МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СМЕШАННЫХ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА НА КЛАССАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

С.Я. Пирметова

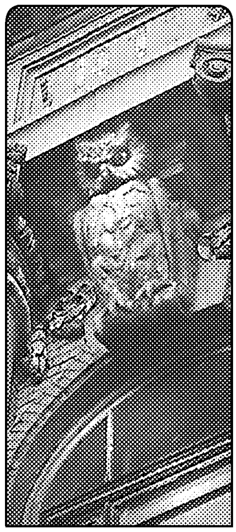
Дагестанский государственный педагогический университет,
кафедра прикладной математики
E-mail: Saida-pirmetova@mail.ru

Рассмотрены аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лагерра на классах гладких функций, заданных на полуоси $[0, \infty)$. Для оценки отклонения гладкой функции от ее частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лагерра получено неравенство, аналогичное неравенству Лебега для тригонометрических сумм Фурье. Получены оценки для соответствующей функции типа функции Лебега частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лагерра.

Approximative Properties of Mixed Series by Lagerre's Polynomials on Classes of Smooth Functions

S.Ya. Pirmetova

Approximative properties of mixed series by Lagerre's polynomials on classes of smooth functions that given on axle $[0, \infty)$ are viewed. Inequality that corresponds to Lebesgue inequality for trigonometric Fourier sums was found for evaluation of deflection of smooth function from it's partial sums of mixed series by Lagerre's polynomials. Evaluations for corresponding Lebesgue function of partial sums of mixed series by Lagerre's polynomials were found.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств смешанных рядов по полиномам Лагерра на классах гладких функций, заданных на полуоси $[0, \infty)$. Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам были введены и исследованы в работах И.И. Шарапудинова. Основные операторные свойства смешанных рядов по ортогональным полиномам, включая смешанные ряды по полиномам Лагерра, подробно рассмотрены в монографии [1] и работах [2],[3]. В [1] рассмотрены также аппроксимативные свойства смешанных рядов Лагерра на классах $W^r_{\mathcal{L}_{p,\rho}}(0, \infty)$ (см. ниже теорему 2.1). Однако оставалась не исследованной задача об аппоксимативных свойствах смешанных рядов по полиномам Лагерра на классах $W^r(0, \infty) = W^r$, состоящих из непрерывно-дифференцируемых функций, заданных на $[0, \infty)$. В данной работе предпринята попытка восполнить этот пробел.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЛАГЕРРА

В настоящей работе для удобства ссылок мы рассмотрим ряд свойств полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ и определим их с помощью формулы Родрига

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}), \tag{1.1}$$

где α – произвольное действительное число. Если $\alpha > -1$, то полиномы Лагерра образуют ортогональную систему на $[0, \infty)$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, точнее:

$$\int_0^\infty \rho(x) L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \delta_{nm} h_n^\alpha, \tag{1.2}$$

где

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1). \tag{1.3}$$

Следующие свойства полиномов Лагерра хорошо известны [4]:
производная

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \tag{1.4}$$

рекуррентная формула

$$n L_n^\alpha(x) = (-x + 2n + \alpha - 1) L_{n-1}^\alpha(x) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^\alpha(x), \tag{1.5}$$

где $L_{-1}^\alpha(x) = 0$, $L_0^\alpha(x) = 1$, $L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1$, $(n = 1, 2, ...)$ и (как следствие),

формула Кристоффеля – Дарбу

$$\Gamma(\alpha+1) \mathcal{K}_n^\alpha(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \binom{\nu+\alpha}{\nu} \right\}^{-1} L_\nu^\alpha(x) L_\nu^\alpha(y) =$$

$$= (n+1) \left\{ \binom{n+\alpha}{n} \right\}^{-1} \frac{L_n^\alpha(x) L_{n+1}^\alpha(y) - L_n^\alpha(y) L_{n+1}^\alpha(x)}{x - y}, \tag{1.6}$$

равенство

$$L_k^{-l}(x) = \frac{(-x)^l}{k^{[l]}} L_{k-l}^l(x), \tag{1.7}$$

где $k^{[l]} = k(k-1)...(k-l+1)$, $l = 0, 1, 2, ...$

В работах [5–7] установлена оценка $(s = 4n + 2\alpha + 2)$:

$$|L_n^\alpha(x)| \le c(\alpha) A_n^\alpha(x) \qquad (0 \le x < \infty), \tag{1.8}$$

