ными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 193–220.

6. *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952.

7. *Benedetto J.J., Benedetto R.L.* A wavelet theory for local fields and related groups // The J. of Geometric Analysis. 2004. V. 14, № 3. P. 423–456.

8. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981.

9. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

УДК 517.535.4

О РАЗЛОЖЕНИИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НА ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Р.Г. Письменный

Славянский-на-Кубани государственный педагогический институт,
кафедра математики и методики ее преподавания
E-mail: Pirogen@mail.ru

Статья содержит развитие известной теоремы И.Ф. Красичкова-Терновского о расщеплении на случай уточненного порядка. При этом охватывается ситуация с нулевым порядком. Доказательство осуществляется по той же схеме и основано на факторизационной теореме Адамара.

Ключевые слова: целая функция, конечный порядок, нулевой порядок, факторизационная теорема.

Factoring of an Entire Function into Two Equivalent Functions

R.G. Pismennyi

The article contains the development of the known Krasichkov-Ternovskii's theorem about fission on event of the proximate order. Herewith event of the zero order is covered. Proof is realized on the same scheme and is founded on Adamara's theorem.

Key words: entire function, finit order, order zero, factorization theorem.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Выберем неотрицательную функцию μ, определённую на луче $t \geq 0$. Считаем, что она возрастает, дифференцируема в окрестности $+\infty$ и

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\mu(t)}{\ln t} = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} = \rho < +\infty. \tag{1}$$

Отметим, что из условий (1) вытекает, что функция $\rho(t) = \frac{\ln\mu(t)}{\ln t}$ является уточнённым порядком, то есть

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(t) = \rho < +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} t\rho'(t)\ln t = 0. \tag{2}$$

Действительно, $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\mu(t) = +\infty$, значит, по известному правилу

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\mu(t)}{\ln t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} = \rho$$

и при этом

$$t\rho'(t)\ln t = \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} - \frac{\ln\mu(t)}{\ln t} \to 0,$$

если $t \to +\infty$. При $\rho > 0$ верно и обратное, то есть для любого уточненного порядка $\rho(t) \to \rho$ функция $\mu(t) = t^{\rho(t)}$ удовлетворяет соотношениям (1). Действительно, при $\rho > 0$ имеем

$$\frac{\mu(t)}{\ln t} = \frac{t^{\rho(t)}}{\ln t} \to +\infty \quad \text{и} \quad \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} = t\rho'(t)\ln t + \rho(t) \to \rho \quad \text{при} \quad t\to+\infty.$$

Таким образом, при $\rho > 0$ условия (1) и (2) эквивалентны.

Две функции f_1, f_2 комплексной переменной называются *μ-эквивалентными* (в обозначениях $f_1 \sim f_2$), если существует множество кружков $E = \bigcup e_i$ нулевой линейной плотности, такое что

$$\ln|f_1(z)| - \ln|f_2(z)| = o(\mu(|z|)), \qquad z \to \infty, \qquad z \notin \bigcup e_i.$$

Введенное отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично, транзитивно; оно сохраняется при умножении на эквивалентные функции: если $f_1 \sim f_2$, $g_1 \sim g_2$, то $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}$ — последовательность отличных от нуля комплексных чисел с единственной предельной точкой в бесконечности, $n(t) = n(t;\Lambda)$ — считающая функция, $p = [\rho]$, $G(z,p;\Lambda) = \prod G\left(\frac{z}{\lambda_i}, p\right)$ — каноническое произведение. Справедлива следующая теорема о расщеплении.

Теорема. *Если*

$$\int\limits_0^r \frac{n(t;\Lambda)}{t}\,dt \le \omega(r)\mu(r), \tag{3}$$

где $\omega(t)$ интегрируема по Риману, равна нулю в некотором полуинтервале $[0,t_0)$ и подчинена условию $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\,\omega(t) \le c$ $(0 < c < +\infty)$, то последовательность Λ можно разбить на две подпоследовательности $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$ таким образом, что $G(z,p;A) \sim G(z,p;B)$ при $\rho \notin \mathbf{N}$, $G(z,p;A)e^{\alpha z^\rho} \sim G(z,p;B)e^{-\alpha z^\rho}$ при $\rho \in \mathbf{N}$ и некотором $\alpha \in C$.

Для случая $\mu(t) = t$ эта теорема доказана в работе И.Ф. Красичкова-Терновского [1, теорема 4.2].

Из теоремы о расщеплении и факторизационной теоремы Адамара для целых функций конечного порядка легко получить следующее утверждение: если целая функция f удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\mu(r)} < +\infty,$$

а последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ ее нулей удовлетворяет условию (3), то функцию f можно представить в виде произведения двух μ-эквивалентных множителей $f = f_1 f_2$, где $f_1 \sim f_2$. В статье В.С. Азарина [2] это утверждение доказано для случая $\mu(t) = t^\rho$, $\rho > 0$. Доказательство В.С. Азарина является альтернативным и опирается не на теорему о расщеплении, а на его результат по аппроксимации субгармонических функций модулями целых функций. Этот подход возможен и в общем случае, если опереться на аналогичный результат Р.С. Юлмухаметова из [3]. Приводимое ниже доказательство является более прозрачным и простым, так как является внутренним и не требует обращения к теории субгармонических функций.

2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Последовательность комплексных чисел $\Gamma = \{\gamma_i\}$ называется *d-близкой* к последовательности $\Lambda = \{\lambda_i\}$, если $|\gamma_i - \lambda_i| \le d|\lambda_i|$, $i = 1, 2, \dots$. Множество G называется *σ-удаленным* от множества P, если $\inf\limits_{h\in P}|h - z| > \sigma|z|$ для любой точки $z \in G$. Символом $O(x)$ обозначаем произведение функции, модуль которой ограничен сверху положительным числом, на x. Множество кружков E *центрировано* множеством P, если каждая точка P принадлежит, по крайней мере, одному кружку множества E и каждый кружок множества E содержит, по крайней мере, одну точку из P.

Пусть $\rho = 0$. Тогда оказываются справедливыми две следующие теоремы. Для случая $0 < \rho < +\infty$ аналогичные теоремы доказаны в статье [4, теремы A, B].

