УДК 512.643.2+512.558

ФОРМУЛЫ КРАМЕРА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ НАД БУЛЕВОЙ АЛГЕБРОЙ

В. Б. Поплавский

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: poplavskivb@mail.ru

Получены аналоги классических формул Крамера для систем линейных уравнений и неравенств с квадратной матрицей коэффициентов из произвольной булевой алгебры.

Ключевые слова: линейные системы, Крамер, булевы матрицы, обратимые матрицы, детерминант, перманент.

Cramer's Formulas for Systems of Linear Equations and Inequalities Over Boolean Algebra

V. B. Poplavski

Saratov State University
Chair of Geometry
E-mail: poplavskivb@mail.ru

There obtained analogies of classical Cramer's formulas for systems of linear equations and inequalities with square matrix of coefficients from Boolean algebra.

Key words: linear systems, Cramer, Boolean matrices, invertible matrices, determinant, permanent.

ВВЕДЕНИЕ

Теория детерминантов квадратных матриц с элементами из коммутативного кольца возникла из проблемы классификации алгебраических кривых в результате поиска Габриэлем Крамером способа решения систем линейных уравнений (1750 г.). Привлекая своим изяществом, формулы Крамера подвигнули к построению теории определителей над полями и распространению её на тела, кольца и полукольца.

Так, первые попытки введения «некоммутативных» детерминантов были сделаны Артуром Кэли для кватернионов. Далее, в основном в XX веке, с возникновением задач физики высоких энергий и теории элементарных частиц происходит появление различных типов некоммутативных определителей [1]. Последователи Ж. Дьёдонне [2, 3] вводят понятие определителя как гомоморфизма, определённого на группе обратимых квадратных матрицах над телом в его факторгруппу по коммутанту, т. е. как отображение, удовлетворяющее классической формуле Коши – Бине для определителей произведения квадратных матриц. Всякий гомоморфизм мультипликативной полугруппы квадратных матриц с элементами из некоторого кольца в некоторую коммутативную полугруппу с единицей, как показал И. С. Понизовский [4], можно рассматривать как определитель со свойствами аддитивности для строк и столбцов, левой однородностью для строк и правой однородностью для столбцов, обладающий в некотором смысле антиперестановочностью строк и столбцов и позволяющий считать обратимость матрицы A, эквивалентной условию $\det A \neq 0$. Такой подход позволяет в некоторых случаях получить выражение элементов обратных матриц через детерминант и записать решения систем линейных уравнений в форме, аналогичной формулам Крамера (см., например, [5]).

Стремление ввести определитель квадратной матрицы в случае коммутативного полукольца также наталкивается на определенные проблемы. Это прежде всего происходит от того, что не все элементы полукольца имеют аддитивные обратные. Для матриц с элементами из коммутативного полукольца такие проблемы решались (например, в работах [6–10] и автором этой статьи) в случае произвольной булевой алгебры.

Определяя детерминант квадратной матрицы с элементами из произвольной булевой алгебры через симметрическую разность полуперманентов, определяемых ниже, мы не получаем гомоморфизма мультипликативной полугруппы квадратных матриц в коммутативное полукольцо, каковым является булева алгебра. Кроме этого он не обладает свойством полилинейности относительно строк и столбцов. Однако для такого детерминанта выполняется неравенство: $\det AB \leq \det A \cdot \det B$ и некоторое неравенство, заменяющее полилинейность относительно строк и столбцов. Это позволяет доказать, что введенный таким образом детерминант является инвариантом $\mathbf{H}$-классов Грина в частичной полугруппе булевых матриц всевозможных размеров. Более того, оказывается, что такой определитель даёт возможность ввести понятие минорного ранга, аналогичного соответствующему понятию в теории над полем. Этот ранг является инвариантом $\mathbf{D}$-классов или совпадающих с ними $\mathbf{J}$-классов Грина в частичной полугруппе булевых матриц всевозможных размеров. Эти и другие свойства таких булевых определителей, а также их приложения, можно найти в работе [11].

Метод решения линейных систем Крамера тесно связан с формулами разложения детерминантов по строке или столбцу, а также с выражением элементов обратной матрицы через алгебраические дополнения. Для матриц с элементами из коммутативного полукольца такие проблемы решались, например, в работах [7, 8, 10], а в случае произвольной булевой алгебры в статьях [12, 13].

В данной работе мы получаем аналоги классических формул Крамера для квадратных систем линейных уравнений с обратимой матрицей коэффициентов из произвольной булевой алгебры и распространяем их на случай систем линейных неравенств с произвольными квадратными матрицами коэффициентов.

1. ПЕРМАНЕНТЫ, ДЕТЕРМИНАНТЫ И ЭЛЕМЕНТЫ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Матрицы одного и того же размера $m \times n$ с элементами из произвольной булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$ вновь образуют булеву алгебру $\langle \mathbf{B}_{m\times n}, \cup, \cap, ', O, J\rangle$. Операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и дополнения $'$ матриц определяются поэлементно. Нулем и единицей такой вторичной булевой алгебры служат матрицы O и J размера $m \times n$, образованные целиком из нулей и единиц соответственно.