где

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} e^{x/2} s^\alpha, & \text{если } 0 \le x \le 1/s, \\ e^{x/2} s^{\alpha/2 - 1/4} x^{-\alpha/2 - 1/4}, & \text{если } 1/s < x \le s/2, \\ e^{x/2} \left[s \left(s^{1/3} + |x - s| \right) \right]^{-1/4}, & \text{если } s/2 < x \le 3s/2, \\ e^{x/4}, & \text{если } 3s/2 < x. \end{cases} \tag{1.9}$$

Для нормированных многочленов Лагерра $\hat{L}_n^\alpha(x) = (h_n^\alpha)^{-1/2} L_n^\alpha(x)$ имеет место оценка (полагаем здесь $s = 4n + 2\alpha + 2$ [5–7]):

$$e^{-\frac{x}{2}} \left| \hat{L}_{n+1}^\alpha(x) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(x) \right| \le c(\alpha) \begin{cases} s^{\alpha/2 - 1}, & \text{если } 0 \le x \le 1/s, \\ s^{-3/4} x^{-\alpha/2 + 1/4}, & \text{если } 1/s < x \le s/2, \\ x^{-\alpha/2} s^{-3/4} \left(s^{1/3} + |x - s| \right)^{1/4}, & \text{если } s/2 < x \le 3s/2, \\ e^{-x/4}, & \text{если } 3s/2 < x. \end{cases} \tag{1.10}$$

Заметим, что

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \hat{L}_k^\alpha(x) \hat{L}_k^\alpha(y), \tag{1.11}$$

поэтому в силу формул Кристоффеля – Дарбу мы можем записать

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x, y) = \frac{\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{y - x} \left[\hat{L}_{n+1}^\alpha(x) \hat{L}_n^\alpha(y) - \hat{L}_{n+1}^\alpha(y) \hat{L}_n^\alpha(x) \right].$$

Полагая здесь $\alpha_n = \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$, имеем

$$\frac{1}{\alpha_n}\mathcal{K}_n^\alpha(x,y) = \frac{1}{y-x}\left[\hat{L}_{n+1}^\alpha(x)\hat{L}_n^\alpha(y) - \hat{L}_{n+1}^\alpha(y)\hat{L}_n^\alpha(x)\right], \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{\alpha_{n-1}}\mathcal{K}_n^\alpha(x,y) = \frac{1}{\alpha_{n-1}}\hat{L}_n^\alpha(x)\hat{L}_n^\alpha(y) + \frac{1}{y-x}\left[\hat{L}_n^\alpha(x)\hat{L}_{n-1}^\alpha(y) - \hat{L}_n^\alpha(y)\hat{L}_{n-1}^\alpha(x)\right], \tag{1.13}$$

Складывая правые и левые части равенств (1.12) и (1.13), имеем

$$\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)\mathcal{K}_n^\alpha(x,y) = \frac{1}{\alpha_{n-1}}\hat{L}_n^\alpha(x)\hat{L}_n^\alpha(y) +$$

$$+\frac{1}{y-x}\left[\hat{L}_n^\alpha(y)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(x) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(x)\right) - \hat{L}_n^\alpha(x)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(y) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(y)\right)\right],$$

стало быть

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x,y) = A_n\hat{L}_n^\alpha(x)\hat{L}_n^\alpha(y) + \frac{B_n}{y-x}\left[\hat{L}_n^\alpha(y)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(x) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(x)\right) - \hat{L}_n^\alpha(x)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(y) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(y)\right)\right], \tag{1.14}$$

где

$$A_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} < 1, \quad B_n = \frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} \le n + |\alpha| + 1.$$

2. СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА $L_n^0(x)$

Пусть α удовлетворяет условию $\alpha > -1$, $\mathcal{L}_{p,\rho}$– пространство измеримых функций $f(x)$, заданных на полуоси $[0,\infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\rho}} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\rho(x)dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Через $W^r_{\mathcal{L}_{p,\rho}}(0,\infty)$ $(p>1)$ обозначим подкласс функций $f=f(x)$ из $\mathcal{L}_{p,\rho}$, непрерывно дифференцируемых $(r-1)$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b]\subset[0,\infty)$, а $f^{(r)}\in\mathcal{L}_{p,\rho}$.