Теорема 1. *Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{\mu(r)} \le c \ (0 < c < +\infty), \tag{4}$$

$g(z)$ — целая функция с последовательностью корней $\Gamma = \{\gamma_i\}$, d-близкой к последовательности корней $\Lambda = \{\lambda_i\}$ функции $f(z)$; G_σ — некоторое множество, σ-удаленное от Λ. Если

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_g(r)}{\ln\mu(r)} < +\infty \tag{5}$$

и $0 < \frac{d}{1-d} < \sigma \leq 1$, *то существует число* $l < +\infty$, *зависящее от* $f(z)$ *и* $g(z)$, *такое, что при* $|z| > l$, $z \in G_\sigma$

$$\ln|g(z)| - \ln|f(z)| = \frac{O\,(cd)}{\sigma - \frac{d}{1-d}}\mu(|z|).$$

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$ — *целая функция, удовлетворяющая условию* (4), *и* $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leq 1$. *Тогда любой целой функции* $g(z)$, *удовлетворяющей условию* (5), *с последовательностью корней* $\Gamma = \{\gamma_i\}$, d-*близкой* $\left(0 \leq d < \frac{1}{2}\right)$ *к последовательности корней* $\Lambda = \{\lambda_i\}$ *функции* $f(z)$, *можно поставить в соответствие множество кружков* E_g *со свойствами:*

1) E_g *центрировано множеством* $\Gamma \bigcup \Lambda$,
2) *линейная плотность* E_g *не превосходит* βd^{α^2},
3) *при* $z \notin E_g$

$$\ln|g(z)| - \ln|f(z)| = \frac{O(cd)}{\alpha\beta d^\alpha \sin \pi\alpha}\mu(|z|).$$

Доказательства теорем 1 и 2 проведем по классической схеме, разработанной в [4].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Выберем произвольную последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ отличных от нуля комплексных чисел с единственной предельной точкой в бесконечности и будем предполагать, что выбранная последовательность удовлетворяет условию (3). Из этого условия и неравенства

$$n(r;\Lambda) \leq \int_r^{er} \frac{n(t;\Lambda)}{t}dt$$

вытекает, что при любом $r \geq 0$ выполняется неравенство

$$n(r;\Lambda) \leq \omega(er)\mu(er).$$

При достаточно больших r это неравенство можно уточнить. Действительно, при достаточно больших t имеем

$$\left(\frac{\mu(t)}{t}\right)' = \left(\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} - 1\right)\frac{\mu(t)}{t^2} < 0.$$

Поэтому разность $\mu(qt) - q\mu(t) = qt\left(\frac{\mu(qt)}{qt} - \frac{\mu(t)}{t}\right)$ и разность $1-q$ имеют один и тот же знак, то есть при достаточно больших t и $q > 1$

$$\mu(qt) < q\mu(t). \tag{6}$$

Следовательно, при достаточно больших r и $q > \frac{1}{e}$ будут выполняться неравенства:

$$n(qr;\Lambda) \leq \omega(eqr)\mu(eqr) \leq 2ceq\mu(r).$$

Другими словами,

$$n(qr;\Lambda) = O(cq)\mu(r). \tag{7}$$

Пусть Γ — последовательность, d-близкая к Λ $(0 < d \leq \frac{1}{2})$. Используя неравенство

$$n(t;\Gamma) \leq n\left(\frac{t}{1-d};\Lambda\right),$$

нетрудно показать, что Γ удовлетворяет аналогичному (3) условию

$$\int_0^r \frac{n(t;\Gamma)}{t}dt \leq \Omega(r)\mu(r), \tag{8}$$

где $\Omega(r) \leq \frac{\omega(\frac{r}{1-d})}{1-d}$, значит, $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \Omega(r) \leq 2c$. Из неравенства (6) следует, что при достаточно больших r и $q > \frac{1}{e}$

$$n(qr;\Gamma) = O(cq)\mu(r). \tag{9}$$

Обозначим $\Delta_\sigma(z)$ круг $\{h : |h-z| \le \sigma\,|z|\}$ и по последовательностям Λ, Γ составим произведения:

$$G(z;\Lambda) = \prod\left(1-\frac{z}{\lambda_i}\right),\ G(z;\Gamma) = \prod\left(1-\frac{z}{\gamma_i}\right),$$

$$G_\sigma(z;\Lambda) = \prod_{\lambda_i\notin\Delta_\sigma(z)}\left(1-\frac{z}{\lambda_i}\right),\ G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) = \prod_{\lambda_i\notin\Delta_\sigma(z)}\left(1-\frac{z}{\gamma_i}\right).$$

Нетрудно показать, что каждое из этих произведений сходится при любом значении z и удовлетворяет соотношению типа (4). Убедимся в этом на примере произведения $G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)$. Прежде всего,

$$\ln|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| \le \sum\ln\left(1+\frac{|z|}{|\gamma_i|}\right) = \int\limits_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)dn(t;\Gamma).$$

При этом

$$\int\limits_0^{|z|}\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)dn(t;\Gamma) = n(t;\Gamma)\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)\Big|_0^{|z|} + \int\limits_0^{|z|}\frac{|z|n(t;\Gamma)}{(t+|z|)t}dt \le n(|z|;\Gamma)\ln 2 + \int\limits_0^{|z|}\frac{n(t;\Gamma)}{t}dt,$$

$$\int\limits_{|z|}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)dn(t;\Gamma) = n(t;\Gamma)\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)\Big|_{|z|}^{+\infty} + \int\limits_{|z|}^{+\infty}\frac{|z|n(t;\Gamma)}{(t+|z|)t}dt \le$$

$$\le\left(-n(|z|;\Gamma)+\frac{O(c)}{1-o(1)}\mu(|z|)\right)\ln 2,$$

$|z|\to+\infty$. Действительно, так как

$$\frac{t+|z|}{|z|}\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right) \le \frac{t+|z|}{|z|}\frac{|z|}{t}\ln 3 = 2\ln 3$$

при $t\ge|z|$, то

$$\int\limits_{|z|}^{+\infty}\mu'(t)\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)dt = \int\limits_{|z|}^{+\infty}\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)}\frac{t+|z|}{|z|}\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)\frac{|z|\mu(t)}{(t+|z|)t}dt = o(1)\int\limits_{|z|}^{+\infty}\frac{|z|\mu(t)}{(t+|z|)t}dt$$

при $|z|\to+\infty$ и в силу (9)

$$\int\limits_{|z|}^{+\infty}\frac{|z|n(t;\Gamma)}{(t+|z|)t}dt \le O(c)\int_{|z|}^{+\infty}\frac{|z|\mu(t)}{(t+|z|)t}dt = O(c)\left(\mu(t)\ln\frac{t}{t+|z|}\Big|_{|z|}^{+\infty} + \int\limits_{|z|}^{+\infty}\mu'(t)\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)dt\right) =$$

$$= O(c)\mu(|z|)\ln 2 + o(1)\int\limits_{|z|}^{+\infty}\frac{|z|\mu(t)}{(t+|z|)t}dt$$

при $|z|\to+\infty$. В итоге, при достаточно больших $|z|$ имеем $\ln|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| = O(c)\mu(|z|)$. Аналогично убеждаемся в справедливости и трёх других соотношений:

$$\ln|G(z;\Lambda)| = O(c)\mu(|z|),\ \ln|G(z;\Gamma)| = O(c)\mu(|z|),\ \ln|G_\sigma(z;\Lambda)| = O(c)\mu(|z|). \tag{10}$$

