УДК 517.51

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРОВ ДИАДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Н.С. Полякова

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: Tehhi-N@yandex.ru

В работе указаны условия на ряд по системе характеров диадической группы, при которых конечное или счетное множество является множеством единственности.

Ключевые слова: множество единственности, диадическая группа, характеры, ряды по системе характеров.

On the Uniqueness of Series with Respect to Characters of Dyadic Groups

N.S. Polyakova

Saratov State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: Tehhi-N@yandex.ru

Conditions on series with respect to characters of dyadic groups are specified by which finite or countable set is the set of uniqueness.

Key words: set of uniqueness; dyadic group; characters; series with respect to characters.

Пусть $\mathbb{Z}_2$ — группа целых диадических чисел. Элементами этой группы являются последовательности $t = (t_0, \dots, t_n, \dots)$, где t_n может принимать значения 0 или 1. Топология в множестве таких последовательностей определяется следующим образом: n-я окрестность элемента $t_0 = (t_0^{(0)}, t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_n^{(0)}, \dots)$ состоит из элементов $t = (t_0, \dots, t_n, \dots)$, для которых $t_j = t_j^0$ при $0 \le j \le n-1$. Будем обозначать такую окрестность как $V_n(t_0)$, число n называют рангом окрестности. В дальнейшем, если нам будет неважно, где располагается окрестность, и будет интересовать лишь ее ранг, то будем писать просто V_n.

Отметим, что две произвольные окрестности ранга n или совпадают, или не пересекаются. В дальнейшем для объединения двух непересекающихся окрестностей будем использовать знак «$\bigsqcup$».

Операция сложения в $\mathbb{Z}_2$ определяется как покоординатное сложение по модулю 2 с переносом единицы в следующий разряд [1, с. 23]. В дальнейшем эту групповую операцию будем обозначать «$\dot{+}$».

Функции

$$\chi_{a,n}(g) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} a g_k 2^{k-n}\right), \qquad \chi_0(g) \equiv 1, \tag{1}$$

где $g = (g_0, \dots, g_n, \dots)$, $a = 1, 3, \dots, 2^n - 1$ являются характерами диадической группы [1, с. 62].

Преобразуем (1) к виду

$$\chi_{a,n}(g) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a2\pi i}{2^{n-k}} g_k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{a2\pi i}{2^{n-k}}\right)\right)^{g_k}.$$

Обозначим

$$e_{a,k} = \exp\left(\frac{a2\pi i}{2^k}\right). \tag{2}$$

Тогда

$$\chi_{a,n}(g) = \prod_{k=1}^{n} (e_{a,k})^{g_{n-k}} = (e_{a,1})^{g_{n-1}} \cdot (e_{a,2})^{g_{n-2}} \cdot \dots \cdot (e_{a,n})^{g_0}. \tag{3}$$

Отметим, что $e_{a,1} = -1$ для любого нечетного a. Тогда

$$\chi_{a,n}(g) = (-1)^{g_{n-1}} \cdot (e_{a,2})^{g_{n-2}} \cdot \dots \cdot (e_{a,n})^{g_0}. \tag{4}$$

Отметим несколько свойств, связанных с характерами диадической группы и вытекающих непосредственно из определения и формул (2), (3).

1°. $e_{a,m} = e_{b,m}$, где $a = b (\operatorname{mod} 2^m)$.

2°. $\chi_{a,n}(g)$ — постоянна на окрестностях V_n.

3°. Пусть $\chi_{a,n}(g) \equiv c$, $c \neq 0$ на некоторой окрестности V_n. Рассмотрим окрестность V_{n-1}, содержащую данную окрестность V_n. Тогда для всех $g \in V_{n-1} \setminus V_n \quad \chi_{a,n}(g) = -c$.

4°. $(\chi_{a,n}(g))^2 = (\chi_{a,n}(g))(\chi_{a,n}(g)) = \chi_{a,n-1}(g)$, в частном случае $(e_{a,n})^2 = (e_{a,n})(e_{a,n}) = e_{a,n-1}$.

5°. Если нечетные числа a, b, c связаны соотношением $a + b = 2^m c$, то $(\chi_{a,n}(g))(\chi_{b,n}(g)) = \chi_{c,n-m}(g)$.

