УДК 519.853.2:629.5.01.001.26

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.М. Пашин

ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова
E-mail: pashin@krylov.spb.ru

Проектирование сложных технических систем (корабль, летательный аппарат, производственный комплекс и др.), как правило, является многоуровневым процессом с разделением объекта проектирования на отдельные подсистемы. При этом поиск наилучших решений по отдельным подсистемам должен отвечать требованиям оптимальности объекта проектирования в целом. Это условие предлагается выполнять с помощью локальных критериев, построенных с использованием двойственных оценок (множителей Лагранжа) теории двойственности в нелинейном математическом программировании. Рассматриваются практические задачи использования подобных критериев.

Duality Theory and Optimization of Sophisticated Engineering Systems

V.M. Pashin

The design of sophisticated engineering systems (like the ship, airborne vehicle, production complex, etc.) is usually a multilevel process when the object under design is split up into separate sub-systems. At the same time, the quest for the best solutions for separate sub-systems should comply with requirements for optimality of the designed object as a whole. It is suggested to meet this condition with the help of local criteria developed using dual assessments (Lagrangian coefficients) of the duality theory in the non-linear mathematic programming. Application of the said criteria for the practical tasks has been reviewed.

1. СИСТЕМНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ. СУЩЕСТВО ПРОБЛЕМЫ

Корабль, судно, самолёт, ракета и т.п. являются примерами сложных технических систем. Подобные системы состоят из ряда таких подсистем, как корпус (планер), энергетическая установка, рулевой комплекс, радионавигационное оборудование и пр. Важнейшим принципом системного проектирования является согласованное проектирование всех подсистем с подчинением единой цели — достижению наивысшей эффективности проектируемого объекта. При этом должны быть выполнены все требования к качествам создаваемого образца техники.

В терминах математического программирования такая задача состоит в отыскании векторов (X^0, X_k^0), доставляющих минимум (максимум) функции $f(X, X_k)$ при ограничениях $g_i(X, X_k) \geq 0, \quad i \in I, h_j(X, X_k) = 0, \quad j \in J$ — это задача А.

В качестве функции критерия $f(X, X_k)$может выступать, например, стоимость жизненного цикла образца техники (случай минимизации), либо объём выполняемой им работы (случай максимизации). Функции ограничений отражают требования к различным качествам проектируемого образца. Для судна, например, это условия обеспечения заданной грузовместимости, скорости хода, требования к остойчивости, удифферентовке, непотопляемости и др. Важнейшим является условие равновесного плавания (закон Архимеда) — случай строгого равенства $h_j(X, X_k) = 0$.

Соблюдая принцип системного проектирования, мы обеспечиваем оптимальность проектируемого объекта. Этот принцип можно было бы реализовать строго и в полном объёме, сведя системное проектирование к обозначенной математически сформулированной задаче оптимизации. По целому ряду причин прямое решение такой задачи не реально ни сегодня, ни в отдалённом будущем. Не случайно практика проектирования реализуется в виде последовательных приближений с нарастающей детализацией (аванпроект, эскизный, технический и т.д.) при распараллеливании разработки (проектирование подсистем). Сложился стереотип, согласно которому проектирование сводится к решению задач верхнего и нижнего уровней (ВУ и НУ). ВУ — это определение основных характеристик проектируемого объекта в первом приближении, когда ещё не наработана информация по подсистемам. НУ — это детальная разработка подсистем в рамках тех основных характеристик, которые приняты на ВУ. В свою очередь, проектирование на НУ также является многоуровневым.

Проблема возникает вследствие того, что задачи ВУ и НУ решаются разными подразделениями проектной организации. ВУ — это прерогатива главного конструктора и его группы. НУ — это предмет разработок специализированных по подсистемам отделов проектной организации. Процесс взаимодействия ВУ и НУ осуществляется в несколько приближений до получения сбалансированного проекта. При этом согласование проектных решений ВУ и НУ есть важнейшая функция главного конструктора, успешность выполнения которой при отсутствии формализованной методологии зависит исключительно от его квалификации и опыта.

Таким образом, на практике проектирование осуществляется на основе декомпозиции сложной системы. В теории больших систем проблема декомпозиции и координации сводится к трём самостоятельным проблемам:

– формирование подзадач ВУ и НУ;
– выбор принципа координации и разработка метода определения координирующих воздействий;
– организация самой процедуры координации.