Предложение 1. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_i\}$ ($\lambda_i \ne 0$; $i = 1,2,\ldots$) *удовлетворяет условию* (3), Γ — d-*близкая к* Λ *последовательность. Если*

$$0 < \frac{d}{1-d} < \sigma \le 1, \tag{11}$$

то существует число $l < \infty$, зависящее только от функций ω и μ, такое, что при $|z| > l$

$$|\ln |G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| - \ln |G_\sigma(z;\Lambda)|| = \frac{O(cd)}{\sigma - \frac{d}{1-d}}\mu(|z|). \tag{12}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 из [4] показано, что

$$|\ln |G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| - \ln |G_\sigma(z;\Lambda)|| = \frac{O(d)}{1 - \frac{d}{(1-d)\sigma}}J(z),$$

где

$$J(z) = \sum_{|\lambda_i|\le 2|z|,\ \lambda_i\notin\Delta_\sigma(z)} \frac{\left|\frac{z}{\lambda_i}\right|}{\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right|} + \sum_{|\lambda_i|> 2|z|,\ \lambda_i\notin\Delta_\sigma(z)} \frac{\left|\frac{z}{\lambda_i}\right|}{\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right|} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Так как $\lambda_i \notin \Delta_\sigma(z)$, то $\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right| > \left|\frac{z}{\lambda_i}\right|\sigma$. Поэтому

$$\Sigma_1 < \frac{1}{\sigma}\sum_{|\lambda_i|\le 2|z|} 1 = \frac{1}{\sigma}n(2|z|;\Lambda).$$

В силу (7) найдется число $l < \infty$, зависящее только от функции ω, такое, что при $|z| > l$ имеем $\Sigma_1 = O\left(\frac{c}{\sigma}\right)\mu\left(|z|\right)$. В то же время для членов ряда, входящих в Σ_2, справедлива оценка

$$\frac{\left|\frac{z}{\lambda_i}\right|}{\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right|} \le \frac{\left|\frac{z}{\lambda_i}\right|}{1-\frac{|z|}{|\lambda_i|}} < 2\left|\frac{z}{\lambda_i}\right|,$$

откуда следует, что

$$\Sigma_2 \le 2|z|\int\limits_{2|z|}^{+\infty}\frac{dn(t;\Lambda)}{t} = 2|z|\left(\frac{n(t;\Lambda)}{t}\Big|_{2|z|}^{+\infty} + \int\limits_{2|z|}^{+\infty}\frac{n(t;\Lambda)}{t^2}dt\right).$$

В силу (7) при $|z| > l$ имеем

$$\frac{n(t;\Lambda)}{t} = O(c)\frac{\mu(t)}{t} \to 0, \qquad t\to+\infty.$$

Значит,

$$\Sigma_2 \le 2|z|O(c)\int\limits_{2|z|}^{+\infty}\frac{\mu(t)}{t^2}dt = \frac{\mathrm{O(c)}}{1-o(1)}\mu(2|z|)$$

при $|z| \to +\infty$, так как

$$\int_{2|z|}^{+\infty}\frac{\mu(t)}{t^2}dt = -\frac{\mu(t)}{t}\Big|_{2|z|}^{+\infty} + \int\limits_{2|z|}^{+\infty}\frac{\mu'(t)}{t}dt = \frac{\mu(2|z|)}{2|z|} + o(1)\int\limits_{2|z|}^{+\infty}\frac{\mu(t)}{t^2}dt$$

при $|z| \to +\infty$. Следовательно, $\Sigma_2 = O(c)\mu\left(|z|\right)$. Отсюда следует, что справедлива формула (12). Предложение доказано.

При помощи предложения 1 можно сравнивать модули произведений $G(z;\Gamma)$ и $G(z;\Lambda)$ на множествах, удаленных от Λ. Действительно, пусть последовательность Λ удовлетворяет условию (3), Γ — последовательность, d-близкая к Λ, а G_σ — множество, σ-удаленное от Λ. Предположим, что числа d, σ связаны условием (11). В силу того что G_σ σ-удалено от Λ, при $z\in G_\sigma$ в круге $\Delta_\sigma(z)$ не содержится ни одной точки $\lambda_i \in \Lambda$. Поэтому при $z \in G_\sigma$ имеем $G(z;\Lambda) = G_\sigma(z;\Lambda)$, $G(z;\Gamma) = G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)$. Отсюда на основании предложения 1 получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ $(\lambda_i \neq 0)$ удовлетворяет условию* (3), *Γ — d-близкая к Λ последовательность, а G_σ — σ-удалено от Λ. Если $0 < \frac{d}{1-d} < \sigma \leq 1$, то существует число $l < +\infty$, зависящее только от функций ω и μ, такое, что при $|z| > l$ и $z \in G_\sigma$*

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = \frac{O(cd)}{\sigma - \frac{d}{1-d}}\mu(|z|). \tag{13}$$

Из предложения 2 вытекает справедливость теоремы 1. Действительно, пусть f удовлетворяет условию (4). На основании формулы Иенсена нетрудно убедиться, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ корней f удовлетворяет условию типа (3), где $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\,\omega(r) \leq c$. Пусть G_σ — некоторое множество, σ-удаленное от Λ; $g(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию (5), с последовательностью корней $\Gamma = \{\gamma_i\}$, d-близкой к последовательности корней функции f, и $0 < \frac{d}{1-d} < \sigma \leq 1$. По предложению 2 существует число $l < \infty$, зависящее только от $\omega(t)$, такое, что при $|z| > l$ имеет место оценка (13). Осталось заметить, что в силу условий (4) и (5) функции f и g являются функциями рода нуль. Кроме того, первое из условий (1) позволяет считать, что $f(0) = 1$, $g(0) = 1$. Следовательно, по теореме Адамара, $f(z) = G(z;\Lambda)$, $g(z) = G(z;\Gamma)$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Прежде всего, предложение 2, хотя и в ослабленной форме, распространим на более широкий класс множеств.

Лемма 1. *Пусть последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_i\}$ $(|\lambda_i| > l)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{r\geqslant l}\frac{1}{\mu(r)}\int\limits_0^r \frac{n(t;\Lambda)}{t}dt = D < +\infty.$$

Тогда для любых чисел N, σ, где $N > 0$, $0 < \sigma < 1$, существует множество кружков E со свойствами:

1) *каждый кружок E содержит, по крайней мере, одну точку λ_i;*

2) *переменная линейная плотность E при любом значении $r > 0$ не превосходит величины*

$$\frac{2\sigma}{1-\sigma}\frac{D}{N}\left(1 + \sup_{t\geqslant\frac{l}{2}}\left|1 - \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)}\right|\right)\sup_{t\geqslant\frac{l}{2}}\frac{\mu(2et)}{\mu(t)};$$

3) *$n_\sigma(z,\Lambda) < N\mu(|z|)$ при $z \notin E$.*

Здесь $n_\sigma(z,\Lambda)$ — число точек последовательности Λ в круге $\Delta_\sigma(z)$.