Рассмотрим следующее равенство:

$$f(x) = E_{r-1}^\alpha(f,x) + J_r^\alpha(f,x), \tag{2.1}$$

где

$$E_{r-1}^\alpha(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\left[f^{(\nu)}(0) - \frac{(-1)^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)}\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}f_{r,k}^\alpha\right]\frac{x^\nu}{\nu!}, \tag{2.2}$$

$$J_r^\alpha(f,x) = (-1)^r\sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x), \tag{2.3}$$

$f_{r,k}^\alpha = \dfrac{1}{h_k^\alpha}\displaystyle\int_0^\infty \rho(t)f^{(r)}(t)L_k^\alpha(t)dt$ — коэффициенты Фурье – Лагерра функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Лагерра.

Ряд $J_r^\alpha(f,x)$ будем называть *смешанным* рядом по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$, этим же термином мы обозначим правую часть равенства (2.1). В работах [1–3] также были рассмотрены достаточные условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие сходимость смешанных рядов и справедливость равенства (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть* $-1<\alpha<1$, $r\ge1$, $A>0$, $f\in W^r_{\mathcal{L}_{2,\rho}}$. *Тогда смешанный ряд* (2.3) *сходится равномерно относительно* $x\in[0,A]$, *и для произвольного* $x\in[0,\infty)$ *имеет место равенство* (2.1).

Смешанные ряды по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$ принимают особенно простой вид в случае $\alpha = 0$. В этом случае равенства (2.2) и (2.3) принимают следующий вид:

$$E_{r-1}^0(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!}, \tag{2.4}$$

$$J_r^0(f,x) = (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 L_{k+r}^{-r}(x), \tag{2.5}$$

$$f(x) = E_{r-1}^0(f,x) + J_r^0(f,x). \tag{2.6}$$

Если мы теперь воспользуемся равенством (1.7), то можем заметить, что

$$L_{k+r}^{-r}(x) = (-x)^r L_k^r(x)/(k+1)_r,$$

поэтому, подставляя это значение в (2.5), имеем

$$J_r^0(f,x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 \frac{L_k^r(x)}{(k+1)_r}. \tag{2.7}$$

Сопоставляя (2.4), (2.6) и (2.7), мы приходим к следующему представлению смешанного ряда по полиномам Лагерра при $\alpha = 0$:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!} + x^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_r} L_k^r(x). \tag{2.8}$$

Операторы $\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f)$ в этом случае имеют вид

$$\mathcal{L}_{n+r}^0(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!} + x^r \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_r} L_k^r(x). \tag{2.9}$$

Из (2.9), в свою очередь, имеем

$$\left(\mathcal{L}_{n+r}^0(f,x)\right)^{(\nu)}|_{x=0} = f^{(\nu)}(0), \quad (0 \le \nu \le r-1). \tag{2.10}$$

Дифференцирование равенств (2.8) и (2.9) дает $(0 \le m \le r-1)$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-m-1} f^{(m+\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!} + x^{r-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_{r-m}} L_k^{r-m}(x), \tag{2.11}$$

$$\left(\mathcal{L}_{n+r}^0(f,x)\right)^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{r-m-1} f^{(m+\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!} + x^{r-m} \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{r,k}^0 L_k^{r-m}(x)}{(k+1)_{r-m}} = \mathcal{L}_{n+r-m}^0(f^{(m)},x). \tag{2.12}$$

Для $-1 < \alpha < 1$, $f \in W_{\mathcal{L}_{2,\rho}}^r$ положим

$$J_{r,n}^\alpha(f,x) = (-1)^r \sum_{k=0}^{n} f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x), \tag{2.13}$$

$$\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f) = \mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f,x) = E_{r-1}^\alpha(f,x) + J_{r,n}^\alpha(f,x), \tag{2.14}$$

где $E_{r-1}^\alpha(f,x)$ – полином степени $r-1$, определенный равенством (2.2). Тогда из (2.1), (2.3), (2.13) и (2.14) имеем

$$f(x) = \mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f,x) + \mathcal{P}_{r,n}^\alpha(f,x), \tag{2.15}$$

где

$$\mathcal{P}_{r,n}^\alpha(f,x) = (-1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{2.16}$$

Из (2.14) следует, что $\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f,x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$. Будем рассматривать $\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f) = \mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f,x)$ как аппарат приближения гладких функций.