Формирование подзадач предопределено структурой сложной системы и сложившейся практикой проектирования.

ВУ: определить вектор $X = X^0$ такой, что

$$f(X, \overline{X}_k) \to \min(\max), \tag{1}$$

$$g_i(X, \overline{X}_k) \geq 0, \quad \forall\, i \in I, \tag{2}$$

$$h_j\left(X, \overline{X_k}\right) = 0, \quad \forall\, j \in J. \tag{3}$$

Соответственно НУ: определение $X_k = X_k^0$ при условии

$$\varphi_k\left(X^0, X_k\right) \to \min(\max), \tag{4}$$

$$g_{ki}\left(X^0, X_k\right) \geqslant 0, \quad \forall\, i \in I, k \in K, \tag{5}$$

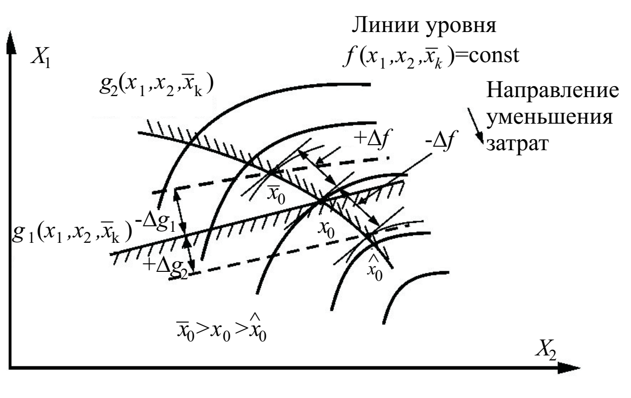
$$h_{kj}\left(X^0, X_k\right) = 0, \forall j \in J, k \in K. \tag{6}$$

При решении задачи (1)–(3) подробные значения X_k неизвестны. Однако косвенно они присутствуют в тех приближённых зависимостях $f(X, X_k)$, $g_i(X, X_k)$,$h_j(X, X_k)$,которые используются группой главного конструктора на ВУ. Это условно означает $X_k = \overline{X}_k$, хотя конкретные значения ещё не определены.

При решении задач НУ (4)–(6) обязательным условием является использование уже принятых значений $X_0 = X_{opt}$ в задаче (1)–(3). Для дальнейшего несущественно, каким методом решаются указанные задачи — с помощью математико-вычислительных средств либо традиционными переборами вариантов.

Выбор принципа координации задач требует дополнительного обоснования. Задачи НУ должны давать согласованные и непротиворечивые решения по отношению к задаче (1)–(3). Непротиворечивость понимается в том смысле, что оптимальные в K-задачах векторы X_k^0 улучшают глобальный критерий (1), т. е. повышают эффективность системы. Это условие однозначно предопределяет использование одинаковых показателей эффективности на ВУ и НУ (например, стоимости).

Согласованность решений означает, что векторы X_k^0 «не выводят» основные характеристики X^0 из допустимой области (2), (3), т. е. требования к качествам объекта остаются выполненными после завершения проектирования подсистем. Строгое выполнение этого условия при реально существующем процессе проектирования чрезвычайно затруднено. Следовательно, нужны дополнительные координирующие условия (воздействия). Принципу оптимальности объекта в целом соответствовали бы воздействия, «штрафующие» принятие X_k^0 выводящих X_0 из допустимой области (2), (3) и «поощряющие» вход в эту область. На рисунке дана простая геометрическая интерпретация влияния области допустимых решений на эффективность объекта. Здесь величины $\Delta f\,(\pm)$ и есть «плата» за принятие тех или иных значений X_k^0.



Эта плата должна учитываться при проектировании подсистем на НУ. Таким образом, критерии оптимизации на НУ должны состоять из двух частей:

$$\varphi_k\left(X^0, X_k\right) = f_k\left(X^0, X_k\right) \pm \Delta f_k\left(X^0, X_k \neq \overline{X}_k\right). \qquad (7)$$

Первый член — условие непротиворечивости. Если критерий (1) — стоимость жизненного цикла объекта, то f_k — соответственно стоимость k-подсистемы.

Второй член — условие согласованности. Это соответственно «штраф» или «поощрение» при воздействии подсистемы на допустимую область (2), (3).