Доказательство. Следуя работе [4, лемма 3], построим последовательность точек $H = \{h_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и убывающую цепочку последовательностей $\Lambda = \Lambda^{(0)} \supseteq \Lambda^{(1)} \supseteq \ldots$, обладающих следующим свойством: если круг $\Delta_\sigma(z)$ не пересекается ни с каким кругом $\Delta_\sigma(h_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, то $n_\sigma(z,\Lambda) < N\mu(|z|)$. Положим $\delta = \frac{2\sigma}{1-\sigma}$. Нетрудно показать, что если точка z лежит вне круга $\Delta_\delta(h)$, то круги $\Delta_\sigma(h)$ и $\Delta_\sigma(z)$ не пересекаются. Отсюда следует, что для любой точки z, лежащей вне системы кругов $\Delta_\delta(h_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, круг $\Delta_\sigma(z)$ не пересекается ни с каким кругом $\Delta_\sigma(h_k)$ и, следовательно, в круге $\Delta_\sigma(z)$ содержится менее $N\mu(|z|)$ точек λ_i. Положим $E = \bigcup_{h_k\in H}\Delta_\delta(h_k)$. Из вышеизложенного следует, что $n_\sigma(z,\Lambda) < N\mu(|z|)$ при $z \notin E$. Оценим переменную плотность $p_E(r)$. Имеем $rp_E(r) = \delta\sum\limits_{|h_k|\leq r}|h_k|$, и задача свелась к оценке суммы $\sum\limits_{|h_k|\leq r}|h_k|$. Пусть $m(t)$ — число точек $|h_k|$ в интервале $(0,t]$. Так как $|h_0| \geq \frac{l}{1+\sigma} > \frac{l}{2}$, то $m(t) = 0$ при $0 < t \leq \frac{l}{2}$. Поэтому

$$\sum_{|h_k|\leq r}|h_k| = \int\limits_0^r t\,dm(t) = \int\limits_{\frac{l}{2}}^r t\,dm(t). \tag{14}$$

Оценим последний интеграл. С этой целью, учитывая, что в каждом круге $\Delta_\sigma(h_k)$ содержится не менее $N\mu(|h_k|)$ точек из $\Lambda^{(k)}$ и при этом разные круги содержат только разные точки, напишем цепочку неравенств:

$$N\sum_{|h_k|\le r}\mu\left(|h_k|\right)\le\sum_{|h_k|\le r}n_\sigma(h_k,\Lambda^{(k)})\le n(r(1+\sigma),\Lambda)\le n(2r,\Lambda)\le\int\limits_{2r}^{2er}\frac{n(t,\Lambda)}{t}dt\le D\mu(2er).$$

Из этих неравенств вытекает оценка

$$\Phi(r)=\int\limits_{\frac{l}{2}}^{r}\mu(t)dm(t)=\sum_{|h_k|\le r}\mu\left(|h_k|\right)\le\frac{D}{N}\mu(2er).$$

Используя эту оценку имеем

$$\int\limits_{\frac{l}{2}}^{r}tdm(t)=\int\limits_{\frac{l}{2}}^{r}\frac{t}{\mu(t)}\mu(t)dm(t)=\int\limits_{\frac{l}{2}}^{r}\frac{t}{\mu(t)}d\Phi(t)=\left.\frac{t}{\mu(t)}\Phi(t)\right|_{\frac{l}{2}}^{r}-\int\limits_{\frac{l}{2}}^{r}\Phi(t)\frac{\mu(t)-t\mu'(t)}{\mu^2(t)}dt\le$$

$$\le\frac{r}{\mu(r)}\Phi(r)+\sup_{t\ge\frac{l}{2}}\left|1-\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)}\right|\int\limits_{\frac{l}{2}}^{r}\frac{\Phi(t)}{\mu(t)}dt\le r\frac{D}{N}\left(1+\sup\nolimits_{t\geqslant\frac{l}{2}}\left|1-\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)}\right|\right)\sup_{t\geqslant\frac{l}{2}}\frac{\mu(2et)}{\mu(t)}.$$

Из этой оценки и формулы (14) вытекает неравенство для переменной линейной плотности $p_E(r)$. Лемма доказана.

Опираясь на лемму 1, буквальным повторением доказательств лемм 4 и 5 из [4] доказываем следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\Lambda=\{\lambda_i\}$ удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{\mu(r)}\int\limits_{0}^{r}\frac{n(t;\Lambda)}{t}dt\le c\ (0<c<+\infty)\tag{15}$$

и $0<\alpha<1$, $0<\beta\le1$. Тогда каждому числу s $(0<s\le1)$ можно поставить в соответствие множество кружков E_s таким образом, что выполняются условия:

1) *E_s центрировано Λ,*
2) *$E_{s'}\supseteq E_{s''}$ при $s'>s''$,*
3) *линейная плотность E_s не превосходит βs^α,*
4) $\sup\limits_{0<t<s}\frac{n_t(z;\Lambda)}{t^{1-\alpha}}=O\left(\frac{c}{\alpha\beta}\right)\mu(|z|)$ *при $z\notin E_s$.*

Лемма 3. *Пусть последовательность Λ удовлетворяет условию (15) и $0<\alpha<1$, $0<\beta\le1$, тогда каждой последовательности Γ, d-близкой к Λ $(0<d\le\frac{1}{2})$, можно поставить в соответствие множество кружков E_Γ со свойствами:*

1) *E_Γ центрировано $\Gamma\bigcup\Lambda$,*
2) *линейная плотность E_Γ не превосходит βd^{α^2},*
3) $\int\limits_0^1\frac{n_t(z;\Gamma)-n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)}dt=O(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|)$ *при $z\notin E_\Gamma$.*

Теперь все готово для доказательства следующего предложения.