6°. Пусть $m > n$. Тогда $\chi_{a,n}(g)\chi_{a,m}(g) = \chi_{(2^{m-n}+1)a,m}(g)$, $\chi_{a,n}(g) \cdot \chi_{b,m}(g) = \chi_{(2^{m-n}a+b),m}(g)$.

7°. Пусть a — произвольное целое положительное нечетное число, такое что $1 \leq a < 2^n$, и пусть $0 < k \leq n-1$. Рассмотрим последовательность чисел $\{a_j\}_{j=1}^{2^{k-1}}$, таких что $a_1 = a, a_{j+1} = (a_j + 2^{n-k+1}) \bmod 2^n$, $j = 1, \ldots, 2^{k-1}-1$. Тогда $e_{a_m,n-k+1} = e_{a_j,n-k+1}$, $1 \leq m, j \leq 2^{k-1}$.

8°. Пусть a — произвольное целое положительное нечетное число, такое что $1 \leq a < 2^{n-1}$. Тогда $\chi_{2^n-a,n}(g) = \overline{\chi_{a,n}(g)}$.

Для целых неотрицательных a и b положим по определению $a \oplus b = (a+b) \bmod 2$.

Выберем произвольную точку $t = (t_0, \ldots, t_n, \ldots)$. Точку $\widetilde{t} = (t_0, \ldots, t_{n-1}, t_n \oplus 1, t_{n+1}, \ldots)$ будем называть симметричной к точке t относительно окрестности V_n и писать $\widetilde{t} \sim^n t$. При этом, если $t_n = 0$, то будем говорить, что t — левая симметричная точка, а $\widetilde{t}$ — ее правая симметричная относительно V_n точка. Если $t_n = 1$, то наоборот.

Пусть $t, \tau, \widetilde{t}, g, \rho \in \mathbb{Z}_2$, тогда очевидны следующие свойства:

9°. $t \sim^n \widetilde{t} <=> \widetilde{t} \sim^n t$.

10°. $g \sim^n t$, $\tau \sim^{n+1} t$, $\rho \sim^{n+1} g => \tau \sim^n \rho$.

Обозначим $1_0 = (1, 0, 0, \ldots)$, $1_k = 1_{k-1} \dot{+} 1_{k-1}$, где $k \in \mathbb{N}$.

Пусть k и n некоторые натуральные числа, такие что $k > n$, $t \sim^n g$. Окрестности $V_k(t)$ и $V_k(g)$ будем называть симметричными относительно окрестности V_n и обозначать $V_k(t) \sim^n V_k(g)$, то есть $V_k(t) = V_k(g) \oplus 1_n$. Будем говорить, что $V_k(t)$ — левая симметричная окрестность, а $V_k(g)$ — ее правая симметричная относительно V_n окрестность, если t — левая симметричная точка, а $\widetilde{t}$ — ее правая симметричная относительно V_n точка.

Разобьем $\mathbb{Z}_2$ на 2^n дизъюнктных окрестностей V_n и пронумеруем их следующим образом:

$$V_n^{(1)} = V_n(0, \ldots, 0, \ldots), \qquad V_n^{(2^k+i)} \sim^{n-(k+1)} V_n^{(i)},$$

т.е. $V_n^{(2^k+i)} = V_n^{(i)} \oplus 1_{n-(k+1)}$, где $k = 0, \ldots, (n-1)$, $i = 1, \ldots, 2^k$. Используя формулу (4), получим

$$\chi_{a,n}(V_n^{(1)}) = 1, \qquad \chi_{a,n}(V_n^{(j)}) = \chi_{a,n}(V_n^{(j-2^{k-1})}) e_{a,k}, \tag{5}$$

где j — произвольное целое число, такое что $1 < j \leq 2^n$, а k выбрано таким образом, что $2^{k-1} < j \leq 2^k$. При этом $V_n^{(j)} = V_n^{(j-2^{k-1})} \oplus 1_{n-k}$.

Укажем еще одно свойство характеров диадической группы, которое непосредственно следует из свойства 7° и формулы (5).

11°. Пусть p — произвольное число, такое что $1 \leq p \leq n$, a, b — нечетные числа, удовлетворяющие условию $a = (b + k2^p) \bmod 2^n$, где $1 \leq k \leq 2^{n-p} - 1$. Тогда в любой точке g окрестности $V_{n-p}^{(1)}$ $\chi_{a,n}(g) = \chi_{b,n}(g)$.

