{2}{N}s^2\right)\sin\varphi \\ \left(\frac{N}{2}-\frac{2}{N}s^2\right)\sin\varphi & \frac{2}{N}s\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$D(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{N}s\sin\varphi & \left(\frac{2}{N}s^2-\frac{N}{2}\right)\cos\varphi \\ \left(\frac{2}{N}s^2-\frac{N}{2}\right)\cos\varphi & -\frac{2}{N}s\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

$$F(s) = \begin{pmatrix} \frac{4+N^2}{N^2} - \frac{4}{N^2}s^2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{N^2}s^2 - \frac{4+N^2}{N^2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, рассмотрены две кватернионные модели задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА посредством постоянного реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты КА. Предложен новый метод нахождения аналитического решения (4) дифференциальных уравнений ориентации орбитальной системы координат. Полученные формулы (16)–(19) дают аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты КА.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 08-01-00310).

Библиографический список

1. *Челноков, Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле / Ю.Н. Челноков // Космич. исследования. 2001. Т. 39, № 5. С. 502–517; 2003. Т. 41, № 1. С. 92–107; 2003. Т. 41, № 5. С. 488–502.

2. *Ненахов, С.В.* Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией орбиты космическо-

го аппарата / С.В. Ненахов, Ю.Н. Челноков // Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления: сб. тр. междунар. конф. М.: МАИ, 1998. С. 59–60.
3. *Сергеев, Д.А.* Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата / Д.А. Сергеев, Ю.Н. Челноков // Проблемы точной механики и управления: сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов: Изд-во СГТУ, 2002. С. 64–75.
4. *Челноков, Ю.Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты / Ю.Н. Челноков // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.
5. *Челноков, Ю.Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости / Ю.Н. Челноков // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. 1977. № 3. С. 11–20.
6. *Понтрягин, Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М.: Наука, 1974. 331 с.

УДК 517.956.32

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

О.А. Репин[1], **С.А. Сайганова**[2]

[1]Самарский государственный экономический университет, кафедра математической статистики и эконометрики;
[2]Самарский государственный технический университет, кафедра прикладной математики и информатики
E-mail: matstat@mail.ru, syomina_sa@mail.ru

Для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана – Лиувилля исследована нелокальная задача, краевое условие которой содержит линейную комбинацию обобщенных операторов дробного интегродифференцирования. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, оператор, дробная производная, интегральное уравнение.

A Boundary-Value Problem with Shifted for a Mixed Type Equation with Fractional Derivative

O.A. Repin[1], **S.A. Sayganova**[2]

[1]Samara State Economic University, Chair of Mathematical Statistics;
[2]Samara State Technical University, Chair of Applied Mathematics and Informatics
E-mail: matstat@mail.ru, syomina_sa@mail.ru

A non-local problem for a mixed type equation with partial fractional derivative of Riemann – Liouville is studied, boundary condition of which contains linear combination of generalized operators of fractional integro-differentiation. Unique solvability of the problem is then proved.

Key words: boundary-value problem, operator, fractional derivative, integral equation.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases}u_{xx}-D^{\alpha}_{0+,\,y}u, & y>0,\\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy}, & y<0, \quad m>0,\end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,\,y}$ — частная дробная производная Римана – Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$, от функции $u(x,\,y)$ по второй переменной [1, с. 341]

$$\left(D^{\alpha}_{0+,\,y}u\right)(x,\,y)=\frac{d}{dy}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y\frac{u(x,\,t)}{(y-t)^{\alpha}}\,dt \qquad (0<\alpha<1,\ y>0).$$

Настоящая работа является продолжением исследований [2, 3] для уравнения (1). Это уравнение рассматривается в области D, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $D^+=\{(x,\,y):\ -\infty<x<\infty,\ y>0\}$ и области D^-, лежащей в нижней полуплоскости ($y<0$) и ограниченной характеристиками

$$AC:\ \ \xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0, \qquad BC:\ \ \eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

уравнения (1), а также отрезком $[0,\,1]$ прямой $y=0$. Обозначим через $I=(0,\,1)$ единичный интервал прямой $y=0$, а через $\theta_0(x)=\frac{x}{2}-i\left(\frac{m+2}{2}x\right)^{\frac{2}{m+2}}$ — точку пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,\,0)\in I$, с характеристикой AC.