Предложение 3. *Пусть последовательность $\Lambda=\{\lambda_i\}$ $(\lambda_i\ne0)$ удовлетворяет условию (6) и $0<\alpha<1$, $0<\beta\le1$. Тогда любой последовательности Γ, d-близкой к Λ $\left(0<d\le\frac{1}{2}\right)$, можно поставить в соответствие множество кружков E_Γ со свойствами:*

1) *E_Γ центрировано $\Gamma\bigcup\Lambda$,*
2) *линейная плотность множества E_Γ не превосходит βd^{α^2},*
3) *при $z\notin E_\Gamma$*

$$\ln|G(z;\Gamma)|-\ln|G(z;\Lambda)|=O(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|).\tag{16}$$

Доказательство получаем путем адаптирования к случаю $\rho=0$ доказательства теоремы 4 из [4]. Для последовательностей $\Lambda=\{\lambda_i\}$, $\Gamma=\{\gamma_i\}$ $(\lambda_i,\ \gamma_i\ne0)$ составим суммы:

$$A_\sigma(z;\Lambda)=\sum_{\lambda_i\in\Delta_\sigma(z)}\ln\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right|,\qquad A_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)=\sum_{\lambda_i\in\Delta_\sigma(z)}\ln\left|1-\frac{z}{\gamma_i}\right|,$$

$$L_\sigma(z;\Lambda) = \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(z)} \ln \frac{|z| + |\lambda_i - z|}{|\lambda_i|}, \qquad L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) = \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(z)} \ln \frac{|z| + |\gamma_i - z|}{|\gamma_i|}.$$

Обозначим через $n_{t,\sigma}(z;\Gamma|\Lambda)$ число точек γ_i, принадлежащих кругу $\Delta_t(z)$, с индексами, удовлетворяющими условию $\lambda_i \in \Delta_\sigma(z)$. В работе [4, лемма 6] доказано, что при любом $\sigma > 0$ выполняются следующие соотношения:

$$A_\sigma(z;\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda) \equiv n_\sigma(z;\Lambda) \ln \frac{\sigma}{1+\sigma} - \int_0^\sigma \frac{n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)} dt, \tag{17}$$

$$A_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) - L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) \equiv n_{s,\sigma}(z;\Gamma|\Lambda) \ln \frac{s}{1+s} - \int_0^s \frac{n_{t,\sigma}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)} dt, \tag{18}$$

где $s = d + \sigma + \sigma d$.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ ($\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, ...$) удовлетворяет условию (6), последовательность Γ является d-близкой к Λ и $0 < d \leq \frac{1}{2}$, $0 < \sigma \leq 1$. Как показано в [4, лемма 7], существует число $l < \infty$, зависящее только от $\omega(t)$, такое, что при $|z| > l$

$$L_\sigma(z;\Lambda) = O(c)\mu(|z|), \; L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda) = O(cd)\mu(|z|). \tag{19}$$

Воспользуемся представлениями:

$$\ln|G(z;\Lambda)| = (A_\sigma(z;\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda)) + L_\sigma(z;\Lambda) + \ln|G_\sigma(z;\Lambda)|, \tag{20}$$

$$\ln|G(z;\Gamma)| = (A_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) - L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)) + L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) + \ln|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)|. \tag{21}$$

Положим в (20) $\sigma = 1$ и применим к соответствующим компонентам полученного представления соотношения (17), (19) и (10). Получим оценку

$$\ln|G(z;\Lambda)| = -\int_0^1 \frac{n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)} dt + O(c)\mu(|z|). \tag{22}$$

Аналогичная оценка в силу условия (8) будет справедлива и для любой последовательности Γ, d-близкой к Λ ($0 < d \leq \frac{1}{2}$).

Используя (20) и (21), напишем представление для разности

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = (A_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) - L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)) - (A_\sigma(z;\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda)) +$$
$$+ (L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda)) + (\ln|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G_\sigma(z;\Lambda)|). \tag{23}$$

Положим в (23) $\sigma = 1$ и применим к соответствующим компонентам полученного представления оценки (17), (18), (19) и предложение 1. Получим такую оценку

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = n_{1+2d,1}(z;\Gamma|\Lambda) \ln \frac{1+2d}{2+2d} - \int_0^{1+2d} \frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)} dt - n_1(z;\Lambda) \ln \frac{1}{2} +$$
$$+ \int_0^1 \frac{n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)} dt + O(cd)\mu(|z|) + O(cd)\left(1 + \frac{1}{1 - \frac{d}{1-d}}\right)\mu(|z|)$$

($|z| > l$; $0 < d \leq \frac{1}{2}$). Замечаем, что $n_{1+2d,1}(z;\Gamma|\Lambda) = n_1(z;\Lambda)$ и что $1 + \frac{1}{1-\frac{d}{1-d}} \leq 3$ при $0 < d \leq \frac{1}{4}$. Поэтому

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = \int_0^1 \frac{n_t(z;\Lambda) - n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)} dt - \int_1^{1+2d} \frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)} dt + O(cd)\mu(|z|) =$$

$$= -\int\limits_0^1 \frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda) - n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)} dt + O(cd)\mu(|z|) \quad (|z| > l;\ 0 < d \le \frac{1}{4}). \tag{24}$$

При $0 < t \le 1 - 2d$ в силу $\frac{d}{1-d}$-близости последовательности Λ к последовательности Γ из $\gamma_i \in \Delta_t(z)$ следует $\lambda_i \in \Delta_1(z)$. Поэтому при таких значениях t имеем

$$n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda) = n_t(z;\Gamma).$$

Отсюда

$$\int\limits_0^1 \frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)} dt = \int\limits_0^{1-2d} \frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)} dt + \int\limits_{1-2d}^1 \frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)} dt = \int\limits_0^{1-2d} \frac{n_t(z;\Gamma)}{t(1+t)} dt + O(cd)\mu(|z|) =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{n_t(z;\Gamma)}{t(1+t)} dt - \int\limits_{1-2d}^1 \frac{n_t(z;\Gamma)}{t(1+t)} dt + O(cd)\mu(|z|) = \int\limits_0^1 \frac{n_t(z;\Gamma)}{t(1+t)} dt + O(cd)\mu(|z|) \quad (|z| > l).$$

Подставляя в (24), получим оценку

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = -\int\limits_0^1 \frac{n_t(z;\Gamma) - n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)} dt + O(cd)\mu(|z|). \tag{25}$$

Эта оценка выведена в предположении, что $0 < d \le \frac{1}{4}$. Однако в силу оценки (22) и аналогичной оценки для Γ оценка вида (25) будет справедлива для всех значений d из интервала $0 < d \le \frac{1}{2}$. Осталось к интегралу в (25) применить лемму 3. Предложение доказано.