Рассмотрим ряд

$$c_0\chi_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{2^n-1} c_{a,n}\chi_{a,n}(g), \tag{6}$$

где a — нечетные целые числа, $c_{a,n}$ — комплексные числа, $g = (g_0, \ldots, g_n, \ldots)$.

Обозначим $X_n(g) = \sum\limits_{a=1}^{2^n-1} c_{a,n}\chi_{a,n}(g)$, $X_0(g) = c_0$. Тогда ряд (6) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(g). \tag{7}$$

Через S_n обозначим частные суммы $S_n(g) = \sum_{k=0}^{n} X_k(g)$. Очевидны следующие свойства пачек $X_n(g)$

12°. $X_n(g)$ постоянны на V_n.

13°. Если $X_n(V_n) = c = \text{const}$, то $X_n(V_{n-1} \setminus V_n) = -c$.

Теорема 1. *Для любой последовательности* $(c_j)_{j=1}^{2^{n-1}}$ *комплексных чисел найдется такая функция* $X_n(g)$, *что*

$$X_n(g) = \begin{cases} c_j, & \text{если } g \in V_n^{(2j-1)}, \\ -c_j, & \text{если } g \in V_n^{(2j)}. \end{cases}$$

Доказательство. Выберем в каждой окрестности $V_n^{(2j-1)}$ по одной произвольной фиксированной точке g^j. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\sum_{a=1}^{2^n-1} c_{a,n}\chi_{a,n}(g^j) = c_j, \tag{8}$$

где $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Очевидно, что доказав совместность этой системы, мы докажем утверждение теоремы.

Выпишем матрицу C_n размерности $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ системы (8). При этом j-я строка матрицы C_n будет иметь вид $(\chi_{1,n}(g^j), \chi_{3,n}(g^j), \chi_{5,n}(g^j), \ldots, \chi_{2^n-1,n}(g^j))$, где $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Воспользуемся определением характеров диадической группы, формулами (5), а также свойствами 2° и 7°. Тогда первая строка матрицы будет иметь вид $(1, 1, 1, \ldots, 1)$, где единицы повторяются 2^{n-1} раз. Вторая строка матрицы имеет вид $(e_{1,2}, e_{3,2}, \ldots, e_{1,2}, e_{3,2})$, где кортеж $(e_{1,2}, e_{3,2})$ повторяется 2^{n-2} раз. Строка матрицы C_n с номером $(2^{k-2}+1)$, $k = 2, \ldots, n$, будет иметь вид $(e_{1,k}, e_{3,k}, \ldots, e_{2^k-1,k}, e_{1,k}, \ldots, e_{2^k-1,k}, \ldots, e_{1,k}, \ldots, e_{2^k-1,k})$, где кортеж $(e_{1,k}, \ldots, e_{2^k-1,k})$ повторяется 2^{n-k} раза. Пусть число m такое, что $2^{k-2}+1 \le m \le 2^{k-1}$, где $2 \le k \le n$. Используя формулы (5), получим, что элементы m-й строки матрицы C_n получаются умножением соответствующих элементов $(2^{k-2}+1)$-й и $(m-2^{k-2})$-й строк.

Договоримся об обозначении. Если $A = (a_{k,j})$ — матрица размерности $n \times n$, то через $(A)_k$ будем обозначать k-ю строку матрицы A. Будем говорить, что k-я строка есть s-я степень m-й строки матрицы A и писать $(A)_k = ((A)_m)^s$, если $a_{kj} = (a_{mj})^s$ для каждого j, $1 \le j \le n$. Аналогично, через $(A)_k(A)_m$ будем обозначать почленное произведение строк $(A)_k$ и $(A)_m$).

Вернемся к доказательству теоремы. Покажем, что для любого натурального числа $n > 1$ матрица C_n содержит все натуральные степени до $(2^{n-1}-1)$ включительно своей $(2^{n-2}+1)$-й строки и строку, состоящую только из единиц. Доказательство проведем по индукции.

Заметим, что случай $n = 2$ тривиален, так как матрица C_2 содержит только две строки, причем первая состоит только из единиц.