2. О ПРИНЦИПЕ КООРДИНАЦИИ

Всё предыдущее достаточно очевидно. Главный вопрос — объективный расчёт штрафа (поощрения) Δf_k в (7).

Обратимся к теории двойственности в нелинейном математическом программировании.

Возьмём функцию Лагранжа в виде

$$L\left(X, Y, Z\right) = f\left(X\right) - \sum_{i \in I} y_i g_i\left(X\right) + \sum_{j \in J} z_j h_j\left(X\right),$$

где $Y = \{y_i\}$, $Z = \{z_j\}$ — множители Лагранжа.

Напомним экономический смысл и условия существования множителей Лагранжа.

Если в исходной задаче А $\quad f^0 = \min\limits_{x \in R} f\left(X\right)$, где $R = \{X :\ g_i\left(X\right) \geqslant 0,\ h_j\left(X\right) = 0\}$, то в двойственной задаче $\hat{f}^0 = \max\limits_{Y, Z \in \hat{R}} \hat{L}\left(Y, Z\right)$, причём $\hat{L}\left(Y, Z\right) = \min\limits_{X \in R} L\left(X, Y, Z\right)$, где $\hat{R}$ — область изменения векторов Y, Z, соответствующая условию

$$\min_{x \in R} \left\{ f\left(X\right) - \sum_{i \in I} y_i g_i\left(X\right) + \sum_{j \in J} z_j h_j\left(X\right) \right\}.$$

Согласно [1] имеет место обобщённое соотношение двойственности $f^0 = \hat{f}^0$, справедливое без каких-либо существенных предположений относительно свойств функции f и области R в отношении вогнутости и выпуклости. Это соотношение даёт возможность смысловой интерпретации множителей Y, Z в функции Лагранжа. Поскольку в точке оптимума $f(X^0) = L(X^0, Y^0, Z^0)$, то Y^0, Z^0 есть коэффициенты, приводящие к одной размерности критерий $f(X)$ и функции ограничений $g_i(X), h_j(X)$. Так, если мы за критерий примем стоимость судна, самолёта, а $g_i(X)$, $h_j(X)$ — функции массы (веса), полезной кубатуры, параметров остойчивости (для судна — это метацентрическая высота), то Y^0, Z^0 соответственно показывают стоимость массы (руб/т), кубатуры (руб/м^3), метацентрической высоты (руб/м) и т. п.

Таким образом, $Y = \{y_i\}$, $Z = \{z_j\}$ — «цены» ограничений в задаче ВУ. Подобное толкование множителей Лагранжа, называемых также двойственными переменными, распространено в экономико-математической литературе. Академиком Л.В. Канторовичем указано условие существования двойственных переменных для случая линейной задачи А, которые названы им объективно обусловленными оценками.

Рассмотрим условия существования двойственных переменных в нелинейном случае задачи типа А. Обратиться к этому необходимо потому, что используемые положения теории двойственности чаще всего считаются применимыми лишь для отдельных классов задач со специальными свойствами функций критерия и ограничений. В общем случае в такой задаче возможно существование нескольких локальных минимумов. Только в случае выпуклости $f(X)$ и вогнутости $g_i(X), h_j(X)$ локальный минимум является глобальным. Это так называемая задача выпуклого программирования. Наличие указанных свойств функций критерия и ограничений неочевидно, а их доказательство невозможно. То есть, строго говоря, решение задачи типа А гарантирует получение только локального оптимума. Однако необходимые и достаточные условия обобщённых соотношений двойственности доказаны [1] без использования специфических свойств указанных функций. А именно эти условия непосредственно связаны с существованием двойственных переменных. Согласно [2] необходимые условия первого порядка формулируются следующим образом.

Если в точке X^0 функции f, g_i, h_j дифференцируемы и ограничения $g_i(X) \geqslant 0$, $h_j(X) = 0$ удовлетворяют условиям регулярности первого порядка, то существуют такие векторы Y^0, Z^0, что X^0, Y^0, Z^0 удовлетворяют следующим условиям:

$$g_i(X) \geqslant 0, \quad i \in I,$$

$$h_j(X) = 0, \quad j \in J,$$

$$y_i g_i(X) = 0, \quad i \in I, \tag{8}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i \in I, \tag{9}$$

$$\nabla L\,(X, Y, Z) = 0,$$

где $\nabla L = \nabla f - \sum\limits_{i \in I} y_i g_i + \sum\limits_{j \in J} z_j h_j$ — градиент функции Лагранжа.