Теперь все готово для доказательства теоремы 2. Пусть $f(z)$ удовлетворяет условию (4). На основании формулы Иенсена нетрудно убедиться, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ корней $f(z)$ удовлетворяет условию типа (3), где $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\ \omega(t) \le c$. Пусть $g(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию (5), с последовательностью корней $\Gamma = \{\gamma_i\}$, d-близкой к последовательности корней функции $f(z)$, и $0 < \frac{d}{1-d} < \sigma \le 1$. По предложению 3 последовательности Γ можно поставить в соответствие центрированное $\Gamma \bigcup \Lambda$ множество кружков E_Γ с линейной плотностью, не превосходящей βd^{α^2}, такое, что при $z \notin E_\Gamma$ справедлива оценка (16). По теореме Адамара, $f(z) = az^\alpha G(z;\Lambda)$, $g(z) = bz^\beta G(z;\Gamma)$. При этом в силу (1)

$$\ln|az^\alpha| - \ln|bz^\beta| = o\left(\mu(|z|)\right),\ z \to \infty. \tag{26}$$

Значит, существует такое число $l < +\infty$, что

$$\ln|g(z)| - \ln|f(z)| = O_\rho(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|)$$

при $|z| > l$, $z \notin E_\Gamma$. Если l — достаточно большое число, то круг $\{z : |z| \le l\}$ будет содержать точки $\Gamma \bigcup \Lambda$ и, следовательно, множество кружков $E_g = \{z : |z| \le l\} \bigcup E_\Gamma$ будет центрировано $\Gamma \bigcup \Lambda$. Линейная плотность множества E_g равна линейной плотности множества E_Γ и не превосходит βd^{α^2}.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О РАСЩЕПЛЕНИИ

Далее $\rho \in [0, +\infty)$ и $p = [\rho]$. Последовательность $\Gamma = \{\gamma_i\}$ называется *эквивалентной* последовательности $\Lambda = \{\lambda_i\}$ (в обозначениях $\Gamma \sim \Lambda$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $i(\varepsilon)$ такой, что $|\gamma_i - \lambda_i| \le \varepsilon|\lambda_i|$, при $i > i(\varepsilon)$. Это отношение является рефлексивным, симметричным, транзитивным. Если $\Gamma_1 \sim \Lambda_1$, $\Gamma_2 \sim \Lambda_2$, то при соответствующием упорядочении объединенных последовательностей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Lambda = \Lambda_1 \bigcup \Lambda_2$ будем иметь $\Gamma \sim \Lambda$. Таким образом, отношение эквивалентности сохраняется при объединении эквивалентных последовательностей.

Лемма 4. *Пусть эквивалентные последовательности* Γ *и* Λ *удовлетворяют условиям* (3) *и* (8) *соответственно. Тогда*

$$G(z,p;\Gamma) \sim G(z,p;\Lambda) \quad \text{при} \quad \rho \notin \mathbf{N}, \qquad G^*(z,p;\Gamma|\Lambda) \sim G^*(z,p;\Lambda) \quad \text{при} \quad \rho \in \mathbf{N},$$

где

$$G^*(z,p;\Lambda) = \prod_{|\lambda_i|\le|z|} G\left(\frac{z}{\lambda_i}, p-1\right) \prod_{|\lambda_i|>|z|} G\left(\frac{z}{\lambda_i}, p\right),$$

$$G^*(z,p;\Gamma|\Lambda) = \prod_{|\lambda_i|\le|z|} G\left(\frac{z}{\gamma_i}, p-1\right) \prod_{|\lambda_i|>|z|} G\left(\frac{z}{\gamma_i}, p\right).$$

Доказательство. Пусть $d_n \to 0$ ($0 < d_n \le \frac{1}{2}$) при $n \to \infty$. Для любого номера n найдется номер k_n такой, что урезанная последовательность $\Gamma_{k_n} = \{\gamma_i\}$ ($i \ge k_n$) является d_n-близкой к урезанной последовательности $\Lambda_{k_n} = \{\lambda_i\}$ ($i \ge k_n$). Таким образом, согласно теореме 2 и теореме B из [4] существует множество кружков $E^{(n)} = \bigcup E_i^{(n)}$ линейной плотности не превосходящей $\delta_n = \beta d_n^{\alpha^2}$, такое, что при $z \notin E_i^{(n)}$:

$$|\ln|G(z,p;\Gamma_{k_n})| - \ln|G(z,p;\Lambda_{k_n})|| \le \varepsilon_n \mu(|z|), \quad \rho \notin \mathbf{N}, \tag{27}$$

$$|\ln|G^*(z,p;\Gamma_{k_n}|\Lambda_{k_n})| - \ln|G^*(z,p;\Lambda_{k_n})|| \le \varepsilon_n \mu(|z|), \quad \rho \in \mathbf{N}. \tag{28}$$

Здесь $\varepsilon_n = O_\rho(c)\frac{d_n^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$. Если r_n достаточно велико, то в силу (1) при $|z| \ge r_n$

$$\begin{gathered} |\ln|G(z,p;\Gamma)| - \ln|G(z,p;\Gamma_{k_n})|| \le \varepsilon_n \mu(|z|), \\ |\ln|G(z,p;\Lambda_{k_n})| - \ln|G(z,p;\Lambda)|| \le \varepsilon_n \mu(|z|), \end{gathered} \tag{29}$$

если $\rho \notin \mathbf{N}$, и

$$\begin{gathered} |\ln|G^*(z,p;\Lambda)| - \ln|G^*(z,p;\Lambda_{k_n})|| \le \varepsilon_n \mu(|z|), \\ |\ln|G^*(z,p;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G^*(z,p;\Gamma_{k_n}|\Lambda_{k_n})|| \le \varepsilon_n \mu(|z|), \end{gathered} \tag{30}$$

если $\rho \in \mathbf{N}$. Пусть $E_n = \bigcup e_i^{(n)}$ — множество кружков, полученное добавлением к $E^{(n)}$ круга $|z| \le r_n$. Линейная плотность при этом не меняется и, значит, по-прежнему не превосходит δ_n. Из неравенств (27), (28), (29) и (30) следует, что

$$|\ln|G(z,p;\Gamma)| - \ln|G(z,p;\Lambda)|| \le 3\varepsilon_n \mu(|z|), \quad z \notin e_i^{(n)},\ \rho \in \mathbf{N}, \tag{31}$$

$$|\ln|G^*(z,p;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G^*(z,p;\Lambda)|| \le 3\varepsilon_n \mu(|z|), \quad z \notin e_i^{(n)},\ \rho \notin \mathbf{N}. \tag{32}$$

Теперь задача заключается в следующем: из «частей» множеств кружков E_n составить новое множество кружков $E = \bigcup e_i$ нулевой линейной плотности, такое, что при $z \to \infty$, $z \notin e_i$,

$$|\ln|G(z,p;\Gamma)| - \ln|G(z,p;\Lambda)|| \le o\left(\mu(|z|)\right),\ \rho \in \mathbf{N}, \tag{33}$$

$$|\ln|G^*(z,p;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G^*(z,p;\Lambda)|| \le o\left(\mu(|z|)\right),\ \rho \notin \mathbf{N}. \tag{34}$$