Пусть $n = 3$. Тогда матрица C_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_{1,2} & e_{3,2} & e_{1,2} & e_{3,2} \\ e_{1,3} & e_{3,3} & e_{5,3} & e_{7,3} \\ e_{1,3}e_{1,2} & e_{3,3}e_{3,2} & e_{5,3}e_{1,2} & e_{7,3}e_{3,2} \end{pmatrix}.$$

Используя свойства 1° и 4° видим, что $(C_3)_2 = ((C_3)_3)^2$. Так как по построению $(C_3)_4 = ((C_3)_3) \times \times ((C_3)_2)$, то получаем, что $(C_3)_4 = ((C_3)_3)^3$. Таким образом, матрица C_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_{1,3}^2 & e_{3,3}^2 & e_{5,3}^2 & e_{7,3}^2 \\ e_{1,3} & e_{3,3} & e_{5,3} & e_{7,3} \\ e_{1,3}^3 & e_{3,3}^3 & e_{5,3}^3 & e_{7,3}^3 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что для случая $n = N-1$ утверждение верно. Докажем теперь, что матрица C_N содержит все натуральные степени до $(2^{N-1}-1)$ включительно своей $(2^{N-2}+1)$-й строки и строку, состоящую только из единиц. Разобьем матрицу C_N на три блока

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \multicolumn{2}{c}{A_3} \end{pmatrix},$$

где матрица A_1 имеет размерность $2^{N-1}\times 2^{N-1}$, матрица A_2 — размерность $2^{N-1}\times 2^{N-1}$, матрица A_3 — размерность $2^{N-1}\times 2^{N}$. При этом можно заметить, что матрицы A_1 и A_2 совпадают и равны матрице C_{N-1}, которая по предположению содержит все натуральные степени до $(2^{N-2}-1)$-й включительно своей $(2^{N-3}+1)$-й строки и строку, состоящую только из единиц. Объединим матрицы A_1 и A_2 в один блок B размерности $(N-1)\times N$. Таким образом, матрица C_N примет вид $(B \quad A_3)^T$. Заметим, что блок B так же как и матрица C_{N-1} содержит все натуральные степени до $(2^{N-2}-1)$-й включительно своей $(2^{N-3}+1)$-й строки и строку, состоящую только из единиц. Используя свойства 1° и 4° видно, что $(C_N)_{2^{N-3}+1}=((C_N)_{2^{N-2}+1})^2$. Отсюда получаем, что блок B состоит из строки, состоящей только из единиц, и строк, являющихся различными четными степенями от степени 2 до степени $(2^{N-1}-2)$ включительно строки матрицы C_N с номером $(2^{N-2}+1)$. По построению матрицы C_N видно, что если $1<j\le 2^{N-2}$, то $(A_3)_j=((A_3)_1)((B)_j)$. Поэтому блок A_3 состоит из различных нечетных степеней от 1 до $(2^{N-1}-1)$ включительно строки матрицы C_N с номером $(2^{N-2}+1)$. Таким образом, вся матрица C_N содержит все натуральные степени до $(2^{N-1}-1)$-й включительно своей $(2^{N-2}+1)$-й строки и строку, состоящую только из единиц.

Осталось только заметить, что определитель матрицы C_N — определитель Вандермонда с инверсией строк. Поскольку элементы $(2^{N-2}+1)$-й строки матрицы C_N являются различными, то ее определитель не равен нулю, а значит, исходная система совместна, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Каждая функция $f(g)$, которая принимает постоянные значения на окрестностях ранга m, есть многочлен вида*

$$c_0\chi_0(g)+\sum_{n=1}^{m}\sum_{a=1}^{2^n-1}c_{a,n}\chi_{a,n}(g).$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Пусть $m=0$. Тогда $V_0=\mathbb{Z}_2$ и $f(g)\equiv\lambda$. Отсюда следует, что $f(g)=\lambda=\lambda\chi_0(g)$. Предположим, что для $m=N-1$ любую функцию $f(g)$, принимающую постоянные значения на окрестностях ранга $N-1$, можно представить в виде

$$f(g)=c_0\chi_0(g)+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{a=1}^{2^n-1}c_{a,n}\chi_{a,n}(g).$$

Пусть функция $f(g)$ постоянна на окрестностях ранга N, то есть $f(g)=\lambda_j$, если $g\in V_N^{(j)}$ $(1\le j\le 2^N)$. Рассмотрим функцию $f_1(g)$, постоянную на окрестностях ранга $N-1$, и пусть $f_1(g)=\mu_l$, если $g\in V_{N-1}^{(l)}$ $(1\le l\le 2^{N-1})$. И рассмотрим функцию $X_N(g)$, которую по теореме 1 можно представить в виде

$$X_N(g)=\begin{cases} c_l, & \text{если } g\in V_N^{(2l-1)},\\ -c_l, & \text{если } g\in V_N^{(2l)},\end{cases}$$