Условие регулярности первого порядка заключается в том, что градиенты ∇g_i, ∇h_j должны быть линейно независимыми.

Вытекающие из общих условий существования множителей Лагранжа условия строгой дополняющей нежёсткости (8), (9) указывают на значимость (существенность) лимитирующих и нелимитирующих ограничений. Действительно, для лимитирующих ограничений $(g_i = 0)$ $\;y_i^0 > 0$, для нелимитирующих $(g_i > 0)$ $\;y_i^0 = 0$, причём последние не влияют на положение оптимума X^0.

Для ограничений в виде строгих равенств $h_j = 0$ всегда существуют ненулевые оценки z_j^0.

Теперь обратимся к вопросу расчёта Δf_k — величины штрафа (поощрения) в критерии задач НУ (7). Для этой цели воспользуемся результатом теоремы возмущения оптимума [2], полученным из задачи

$$f(X) + \varepsilon_0 a_0(X) \to \min,$$

$$g_i(X) + \varepsilon_i b_i(X) \geqslant 0, \quad i \in I,$$

$$h_j(X) + \varepsilon_j c_j(X) = 0, \quad j \in J,$$

где $a_0(X)$, $b_i(X)$, $c_j(X)$ — скалярные функции, ε_0, ε_i, ε_j — малые числа.

Доказывается [2], что изменение оптимального значения функции критерия

$$f\left[X\left(\varepsilon\right)\right] - f\left(X^0\right) = -\sum_{i \in I} \varepsilon_i y_i^0 b_i^0 + \sum_{j \in J} \varepsilon_j z_j^0 c_j^0. \tag{10}$$

Здесь $\varepsilon_i b_i^0 \equiv \Delta g_i\left(X\right)$, $\varepsilon_j c_j^0 \equiv \Delta h_j\left(X\right)$, отклонения ограничений в окрестности оптимума.

Именно условие (10) является основой для расчёта штрафа (поощрения) Δf_k в критерии задач НУ (7).

Теорема возмущения оптимума даёт, кроме того, другой важный теоретический результат, позволяющий аппроксимировать приращения векторов

$$(X(\varepsilon) - X^0), \qquad (Y(\varepsilon) - Y^0), \qquad (Z(\varepsilon) - Z^0),$$

т. е. указать степень устойчивости оптимального решения при изменении положения границ области допустимых решений. Это возможно, однако при выполнении достаточных условий второго порядка, что связано с вычислением вторых производных функции Лагранжа в точке оптимума. В реальных задачах (1)–(3) это непросто. Приближённое решение можно получить путём линеаризации (1)–(3) в окрестности оптимума.

3. ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАННОГО ПРИНЦИПА (на примере проектирования судов)

Итак, полагая известными «цены» ограничений (Y, Z) в единицах критерия задачи (1)–(3) и используя условие (10), можно конструировать критерии для задач НУ. Примем за показатель эффективности проектируемого объекта величину стоимости жизненного цикла объекта, привязанную к одному году. Тогда для любой подсистемы НУ критерий задачи (4)–(6) будет иметь вид

$$\varphi_k\left(X^0, X_k\right) = f_k\left(X^0, X_k\right) - \sum_{i \in I} y_i^0 \Delta g_i\left(X_k \neq \overline{X}_k\right) + \sum_{j \in J} z_i^0 \Delta h_j\left(X_k \neq \overline{X}_k\right). \tag{7a}$$

Величина φ_k — это стоимость k-подсистемы, откорректированная на величину изменения стоимости объекта, вызванную принятием в данной подсистеме $(X_k \neq \overline{X}_k)$.

Рассмотрим несколько примеров использования критерия (7а) для выбора наилучших решений на НУ.

Первый пример. Рассмотрим вопрос о выборе марки стали для металлического корпуса сухогрузного судна грузоподъёмностью 10 тыс. т и мощностью дизельной энергетической установки 7 тыс. кВт.

Опуская подробности формирования математической модели задачи ВУ (1)–(3) и конструирования критерия (7а) для подсистемы металлический корпус $(K = K1)$, примем исходные данные согласно [3]. Так, на ВУ при определении оптимальных элементов судна получены следующие оценки лимитирующих ограничений:

y_1^0 — «цена» вместимости W_{k1}, руб/м^3 — 18.2,
y_2^0 — «цена» возвышения ц.т. Z_g^{k1}, руб/см — 1216,
y_3^0 — «цена» длины судна L, руб/м — 4330,
z_1^0 — «цена» массы P_{k1}, руб/т — 37.9.