Для этой цели воспользуемся процедурой из работы [1, доказательство леммы]. Пусть R_1 столь велико, что $P_{E_1}(r) + P_{E_2}(r) < 2(\delta_1 + \delta_2)$ при $r \ge R_1$ и, кроме того, окружность $|z| = R_1$ не пересекает кружки из E_1 и E_2. Такое r_1 всегда можно подобрать, если δ_1, δ_2 достаточно малы. Обозначим через Q_1 множество кружков из E_1, принадлежащих кругу $|z| \le R_1$. Выбираем теперь R_2 так, что $P_{Q_1}(r) + P_{E_2}(r) + P_{E_3}(r) < 2(\delta_2 + \delta_3)$ при $r \ge R_2$, и окружность $|z| = R_2$ не пересекает кружки из E_2 и E_3. Пусть Q_2 — множество кружков из E_2, принадлежащих кольцу $R_1 \le |z| \le R_2$. Подбираем R_3 так, что $P_{Q_1}(r) + P_{Q_2}(r) + P_{E_3}(r) + P_{E_4}(r) < 2(\delta_3 + \delta_4)$ при $r \ge R_3$, и окружность $|z| = R_3$ не пересекает кружки из E_3 и E_4. Пусть Q_3 — множество кружков из E_3, принадлежащих кольцу $R_2 \le |z| \le R_3$, и т.д. Рассмотрим объединение $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$. Линейная плотность этого множества кружков равна нулю. Действительно, при $R_i \le r \le R_{i+1}$ имеем

$$P_E(r) \le P_{Q_1}(r) + \dots + P_{Q_{i+1}}(r) \le P_{Q_1}(r) + \dots + P_{Q_{i-1}}(r) + P_{E_i}(r) + P_{E_{i+1}}(r) \le 2(\delta_i + \delta_{i+1}).$$

Значит, $P_E(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Проверим оценки (33), (34). Пусть $z \notin E$ и $R_{n-1} \le |z| \le R_n$. Тогда $z \notin E_n$, и, значит, при этих z имеют место оценки (31), (32). Так как это имеет место при всех n, то отсюда и следуют оценки (33), (34). Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы о расщеплении. Суть дальнейших построений сводится к следующему: комплексная плоскость специальным образом разбивается на «малые» ячейки; каждая группа точек λ_i, попадающих в отдельную ячейку, разбивается на две части, различающиеся по числу содержащихся в них членов, самое большее на единицу: одна из этих частей относится к A, другая к B; последовательности A и B, составленные таким образом, будут искомыми.

Начнем реализацию намеченного плана. Подбираем убывающую последовательность σ_n, $1 \geq \sigma_n > > 0$, такую, чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sigma_{n+1} < \infty$. При натуральном ρ предполагаем дополнительно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1+\sigma_i)^{-\frac{\rho}{2}} < \infty. \tag{35}$$

Можно, например, положить $\sigma_n = n^{-q}$ ($\frac{1}{2} < q < 1$). Действительно,

$$\prod_{i=1}^{n} (1+\sigma_i)^{-\frac{\rho}{2}} = \exp\left\{-\frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+i^{-q}\right)\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\rho}{4}\sum_{i=1}^{n} i^{-q}\right\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1+\sigma_i)^{-\frac{\rho}{2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^q \exp\left\{-\frac{\rho}{4}\sum_{i=1}^{n} i^{-q}\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^q \exp\left\{-\frac{\rho}{4} n^{1-q}\right\}.$$

Пусть $r_0 = 0, r_1 = t(1+\sigma_1), \ldots, r_n = t(1+\sigma_1)\cdots(1+\sigma_n), \ldots$. Параметр $t > 0$ подбирается так, чтобы окружности $|z| = r_n$ не пересекали точек λ_i. Эти окружности разбивают комплексную плоскость на кольца $R_n = \{z : r_n < |z| \leq r_{n+1}\}$, $i = 0, 1, \ldots$. Отрезками лучей, исходящими из начала, разбивается каждое кольцо R_n на $[\sigma_n^{-1}]$ одинаковых кольцевых секторов, причем так, чтобы стороны этих секторов не пересекали точек λ_i. Эти кольцевые секторы будем называть ячейками. Перенумеруем ячейки внутри колец и обозначим через $\Delta_{s,q}$ q-ю ячейку s-го кольца. Исследуем свойства такого разбиения.

а) Пусть d_s — диаметр ячеек s-го кольца. Расстояние между окружностями s-го кольца равно $r_{s+1} - r_s = r_s(1+\sigma_{s+1}) - r_s = \sigma_{s+1} r_s \leq \sigma_s r_s$; большая дуга сектора $\Delta_{s,q}$ равна $\frac{2\pi r_{s+1}}{[\sigma_s^{-1}]} = O(\sigma_s r_s)$. Таким образом, для диаметра d_s имеем оценку $d_s = O(\sigma_s r_s)$ ($s \to \infty$).

б) Обозначим через N_k число точек λ_i, содержащихся в k-м кольце. Утверждаем, что при натуральном ρ выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k N_k}{r_k^{\rho}} < +\infty$. Пусть $n(t)$ обозначает число точек λ_i в круге $|z| \leq t$. Используя преобразование Абеля, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k \frac{\sigma_k}{r_k^{\rho}} = -n(r_1)\frac{\sigma_1}{r_1^{\rho}} + \sum_{k=2}^{\infty} n(r_k)\left(\frac{\sigma_{k-1}}{r_{k-1}^{\rho}} - \frac{\sigma_k}{r_k^{\rho}}\right) = -n(r_1)\frac{\sigma_1}{r_1^{\rho}} + \sum_{k=2}^{\infty} n(r_k)\left(\frac{\sigma_{k-1}(\sigma_k+1)^{\rho}}{r_k^{\rho}} - \frac{\sigma_k}{r_k^{\rho}}\right) =$$

$$= -n(r_1)\frac{\sigma_1}{r_1^{\rho}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n(r_k)}{r_k^{\rho}}\left(\sigma_{k-1}\sum_{j=1}^{\rho}\binom{\rho}{j}\sigma_k^j + \sigma_{k-1} - \sigma_k\right) \leq$$

$$\leq -n(r_1)\frac{\sigma_1}{r_1^{\rho}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n(r_k)}{r_k^{\rho}}\left((2^{\rho}-1)\sigma_{k-1}\sigma_k + \sigma_{k-1} - \sigma_k\right).$$

Последний ряд сходится, ибо ряды $\sum \sigma_{k-1}\sigma_k$ и $\sum(\sigma_{k-1} - \sigma_k)$ сходятся и отношение $\frac{n(r_k)}{r_k^{\rho}}$ ограничено.