Заметим еще, что в силу теоремы 2.1, если $p_{n+r} = p_{n+r}(x)$ алгебраический полином степени $n+r$, то

$$\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(p_{n+r}) = p_{n+r}. \tag{2.17}$$

3. АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{L}^0_{n+r}(f)$ НА КЛАССАХ $W^r(0,\infty)$

Будем рассматривать функции вида $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, для которых r-тая производная $f^{(r)}(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$e^{-x/2}|f^{(r)}(x)|\le 1 \quad (0\le x<\infty). \tag{3.1}$$

Множество таких функций мы обозначим через $W^r(0,\infty)$. В настоящей работе мы рассмотрим аппроксимативные свойства частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лагерра на классах $W^r(0,\infty)$.

Пусть $f\in W^r(0,\infty)$, тогда мы можем определить следующую величину:

$$E^r_m(f)=\inf_{p_m}\max_{x\in[0,\infty)} e^{-x/2}x^{-r/2+1/4}|f(x)-p_m(x)|, \tag{3.2}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $p_m(x)$ степени m, удовлетворяющим условиям

$$(p_m(x))\,|^{(\nu)}_{x=0}=f^{(\nu)}(0) \quad (0\le\nu\le r-1). \tag{3.3}$$

Через $p^r_m(f)=p^r_m(f,x)$ мы обозначим алгебраический полином степени $m\ge r-1$, удовлетворяющий условиям (3.3), для которого

$$E^r_m(f)=\max_{x\in[0,\infty)} e^{-x/2}x^{-r/2+1/4}|f(x)-p^r_m(x)|. \tag{3.4}$$

Заметим, что если $p_{n+r}=p_{n+r}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$, то в силу (2.17) $\mathcal{L}^0_{n+r}(p_{n+r},x)=p_{n+r}(x)$, поэтому при $m\le n+r$ имеем

$$e^{-x/2}x^{-r/2+1/4}[f(x)-\mathcal{L}^0_{n+r}(f,x)]=e^{-x/2}x^{-r/2+1/4}[f(x)-p^r_m(f,x)]+Z(x), \tag{3.5}$$

где

$$Z(x)=x^{-r/2+1/4}e^{-x/2}\mathcal{L}^0_{n+r}(p^r_m(f)-f,x). \tag{3.6}$$

Далее, в силу (3.3) и (2.9)

$$\mathcal{L}^0_{n+r}(p^r_m(f)-f,x)=x^r\sum_{k=0}^{n}\frac{(p^r_m(f)-f)_{r,k}}{(k+1)_r}L^r_k(x)=$$

$$=x^r\sum_{k=0}^{n}\frac{L^r_k(x)}{(k+1)_r}\int_{t=0}^{\infty}e^{-t}[p^r_m(f,t)-f(t)]^{(r)}L^0_k(t)dt. \tag{3.7}$$

Применяя r-раз интегрирование по частям и учитывая условие (3.3), имеем

$$\int_0^\infty e^{-t}L^0_k(t)[p^r_m(f,t)-f(t)]^{(r)}dt=(-1)^r\int_0^\infty [p^r_m(f,t)-f(t)]\,(e^{-t}L^0_k(t))^{(r)}dt. \tag{3.8}$$

С другой стороны в силу (1.1) и (1.7)

$$\left(e^{-x}L^0_k(x)\right)^{(r)}=\frac{1}{k!}\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}\left(e^{-x}x^k\right)=\frac{1}{k!}\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}\left(e^{-x}x^{k+r-r}\right)=$$

$$=\frac{1}{k!}(k+r)!e^{-x}x^{-r}L^{-r}_{k+r}(x)=(k+r)^{[r]}e^{-x}x^{-r}\frac{(-x)^r}{(k+r)^{[r]}}L^r_k(x)=(-1)^re^{-x}L^r_k(x). \tag{3.9}$$

Из (3.7)–(3.9) имеем

$$\mathcal{L}^0_{n+r}(p^r_m(f)-f,x)=x^r\int_0^\infty [p^r_m(f,t)-f(t)]\,e^{-t}\sum_{k=0}^{n}\frac{L^r_k(x)L^r_k(t)}{(k+1)_r}dt. \tag{3.10}$$

Из (3.6) и (3.10) находим

$$Z(x)=x^{r/2+1/4}e^{-x/2}\int_0^\infty [p^r_m(f,t)-f(t)]\,e^{-t}\sum_{k=0}^{n}\frac{L^r_k(x)L^r_k(t)}{(k+1)_r}dt. \tag{3.11}$$