Соответственно

$$\varphi_{k1}(X^0, X_{k1}) = f_{k1}(X_{k1}) + 18.2\Delta W_{k1}(X_{k1} \neq \overline{X}_{k1}) + 1216\Delta Z_g^{k1}(X_{k1} \neq \overline{X}_{k1}) + 37,9\Delta P_{k1}(X_{k1} \neq \overline{X}_{k1}),$$

где f_{k1} — приведённая стоимость металлического корпуса.

Предположим перед корпусным отделом проектной организации стоит задача выбора марки стали из трёх возможных вариантов: с пределом текучести 300, 360 и 400 н/мм^2 (табл. 1). При определении элементов судна на ВУ использована сталь 300 н/мм^2.

Таблица 1

Результаты расчётов

Параметр	Варианты		
	300 н/мм^2	360 н/мм^2	400 н/мм^2
Масса металлического корпуса, т	4330	4010	3930
ΔP_{k1}, т	–	-320	-400
ΔW_{k1}, м^3	–	305	-430
ΔZ_g^{k1}, см	–	+4,18	+4,67
Приведённая стоимость металлического корпуса, тыс. руб.	517,8	538,4	609,9
Влияние изменения кубатуры, тыс. руб.	–	5,55	-7.83
Влияние изменения положения ц.т., тыс. руб.	–	5,07	-5.66
Влияние изменения массы, тыс. руб.	–	12,3	-15.2
Интегральная стоимость подсистемы φ_{k1}, тыс. руб.	517,8	515,5	581,1

Аналогичный пример с выбором типа энергетической установки (К = К2).

При тех же исходных данных

$$\varphi_{k2}(X^0, X_{k2}) = f_{k2}(X_{k2}) + 18.2\Delta W_{k2}(X_{k2} \neq \overline{X}_{k2}) + 1216\Delta Z_g^{k2}(X_{k2} \neq \overline{X}_{k2}) + 37.9\Delta P_{k2}(X_{k2} \neq \overline{X}_{k2})+$$
$$+4330\Delta L(X_{k2} \neq \overline{X}_{k2})$$

Нужно выбрать тип энергетической установки: с малооборотным дизелем (МОД) либо со среднеоборотным (СОД) (табл. 2).

Таблица 2

Исходные данные

Параметр	Вариант с МОД	Вариант с СОД
Мощность главных двигателей, кВт	7900	2×4000
Масса ЭУ, т	750	450
Длина машинного отделения, м	26	21
Объём машинного отделения, м^3	6800	5490
Удельный расход топлива, %	100	100–115
Стоимость 1т топлива, %	100	120–170

Вариант с СОД имеет лучшие массогабаритные характеристики, но при бóльшем расходе топлива и при бóльшей его стоимости (табл. 3).

Таблица 3

Результаты расчётов

Параметр	Вариант с МОД	Вариант с СОД
ΔW_{k1}, м^3	—	1310
ΔZ_g^{k2}, см	–	5
ΔL, м	—	-5
Приведённая стоимость энергетической установки, тыс. руб.	816	857
Влияние изменения кубатуры, тыс. руб.	–	-23.8
Влияние изменения положения ц.т., тыс. руб.	–	$+5.8$
Влияние изменения длины, тыс. руб.	–	-21.6
Влияние изменения массы, тыс. руб.	–	-11.4
Интегральная стоимость подсистемы φ_{k2}, тыс. руб.	816	806

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Согласованная оптимизация технических решений на разных уровнях реального многоуровневого процесса проектирования должна предусматривать использование на нижних уровнях специальных критериев (7а), учитывающих эффективность собственно проектируемой подсистемы и её влияние на эффективность системы в целом.

2. Определение второй составляющей критерия (7а) базируется на использовании «цен» ограничений — управляющих воздействий, получаемых на верхнем уровне. Рассчитывать на получение упомянутых «цен» как результат решения задачи нелинейного программирования по целому ряду причин не приходится. Поэтому предлагается определять «цены» ограничений одним из двух приближённых способов:

– численным методом как отношение приращения критерия эффективности системы к малому приращению ограничений;

– на основе решения линейно-программной задачи с точкой линеаризации принятых на верхнем уровне основных характеристик системы.