в) Выберем в каждой ячейке $\Delta_{s,q}$ по одной точке $z_{s,q} \neq 0$. Утверждаем, что при натуральном ρ ряд $\sum\limits_{s,q} |z_{s,q}|^{-\frac{\rho}{2}}$ сходится. В самом деле, в s-м кольце содержится $[\sigma_s^{-1}]$ ячеек; поэтому, принимая во внимание неравенства $|z_{s,q}| \geq r_s$ и условие (35), имеем

$$\sum_{s,q} |z_{s,q}|^{-\frac{\rho}{2}} \leq \sum_{s} [\sigma_s^{-1}] r_s^{-\frac{\rho}{2}} \leq \frac{1}{t}\sum_{s} \sigma_s^{-1}(1+\sigma_1)^{-\frac{\rho}{2}}\cdots(1+\sigma_s)^{-\frac{\rho}{2}} < +\infty.$$

Разбиваем последовательность Λ на группы $\Lambda_{s,q}$ точек λ_i, принадлежащих ячейкам $\Delta_{s,q}$. Каждую группу $\Lambda_{s,q}$ разбиваем на части $\Lambda'_{s,q}$, $\Lambda''_{s,q}$, $\Lambda'''_{s,q}$, требуется при этом, чтобы выполнялись условия:

если группа $\Lambda_{s,q}$ содержит четное число, скажем $2k$, точек, то группы $\Lambda'_{s,q}$, $\Lambda''_{s,q}$ содержат каждая по k точек, а группа $\Lambda'''_{s,q}$ — пустая; если группа $\Lambda_{s,q}$ содержит нечетное число $2k+1$ точек, то группы $\Lambda'_{s,q}$, $\Lambda''_{s,q}$ содержат каждая по k точек, а группа $\Lambda'''_{s,q}$ содержит одну точку. Из групп $\Lambda'_{s,q}$, $\Lambda''_{s,q}$, $\Lambda'''_{s,q}$ составим три последовательности $\Lambda' = \bigcup \Lambda'_{s,q}$, $\Lambda'' = \bigcup \Lambda''_{s,q}$, $\Lambda''' = \bigcup \Lambda'''_{s,q}$. Так как каждая ячейка содержит одинаковое число точек как из Λ' так и из Λ'', то эти две последовательности можно занумеровать таким образом, чтобы точки λ'_i, λ''_i из этих последовательностей с одинаковыми индексами принадлежали одной и той же ячейке. Так как в силу свойства а) разбиения, диаметр ячейки $\Delta_{s,q}$ равен $O(\sigma_s r_s)$ и $\sigma_s \to 0$ при $s \to \infty$, то последовательности Λ' и Λ'' эквивалентны. Поэтому по лемме 4 $G(z,p;\Lambda') \sim G(z,p;\Lambda'')$ при $\rho \notin \mathbf{N}$ и $G^*(z,\rho;\Lambda'|\Lambda'') \sim G^*(z,\rho;\Lambda'')$ при $\rho \in \mathbf{N}$. Рассмотрим отношение $\frac{G(z,\rho;\Lambda')}{G(z,\rho;\Lambda'')}$ при $\rho \in \mathbf{N}$. Имеем

$$\ln\left|\frac{G(z,\rho;\Lambda')}{G(z,\rho;\Lambda'')}\right| = \operatorname{Re}\left\{\frac{z^\rho}{\rho}\sum_{|\lambda''_i|\le|z|}\left(\frac{1}{(\lambda'_i)^\rho} - \frac{1}{(\lambda''_i)^\rho}\right)\right\} + \left\{\ln|G^*(z,\rho;\Lambda'|\Lambda'')| - \ln|G^*(z,\rho;\Lambda'')|\right\}.$$

По доказанному второй член вне некоторого множества кружков нулевой линейной плотности равен $o(\mu(|z|))$. Ряд в первом члене абсолютно сходится. В самом деле, учитывая, что λ'_i, λ''_i принадлежат одной и той же ячейке, имеем

$$\sum_i\left|\frac{1}{(\lambda'_i)^\rho} - \frac{1}{(\lambda''_i)^\rho}\right| = \sum_i|\lambda''_i - \lambda'_i|\left|\frac{\sum\limits_{j=0}^{\rho-1}(\lambda''_i)^j(\lambda'_i)^{\rho-j-1}}{(\lambda'_i\lambda''_i)^\rho}\right| =$$

$$= \sum_i|\lambda''_i - \lambda'_i|\left|\sum_{j=0}^{\rho-1}(\lambda''_i)^{j-\rho}(\lambda'_i)^{-j-1}\right| \le \rho\sum_k\frac{N_k d_k}{r_k^{\rho+1}} = \sum_k O\left(\frac{N_k\sigma_k}{r_k^\rho}\right).$$

В силу свойства б) разбиения последний ряд сходится. Итак, заключаем, что $\frac{G(z,p;\Lambda')}{G(z,p;\Lambda'')} \sim e^{az^\rho}$, где

$$a = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \notin \mathbf{N}, \\ \frac{1}{\rho}\sum\left(\frac{1}{(\lambda'_i)^\rho} - \frac{1}{(\lambda''_i)^\rho}\right) & \text{при } \rho \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь каноническое произведение $G(z,p;\Lambda''')$. Каждая ячейка $\Delta_{s,q}$ содержит не более одной точки из Λ'''. Поэтому при $\rho \in \mathbf{N}$, как следует из свойства в) разбиения, ряд $\sum|\lambda'''_i|^{-\frac{\rho}{2}}$ сходится. Привлекая известный факт из теории целых функций конечного порядка, заключаем, что $G(z,p;\Lambda''') \sim e^{bz^\rho}$, где

$$b = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \notin \mathbf{N}, \\ \frac{1}{\rho}\sum\frac{1}{(\lambda'''_i)^\rho} & \text{при } \rho \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Из вышеизложенного следует, что $\frac{G(z;\Lambda')G(z;\Lambda''')}{G(z;\Lambda'')} \sim e^{(a+b)z^\rho}$. Таким образом, если обозначить через A объединение Λ' и Λ''', а через B — последовательность Λ'' и положить $\alpha = -\frac{a+b}{2}$, то будем иметь $G(z;A)e^{\alpha z^\rho} \sim G(z;B)e^{-\alpha z^\rho}$. Теорема доказана.

Автор благодарит А.Б.Шишкина за внимание к работе и обсуждение результатов.

Библиографический список

1. *Красичков-Терновский И.Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб. 1972. Т. 87(129), № 4. С. 459–489.

2. *Азарин В.С.* О разложении целой функции конечного порядка на сомножители, имеющие заданный рост // Мат. сб. 1973. Т. 90, № 2. С. 229–230.

3. *Юлмухаметов Р.С.* Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica. 1985. Т. 11, № 3. С. 257–520.

4. *Красичков И.Ф.* Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней // Мат. сб. 1966. Т. 70 (112), № 2. С. 198–230.