Из (3.11) с учетом (3.4) мы можем вывести следующую оценку:

$$|Z(x)| \le x^{r/2+1/4} E_m^r(f) \int_0^\infty t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} \left| \sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x) L_k^r(t)}{(k+1)_r} \right| dt. \tag{3.12}$$

Положим

$$l_n^r(x) = \int_0^\infty t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} \left| \sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x) L_k^r(t)}{(k+1)_r} \right| dt, \tag{3.13}$$

тогда из (3.4), (3.5) и (3.12) следует, что при $x \ge 0$ справедлива оценка

$$e^{-x/2} x^{-r/2+1/4} [f(x) - \mathcal{L}_{n+r}^0(f,x)] \le E_{n+r}^r(f) \left| 1 + x^{r/2+1/4} l_n^r(x) \right|. \tag{3.14}$$

Если мы заменим здесь $f(x)$ на $f^{(m)}(x)$ и воспользуемся равенством (2.12), то получим $(0 \le m \le r-1)$

$$e^{-x/2} x^{-(r-m)/2+1/4} |f^{(m)}(x) - \left(\mathcal{L}_{n+r}^0(f,x)\right)^{(m)}| \le E_{n+r-m}^{r-m}(f^{(m)}) \left[1 + x^{(r-m)/2+1/4} l_n^{r-m}(x) \right].$$

В связи с этим результатом возникает задача об исследовании поведения величины $l_n^r(x)$ при $n \to \infty$, $0 \le x < \infty$. Имеет место следующая

Теорема 3.1. *Пусть $s = s_n = 4n + 2r + 2$, $r \ge 1$. Тогда имеют место оценки*

$$l_n^r(x) \le c(r) \begin{cases} n^{r/2+1/4} \ln(n+1), & 0 \le x \le 3/s, \\ x^{-r/2-1/4} \ln(n+1), & 3/s \le x \le s/2, \\ x^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \left[\ln(n+1) + \left(\frac{x}{s^{1/3}+|x-s|} \right)^{1/4} \right], & s/2 \le x \le 3s/2, \\ n^{-r/2+7/4} e^{-x/4}, & 3s/2 \le x. \end{cases} \tag{3.15}$$

(здесь $c(r)$ – некоторая постоянная, зависящая от r)

При доказательстве теоремы 3.1, полуось $[0,\infty)$ разбивается на несколько частей по следующей схеме:

$$[0,\infty) = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4,$$

где $G_1 = [0, 3/s)$, $G_2 = [3/s, s/2)$, $G_3 = [s/2, 3s/2)$, $G_4 = [3s/2, \infty)$, и функция $l_n^r(x)$ оценивается на каждом из множеств G_k $(k = 1,2,3,4)$. Из-за недостатка места мы здесь ограничимся доказательством справедливости оценки функции $l_n^r(x)$ на множестве G_1.

С этой целью заметим сначала, что из сопоставления равенств (1.6) и (3.13) имеем

$$l_n^r(x) = \int_0^\infty t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} \left| \mathcal{K}_n^r(x,t) \right| dt. \tag{3.16}$$

4. ОЦЕНКА $l_n^r(x)$ НА G_1

Пусть $x \in G_1$. Положим

$$J_1 = \int_0^{4/s} t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} \left| \mathcal{K}_n^r(x,t) \right| dt. \tag{4.1}$$

$$J_2 = \int_{4/s}^\infty t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} \left| \mathcal{K}_n^r(x,t) \right| dt, \tag{4.2}$$

тогда в силу (3.16)

$$l_n^r(x) \le J_1 + J_2. \tag{4.3}$$

Оценим J_1. Используя оценку (1.8), имеем

$$J_1 \le \int_0^{4/s} t^{r/2-1/4} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)_r} e^{-\frac{t+x}{2}} \left| L_k^r(x) L_k^r(t) \right| dt \le$$

$$\le c(r) \int_0^{4/s} t^{r/2-1/4} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)_r} e^{-\frac{t+x}{2}} A_k^r(x) A_k^r(t) dt \le$$

$$\leq c(r)\int_0^{4/s} t^{r/2-1/4}dt\sum_{k=0}^{n}\frac{s_k^{2r}}{(k+1)_r} \leq c(r)n^{r/2+1/4}. \tag{4.4}$$