3. Решение упомянутой линейно-программной задачи даёт возможность определить диапазон «цен» ограничений в смысле тех приращений ограничений, при которых эти «цены» остаются ненулевыми. При этом надо иметь в виду, что контроль диапазона устойчивости в рамках отдельно взятой подсистемы может быть осуществлён только приближённо, что является неизбежным следствием декомпозиции системы. Некоторые формальные правила, информирующие проектанта о наиболее рациональном управлении этим диапазоном, разработаны. Вместе с тем можно утверждать, что при проектировании сложных объектов типа судов, самолётов такой вопрос не является существенным, прежде всего, вследствие оперативного обмена информацией между верхним и нижним уровнями проектирования.

Библиографический список

1. *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и её приложения. М.: Наука, 1971. С. 57–72.
2. *Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. С.52–56.
3. Машиностроение: Энциклопедия / Под ред. акад. РАН К.В. Фролова. СПб.: Политехника, 2003. С. 72–90.

УДК 539.3

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БАЛОК, ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

П.Е. Товстик

Санкт-Петербургский университет,
кафедра теоретической и прикладной механики
E-mail: peter.tovstik@mail.ru

Для задач статики, свободных колебаний и устойчивости балок, пластин и оболочек модель Тимошенко – Рейсснера, учитывающая сдвиг, сравнивается с классической моделью Кирхгофа – Лява и с трехмерной теорией упругости. На ряде тестовых примеров установлен формальный асимптотический характер одномерных и двухмерных моделей и найдена область их применимости. Для пластин и оболочек, лежащих на трансверсально изотропном упругом основании обсуждаются модели Кирхгофа – Лява и Тимошенко – Рейсснера. Используется асимптотический метод интегрирования, основанный на малости толщины оболочки по сравнению с длиной волны на поверхности. Особое внимание обращается на построение форм колебаний и потери устойчивости, локализованных вблизи свободной поверхности.

On the Non-Classic Models of Beams, Plates and Shells

P.E. Tovstik

For the problems of statics, of free vibrations, and of buckling of beams, plates and shells the Timoshenko – Reissner's model with shear is compared with the classic Kirchhoff – Love model and with the 3D theory of elasticity. By using some test examples the formal asymptotic character of 1D and 2D models is established and their field of application is found. The asymptotic expansions based on the small shell or plate thickness compared with the length of wave are used. The special attention is paid to the buckling or vibration modes localized near the free surface.

ВВЕДЕНИЕ

Выводу одномерных и двухмерных приближенных моделей из трехмерных уравнений теории упругости посвящены многочисленные исследования, из которых назовем монографии [1–4]. Ниже для задач статики, свободных колебаний и устойчивости балок, пластин и оболочек обсуждается модель Тимошенко – Рейсснера (ТР), учитывающая сдвиг, в сравнении с классической моделью Кирхгофа – Лява (КЛ) и с трехмерной теорией упругости. На ряде тестовых примеров установлен асимптотический характер одномерных и двухмерных моделей и найдена область их применимости. Также обсуждаются модели КЛ и ТР для пластин и оболочек, лежащих на упругом основании. Как пластина, так и основание предполагаются изготовленными из трансверсально изотропного материала. При анализе используется локальный подход, при котором решение разыскивается в виде двояко периодической функции по поверхностным координатам, а граничные условия на контуре игнорируются (либо пластина считается бесконечной). Используется асимптотический метод интегрирования, основанный на малости толщины оболочки по сравнению с длиной волны на поверхности. Особое внимание обращается на построение форм колебаний и потери устойчивости, локализованных вблизи свободной поверхности трансверсально изотропного предварительно непряженного полупространства или лежащей на нем пластины.

1. ДЕФОРМАЦИЯ И СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрим сначала плоскую задачу о деформации полосы $-\infty < x < \infty$, $-h/2 \le z \le h/2$ под действием гармонической нагрузки, приложенной к верхнему краю. Уравнения равновесия и соотношения упругости имеют вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_3}{\partial z}=0;\\&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E_1}(\sigma_1-\nu_1\sigma_3),\qquad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\tau}{G_{13}},\qquad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{E_3}(\sigma_3-\nu_3\sigma_1),\end{aligned}\tag{1.1}$$