где $1\le l\le 2^{N-1}$. Причем коэффициенты c_l и μ_l выбраны таким образом, чтобы для любого l, $1\le l\le 2^{N-1}$, выполнялось

$$\begin{cases}\mu_l+c_l=\lambda_{2l-1},\\ \mu_l-c_l=\lambda_{2l}.\end{cases}$$

Но тогда функцию $f(g)$ можно представить в виде

$$f(g)=f_1(g)+X_N(g)=c_0\chi_0(g)+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{a=1}^{2^n-1}c_{a,n}\chi_{a,n}(g)+\sum_{a=1}^{2^N-1}c_{a,N}\chi_{a,N}(g)=$$

$$=c_0\chi_0(g)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{a=1}^{2^n-1}c_{a,n}\chi_{a,n}(g),$$

что и требовалось доказать.

Определение 1. Пусть $E\subset\mathbb{Z}_2$ — конечное или счетное множество. Множество $I_E=\{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}:\exists\, V_k,\forall\, V_{k+1}\subset V_k, V_{k+1}\cap E\ne\emptyset\}$ будем называть *индексным множеством* для множества E.

Теорема 3. *Пусть:* 1) $E \subset \mathbb{Z}_2$ *— конечное или счетное множество,* I_E *— индексное множество для* E*;* 2) *ряд* (7) *сходится к нулю всюду на* $\mathbb{Z}_2 \setminus E$*;* 3) $X_0 \equiv 0, X_{k+1}(g) \equiv 0$*, для любого* $k \in I_E$*. Тогда* $X_k(g) \equiv 0$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$*.*

Доказательство. Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что не все $X_k \equiv 0$. Пусть k_1 — наименьший из таких индексов. Тогда существует $g \in \mathbb{Z}_2$, что $X_{k_1}(g) = c, c \neq 0$ и для любого $k < k_1$, $X_k(g) \equiv 0$. Но тогда по свойствам 12° и 13° найдется такая окрестность $V_{k_1}^{(j)}$, что $X_{k_1}(V_{k_1}^{(j)}) = c$ и $X_{k_1}(V_{k_1-1} \setminus V_{k_1}^{(j)}) = -c$. Заметим также, что номер $k_1 - 1$ не принадлежит индексному множеству I_E. Следовательно, одна из окрестностей $V_{k_1}^j$ или $V_{k_1-1} \setminus V_{k_1}^j$ не содержит точек из E. Будем обозначать такую окрестность просто V_{k_1}. При этом $X_{k_1}(g) \equiv c_1$ для всех $g \in V_{k_1}$, где $c_1 = c$, если $V_{k_1} = V_{k_1}^{(j)}$, $c_1 = -c$, если $V_{k_1} = V_{k_1-1} \setminus V_{k_1}^{(j)}$. Отметим также, что поскольку $c_1 \neq 0$, то либо $\operatorname{Re} c_1 \neq 0$, либо $\operatorname{Im} c_1 \neq 0$. Пусть для определенности $\operatorname{Re} c_1 = a_1$, $a_1 > 0$.

Если бы при всех $k > k_1$ на V_{k_1} имело место тождество $X_k(g) \equiv 0$, то ряд (7) не сходился бы к нулю на V_{k_1}, что противоречит условию теоремы. Поэтому существует наименьший индекс k_2 ($k_2 > k_1$), такой что $(X_{k_2}) \not\equiv 0$ на V_{k_1}, но тогда $\operatorname{Re}(X_{k_2}(g)) \equiv a_2$, $a_2 \geq 0$, на некоторой окрестности $V_{k_2} \subset V_{k_1}$.

Продолжая это рассуждение, найдем последовательность вложенных окрестностей $V_{k_1} \supset V_{k_2} \supset \supset \ldots \supset V_{k_p} \supset \ldots$, имеющих в пересечении точку g_0, в которой действительная часть ряда (7) равна $a_1 + a_2 + \cdots + a_p + \cdots > 0$. Но это невозможно, так как $g_0 \notin E$. Теорема доказана.

Теорема 3 является окончательной в том смысле, что если рассмотреть индексное множество хотя бы без одного какого-либо элемента, то теорема будет неверна.