Оценим J_2. С этой целью обратимся к формуле (1.14). Тогда из (4.2) имеем

$$J_2 \leq e^{-x/2}|\hat{L}_n^r(x)|\int\limits_{4/s}^{\infty} t^{r/2-1/4}e^{-t/2}|\hat{L}_n^r(t)|+$$

$$+(n+r+1)\int\limits_{4/s}^{\infty} e^{-\frac{t+x}{2}}t^{r/2-1/4}\frac{\left|\hat{L}_n^r(t)\left[\hat{L}_{n+1}^r(x)-\hat{L}_{n-1}^r(x)\right]\right|}{t-x}dt+$$

$$+(n+r+1)\int\limits_{4/s}^{\infty} e^{-\frac{t+x}{2}}t^{r/2-1/4}\frac{\left|\hat{L}_n^r(x)\left[\hat{L}_{n+1}^r(t)-\hat{L}_{n-1}^r(t)\right]\right|}{t-x}dt = J_{21}+J_{22}+J_{23}. \tag{4.5}$$

Далее, положим

$$W=\left|\hat{L}_n^r(x)\right|\int_{4/s}^{\infty} t^{r/2-1/4}e^{-t/2}\left|\hat{L}_n^r(t)\right|dt = W_1+W_2+W_3, \tag{4.6}$$

где

$$W_1=\left|\hat{L}_n^r(x)\right|\int_{4/s}^{s/2} t^{r/2-1/4}e^{-t/2}\left|\hat{L}_n^r(t)\right|dt, \tag{4.7}$$

$$W_2=\left|\hat{L}_n^r(x)\right|\int_{s/2}^{3s/2} t^{r/2-1/4}e^{-t/2}\left|\hat{L}_n^r(t)\right|dt, \tag{4.8}$$

$$W_3=\left|\hat{L}_n^r(x)\right|\int_{3s/2}^{\infty} t^{r/2-1/4}e^{-t/2}\left|\hat{L}_n^r(t)\right|dt. \tag{4.9}$$

Из (1.8), (1.9), (4.7)–(4.9) имеем

$$W_1 \leq c(r)n^{r/2-1/4}\int\limits_{4/s}^{s/2} t^{-1/2}dt \leq c(r)n^{r/2-1/4}n^{1/2} = c(r)n^{r/2+1/4}, \tag{4.10}$$

$$W_2 \leq c(r)n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\int\limits_{s/2}^{3s/2}\frac{dt}{\left[s^{1/3}+|t-s|\right]^{\frac{1}{4}}} \leq c(r)n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\int\limits_{s}^{3s/2}\frac{dt}{\left[t-s+s^{1/3}\right]^{\frac{1}{4}}} \leq$$

$$\leq c(r)n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\frac{4}{3}\left[t-s+s^{1/3}\right]^{\frac{3}{4}}\Big|_s^{3s/2} \leq c(r)n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\frac{4}{3}\left[s/2+s^{1/3}\right]^{\frac{3}{4}} \leq c(r)n^{r/2+1/4}, \tag{4.11}$$

$$W_3 \leq c(r)\int\limits_{3s/2}^{\infty} e^{-t/4}t^{r/2-1/4}dt \leq c(r)e^{-\frac{3}{4}n}n^{r/2-1/4}. \tag{4.12}$$

Из (4.5) и (4.6)–(4.9) мы получаем для J_{21} следующую оценку:

$$J_{21} \leq c(r,\lambda)n^{r/2+1/4}. \tag{4.13}$$

Оценим J_{22}. Из (4.5) с учетом оценки (1.8) имеем

$$J_{22} \leq c(r)n\left|\hat{L}_{n+1}^r(x)-\hat{L}_{n-1}^r(x)\right|e^{-x/2}\int\limits_{4/s\leq t<\infty}\frac{n^{-r/2}A_n^r(t)}{t-x}e^{-t/2}t^{r/2-1/4}dt. \tag{4.14}$$

Из (4.14) и оценки (1.10) находим

$$J_{22} \le c(r) \int\limits_{4/s}^{\infty} \frac{A_n^r(t)e^{-t/2}}{t-x} t^{r/2-1/4} dt \le c(r) \int\limits_{4/s}^{\infty} A_n^r(t)e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt = J'_{22} + J''_{22} + J'''_{22}, \tag{4.15}$$