Определение 2. Пусть V_n — некоторая окрестность ранга n. Возьмем любую точку $g = (g_k) \in V_n$. Точки $(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots)$ и $(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}, 0, 1, 1, \ldots)$ будем называть *крайними точками* окрестности V_n.

В дальнейшем будем обозначать $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема 4. *Для любого непустого множества* $I \subset \mathbb{N}_0$*, такого что множество* $\mathbb{N}_0 \setminus I$ *счетно, существует множество* $E \subset \mathbb{Z}_2$*, такое что*

1) *его индексное множество совпадает с указанным множеством* I*,*

2) *для любого фиксированного* $k_i \in I$ *найдется ряд вида* (7)*, такой что* $X_{k_i+1} \neq 0, X_0 \equiv 0$ *и* $X_{k+1} \equiv 0$ *для всех* $k \in I$*,* $k \neq k_i$*, и который сходится к нулю всюду на* $\mathbb{Z}_2 \setminus E$*, расходится во всех точках множества* E*, и при этом неверно, что все остальные* $X_k(g) \equiv 0$*.*

3) *найдется ряд вида* (7)*, такой что* $X_0 \neq 0$ *и* $X_{k+1} \equiv 0$ *для всех* $k \in I$*, и который сходится к нулю всюду на* $\mathbb{Z}_2 \setminus E$*, расходится во всех точках множества* E*, и при этом неверно, что все остальные* $X_k(g) \equiv 0$*.*

Доказательство. Доказательство проведем для счетного множества I. Случай, когда I конечно рассматривается аналогично.

1) Пусть нам дано счетное множество $I = \{k_1, \ldots, k_p, \ldots\} \subset \mathbb{N}_0$, такое что множество $\mathbb{N}_0 \setminus I$ счетно, и пусть $k_1 < k_2 < \ldots$. Будем строить множество E, для которого множество I будет индексным множеством. Представим группу $\mathbb{Z}_2$ в виде объединения окрестностей ранга k_1: $\mathbb{Z}_2 = \bigsqcup V_{k_1}$, где k_1 — наименьший элемент из множества I. Выберем одну такую окрестность V_{k_1}, отметим ее крайние точки и включим их в множество E. Представим V_{k_1} в виде дизъюнктного объединения окрестностей V_{k_2}: $V_{k_1} = \bigsqcup V_{k_2}$. В тех окрестностях V_{k_2}, которые уже содержат точку из E, отметим оставшиеся крайние точки и включим их в E. Продолжая этот процесс, мы получим множество $E = \{t^1, t^2, \ldots, t^{2^p}, \ldots\}$ такое, что его индексное множество совпадает с данным $I = \{k_1, \ldots, k_p, \ldots\}$.

2) Выберем теперь произвольное $k_j \in I$ и зафиксируем его. Пусть $X_0 \equiv 0$, $X_{k+1} \equiv 0$ для всех $k \in I$, $k \neq k_j$. Построим такой ряд вида (7), который будет сходиться всюду на $\mathbb{Z}_2 \setminus E$, расходиться во всех точках множества E и для которого $X_{k_j+1} \neq 0$.

Положим $X_k \equiv 0$ для $k = 0, \ldots, k_j$.

Шаг 1. Представим группу $\mathbb{Z}_2$ в виде объединения окрестностей ранга k_j, т.е. $\mathbb{Z}_2 = \bigsqcup V_{k_j}$. По построению, среди них есть 2^{j-1} окрестностей, которые содержат точки из E. Обозначим их $V_{k_j}^{(\alpha)}, \alpha \in J$. Построим $X_{k_j+1}(g)$ так, чтобы $X_{k_j+1}(g) = 0$ вне $\bigsqcup\limits_{\alpha \in J} V_{k_j}^{(\alpha)}$, и при этом $X_{k_i+1}(g) \equiv a$, если $g \in V_{k_j+1}^{(2\alpha-1)}$,

$X_{k_i+1}(g) \equiv -a$, если $g \in V_{k_j+1}^{(2\alpha)}$, где a — некоторое комплексное число не равное нулю. В этом случае,

$$|S_{k_j+1}(g)| = \left|\sum_{k=0}^{k_j+1} X_k(g)\right| = \begin{cases} |a|, & \text{если } g \in V_{k_j+1} \text{ и } V_{k_j+1} \bigcap E \neq \emptyset \\ 0, & \text{если } g \in V_{k_j+1} \text{ и } V_{k_j+1} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Шаг 2. Представим заданное множество I в следующем виде:

$$I = \{K_1, K_1+1, \dots, K_1+m_1-1, K_2, \dots, K_2+m_2-1, \dots, K_p, \dots, K_p+m_p-1, \dots\},$$

где $K_l + m_l < K_{l+1}$ для всех $l \geq 1$.