где в силу (1.9)

$$J'_{22} = c(r) \int\limits_{4/s}^{s/2} A_n^r(t)e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt \le c(r) \int\limits_{4/s}^{s/2} n^{r/2-1/4} t^{-r/2-1/4} t^{r/2-5/4} dt =$$

$$= c(r) n^{r/2-1/4} \int\limits_{4/s}^{s/2} t^{-1-1/2} dt \le c(r) n^{r/2+1/4}, \tag{4.16}$$

$$J''_{22} = c(r) \int\limits_{s/2}^{3s/2} A_n^r(t)e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt \le$$

$$\le c(r) \int\limits_{s/2}^{3s/2} \left[n(n^{1/3} + |t-s|)\right]^{-1/4} t^{r/2-5/4} dt = c(r) n^{r/2-5/4-1/4} \int\limits_{s/2}^{3s/2} dt \le$$

$$\le c(r) n^{r/2-6/4} \int\limits_{s/2}^{3s/2} (t-s+1)^{-1/4} \, dt \le c(r) n^{r/2-6/4} n^{3/4} = c(r) n^{r/2-3/4}, \tag{4.17}$$

$$J'''_{22} = c(r) \int\limits_{3s/2}^{\infty} A_n^r(t)e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt \le c(r) \int\limits_{3s/2}^{\infty} e^{t/4} e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt =$$

$$= c(r) \int\limits_{3s/2}^{\infty} e^{-t/4} t^{r/2-5/4} dt \le c(r) e^{3s/8} n^{r/2-5/4}. \tag{4.18}$$

Из (4.15)–(4.18) выводим

$$J_{22} \le c(r) n^{r/2+1/4}. \tag{4.19}$$

Оценим J_{23}. Из (4.5) и оценок (1.8), (1.10) имеем

$$J_{23} \le J'_{23} + J''_{23} + J'''_{23}, \tag{4.20}$$

где

$$J'_{23} = c(r) n^{r/2+1/4} \int\limits_{4/s}^{s/2} t^{-r/2+1/4} t^{r/2-5/4} dt \le c(r) n^{r/2+1/4} \int\limits_{4/s}^{s/2} \frac{dt}{t} \le c(r) n^{n/2+1/4} \ln(n+1). \tag{4.21}$$

$$J''_{23} = c(r) n^{r/2+1/4} \int\limits_{s/2}^{3s/2} \left(n^{1/3} + |t-s|\right)^{1/4} t^{-r/2} t^{r/2-5/4} dt \le$$

$$\le c(r) n^{r/2-1} \int\limits_{s}^{3s/2} (t-s+n^{1/3})^{1/4} dt \le c(r) n^{r/2+1/4}, \tag{4.22}$$

$$J'''_{23} \le c(r) n^{r/2+1} \int_{3s/2}^{\infty} e^{-t/4} t^{r/2-5/4} dt \le c(r) n^{r-1/4} e^{-3s/8}. \tag{4.23}$$

Из (4.20)–(4.23) следует оценка

$$J_{23} \leq c(r)n^{r/2+1/4}\ln(n+1). \qquad (4.24)$$

Теперь соберем оценки (4.13), (4.19) и (4.24) вместе и сопоставим их с (4.5). Это дает

$$J_2 \leq c(r)n^{r/2+1/4}\ln(n+1),$$

а отсюда и из (4.4) с учетом (4.3) получаем окончательно

$$l_n^r(x) \leq c(r)n^{r/2+1/4}\ln(n+1) \quad (x \in G_1). \qquad (4.25)$$

Тем самым доказано утверждение теоремы 4.1, относящееся к случаю $x \in G_1$.

Из-за недостатка места мы здесь ограничимся доказательством справедливости оценки функции $l_n^r(x)$ на множестве G_1.

Библиографический список

1. *Шарапудинов И.И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Теория и приложения. Махачкала, 2004.

2. *Шарапудинов И.И.* Исправленные суммы Фурье по ортогональным полиномам и их аппроксимативные свойства // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронеж. зимней мат. школы (27 января – 4 февраля 2001 г.). Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1999. С. 289–290.

3. *Шарапудинов И.И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 10-й Сарат. зимней школы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 228–229.

4. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

5. *Askey R., Wainger S.* Mean convergence of expansions in Lagerre and Hermite series // Amer. J. Mathem. 1965. V.87. P. 695–708.

6. *Muckenhaupt B.* Mean convergence of Hermit and Lagerre series. I. // Trans. Amer. Mathem. Soc. 1970. V. 147. P. 419–431.

7. *Muckenhaupt B.* Mean convergence of Hermit and Lagerre series. II. // Trans. Amer. Mathem. Soc. 1970. V. 147. P. 433–460.