Таким образом, мы множество I разбиваем на пачки последовательно идущих элементов. При таком разбиении окажется, что для каждого $l \geq 1$ число m_l есть количество элементов в l-й пачке.

Тогда в новом представлении множества I указанное k_j будет иметь вид $K_l + r$, где $l \geq 1, 0 \leq r < m_l$ — фиксированные числа. Тогда $X_{K_l+r+1} = X_{k_j+1}$ и $S_{K_l+r+1} = S_{k_j+1}$.

Рассмотрим два случая: A) $r = m_l - 1$, B) $r < m_l - 1$.

A) Пусть $r = m_l - 1$, тогда k_j будет иметь вид $K_l + m_l - 1$. Представим рассматриваемые окрестности V_{k_j} в виде дизъюнктного объединения двух окрестностей V_{k_j+1}. Так как $k_j + 1 = K_l + m_l \notin I$, то для каждой такой окрестности V_{k_j+1} только одна окрестность $V_{k_j+2} \subset V_{k_j+1}$ содержит точки из E. Поэтому $X_{k_j+2}(g) = X_{K_l+m_l+1}(g)$ будем строить так, чтобы

$$X_{K_l+m_l+1}(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{K_l+m_l}(g) = 0, \\ S_{K_l+m_l}(g), & \text{если } g \in V_{K_l+m_l+1} \text{ и } V_{K_l+m_l+1} \bigcap E \neq \emptyset, \\ -S_{K_l+m_l}(g), & \text{если } g \in V_{K_l+m_l+1} \text{ и } V_{K_l+m_l+1} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|S_{K_l+m_l+1}(g)| = \left|\sum_{k=0}^{K_l+m_l+1} X_k(g)\right| = \begin{cases} 2|a|, & \text{если } g \in V_{K_l+m_l+1} \text{ и } V_{K_l+m_l+1} \bigcap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } g \in V_{K_l+m_l+1} \text{ и } V_{K_l+m_l+1} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

B) Пусть $r < m_l - 1$. Тогда положим $X_{K_l+r+2} \equiv 0, \dots, X_{K_l+m_l} \equiv 0$, а значит и $S_{K_l+r+2} = \dots$ $\dots = S_{K_l+m_l} \equiv S_{K_l+r+1}$. Представим рассматриваемые окрестности V_{K_l+r} в виде дизъюнктного объединения окрестностей $V_{K_l+m_l}$. Так как $K_l + m_l \notin I$, то для каждой такой окрестности $V_{K_l+m_l}$ только одна окрестность $V_{K_l+m_l+1} \subset V_{K_l+m_l}$ содержит точки из E. Поэтому $X_{K_l+m_l+1}(g)$ будем строить так, чтобы

$$X_{K_l+m_l+1}(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{K_l+m_l}(g) = 0, \\ S_{K_l+m_l}(g), & \text{если } g \in V_{K_l+m_l+1} \text{ и } V_{K_l+m_l+1} \bigcap E \neq \emptyset, \\ -S_{K_l+m_l}(g), & \text{если } g \in V_{K_l+m_l+1} \text{ и } V_{K_l+m_l+1} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|S_{K_l+m_l+1}(g)| = \left|\sum_{k=0}^{K_l+m_l+1} X_k(g)\right| = \begin{cases} 2|a|, & \text{если } g \in V_{K_l+m_l+1} \text{ и } V_{K_l+m_l+1} \bigcap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } g \in V_{K_l+m_l+1} \text{ и } V_{K_l+m_l+1} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Шаг 3. Поскольку $K_l + m_l < K_{l+1}$, то $K_{l+1} = K_l + m_l + r_l$, где $r_l \geq 1$. Обозначим $K_l + m_l + h$ $(1 \leq h \leq r_l)$ как H_l. Строим $X_{H_l+1}(g)$, так чтобы

$$X_{H_l+1}(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{H_l}(g) = 0, \\ S_{H_l}(g), & \text{если } g \in V_{H_l+1} \text{ и } V_{H_l+1} \bigcap E \neq \emptyset, \\ -S_{H_l}(g), & \text{если } g \in V_{H_l+1} \text{ и } V_{H_l+1} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда

$$|S_{H_l+1}(g)| = \left|\sum_{k=0}^{H_l+1} X_k(g)\right| = \begin{cases} 2^{h+1}|a|, & \text{если } g \in V_{H_l+1} \text{ и } V_{H_l+1} \bigcap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } g \in V_{H_l+1} \text{ и } V_{H_l+1} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Шаг 4. Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям в пункте B) шага 2 и в шаге 3, получаем при $q > l$

$$\left|S_{K_{q+1}}(g)\right| = \left|\sum_{k=0}^{K_{q+1}} X_k(g)\right| = \begin{cases} 2^{K_{q+1}-K_l-(m_l+\ldots+m_q)}|a|, & \text{если } g \in V_{K_{q+1}} \text{ и } V_{K_{q+1}} \bigcap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } g \in V_{K_{q+1}} \text{ и } V_{K_{q+1}} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Видно, что полученный таким образом ряд вида (7) сходится к нулю всюду на $\mathbb{Z}_2$ вне E и расходится во всех точках множества E.

В случае конечного множества I, когда все k_l исчерпаны, дальнейшие шаги описываются следующим образом.

Пусть $k_l \in I$ и для любого $j \in \mathbb{N} \quad k_l + j \notin I$, тогда полагаем

$$X_{k_l+j+1}(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{k_l+j}(g) = 0, \\ -S_{k_l+j}(g), & \text{если } g \in V_{k_l+j+1} \text{ и } V_{k_l+j+1} \bigcap E = \emptyset, \\ S_{k_l+j}(g), & \text{если } g \in V_{k_l+j+1} \text{ и } V_{k_l+j+1} \bigcap E \neq \emptyset. \end{cases}$$

При этом $$|S_{k_l+j+1}(g)| = \left|\sum_{k=0}^{k_l+j+1} X_k(g)\right| = \begin{cases} 2^j\left|S_{k_l}\right|, & \text{если } g \in V_{k_l+j+1} \text{ и } V_{k_l+j+1} \bigcap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } g \in V_{k_l+j+1} \text{ и } V_{k_l+j+1} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Аналогично 2) доказывается 3).

Работа поддержана грантом Президента РФ для государственной поддержки коллективов ведущих научных школ (*проект* НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.

2. *Морева Н.С.* О единственности кратных рядов Уолша для сходимости по двоичным кубам // Мат. заметки. 2007. Т. 81(4). С. 586–598.

УДК 517.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Э.Ш. Султанов

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
Отдел математики и информатики
E-mail: math.dag@mail.ru

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства полиномов Чебышева $T_n(x,N)$ $(0 \le n \le N-1)$, ортогональных на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ с постоянным весом $\mu(x) = \frac{2}{N}$ (дискретный аналог полиномов Лежандра) при $n = O(N^{\frac{1}{2}})$, $N \to \infty$. Установлена асимптотическая формула, связывающая полиномы $T_n(x,N)$ с полиномами Лежандра $P_n(t)$ для $x = \frac{N}{2}(1+t) - \frac{1}{2}$, для остаточного члена которой получена равномерная относительно $t \in [-1,1]$ оценка, которая, в свою очередь, позволяет доказать неулучшаемую весовую оценку для полиномов Чебышева $T_n(x,N)$.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, асимптотика.

About Asymptotics of Chebyshev Polynomials Orthogonal on an Uniform Net

E.Sh. Sultanov

Dagestan Center of Science RAN,
Department of Mathematics and Informatics
E-mail: math.dag@mail.ru

In this article asymptotic properties of the Chebyshev polynomials $T_n(x,N)$ $(0 \le n \le N-1)$ orthogonal on an uniform net $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ with the constant weight $\mu(x) = \frac{2}{N}$ (discrete analog of the Legendre polynomials) by $n = O(N^{\frac{1}{2}})$, $N \to \infty$ were researched. The asymptotic formula that is relating polynomials $T_n(x,N)$ with Legendre polynomials $P_n(t)$ for $x = \frac{N}{2}(1+t) - \frac{1}{2}$ was determined. The uniform estimation of remainder term of the formula relative to $t \in [-1,1]$, that in turn allows to prove unimprovable estimation of Chebyshev polynomials $T_n(x,N)$, was obtained.

Key words: orthogonal polynomials, asymptotics.