Определение 1.1. *Произведением* матрицы $A = (A^i_j) \in \mathbf{B_{m\times n}}$ на матрицу $B = (B^t_s) \in \mathbf{B_{n\times k}}$ назовём матрицу $C = A \cdot B \in \mathbf{B_{m\times k}}$, элементы которой вычисляются по формуле $C^i_s = \bigcup_{t=1}^{n}(A^i_t \cap B^t_s)$.

Очевидно, что множество квадратных матриц с операцией произведения образует некоммутативную полугруппу с единицей $E = (\delta^i_j)$, где $\delta^i_j = 1$, если $i = j$, и $\delta^i_j = 0$, если $i \neq j$.

Определение 1.2. *Определителем* квадратной матрицы $A = (A^i_j)$ с элементами из произвольной булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$ назовём симметрическую разность

$$\mathrm{Det}\, A = (\overset{+}{\nabla} A \cap (\overset{-}{\nabla} A)') \cup (\overset{-}{\nabla} A \cap (\overset{+}{\nabla} A)')$$

полуперманентов $\overset{+}{\nabla} A = \bigcup\limits_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \overset{+}{P}} (A^{\alpha_1}_1 \cap A^{\alpha_2}_2 \cap \ldots \cap A^{\alpha_n}_n)$ и $\overset{-}{\nabla} A = \bigcup\limits_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \overset{-}{P}} (A^{\alpha_1}_1 \cap A^{\alpha_2}_2 \cap \ldots \cap A^{\alpha_n}_n)$.

В этих формулах $\overset{+}{P}$ и $\overset{-}{P}$ обозначают соответственно все чётные и нечётные подстановки верхних строчных индексов.

Перманентом квадратной матрицы $A = (A^i_j)$ называют $\mathrm{Per}\, A = (\overset{+}{\nabla} A \cup \overset{-}{\nabla} A)$.

Определение 1.3. *Ориентированными присоединенными матрицами* для матрицы A назовём матрицы $\overset{+}{adj}\ A$ и $\overset{-}{adj}\ A$, элементами которых являются $(\overset{\pm}{adj}\ A)^i_j = \overset{i+j}{\sigma} (\overset{\pm}{\nabla})\partial^j_i A$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Здесь символом $\partial^i_j A$ обозначена матрица, полученная из матрицы A удалением i-й строки и j-го столбца с условием, что остальные строки и столбцы сохраняют прежний порядок следования друг за другом, а $\overset{i+j}{\sigma}$ — функция знака. Функции знака $\overset{m}{\sigma}$ на ориентированных полуперманентах квадратной булевой матрицы A определяются следующим образом: $\overset{m}{\sigma} (\overset{+}{\nabla})A = \overset{+}{\nabla} A$, $\overset{m}{\sigma} (\overset{-}{\nabla})A = \overset{-}{\nabla} A$, если m — чётное, и $\overset{m}{\sigma} (\overset{+}{\nabla})A = \overset{-}{\nabla} A$, $\overset{m}{\sigma} (\overset{-}{\nabla})A = \overset{+}{\nabla} A$, если m — нечётное.

Определение 1.4. Матрица A называется *обратимой*, если существует такая матрица A^{-1}, что выполняются равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Матрицу A^{-1} называют *обратной* матрицей для A.

Общий вид обратимой булевой матрицы и различные условия обратимости хорошо известны (см. [8, 13–15]). Вывод формул из следующего утверждения, имеющих определённое сходство с известными выражениями для элементов обратных числовых матриц, можно найти в [12].

Теорема 1.1. *Если $(n\times n)$-матрица A обратима, то элементы обратной булевой матрицы A^{-1} определяются равенствами*

$$(A^{-1})^j_i = \mathrm{Per}\, \partial^i_j A = \mathrm{Det}\, \partial^i_j A, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

т. е. они находятся как алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы A^T.

2. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Рассмотрим систему n линейных уравнений $\bigcup\limits_{k=1}^{n}(A_k^i \cap X^k) = B^i$ с n неизвестными X^i, $i = 1, \dots, n$ и перепишем её в матричной форме: $AX = B$. Аналог классических формул Крамера даёт следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Система n линейных уравнений $\bigcup\limits_{k=1}^{n}(A_k^i \cap X^k) = B^i$ с n неизвестными $\{X^i;\ i = 1, \dots, n\}$ и с обратимой матрицей коэффициентов A имеет единственное решение, которое можно найти по формуле $X^i = \operatorname{Per} A_{\langle B \Rightarrow [i]\rangle}$. Здесь $A_{\langle B \Rightarrow [i]\rangle}$ — матрица, полученная из квадратной булевой матрицы A заменой её i-го столбца столбцом B.*

Доказательство. Так как булева квадратная $n \times n$-матрица A коэффициентов данной системы является обратимой, то, с одной стороны, для каждой неизвестной выражение $X^i = (A^{-1}B)^i = \bigcup_{k=1}^{n}((A^{-1})_k^i \cap B^k)$ даёт единственное решение. С другой стороны, учитывая, что $\operatorname{Per} A_{\langle B \Rightarrow [i]\rangle} = \bigcup_{k=1}^{n}(B^k \cap \operatorname{Per} \partial_i^k A)$ есть разложение перманента по i-му столбцу (см. [12]) и теорему 1.1, получаем $X^i = \operatorname{Per} A_{\langle B \Rightarrow [i]\rangle}$. □

Пример 2.1. Пусть коэффициенты a и b в системе уравнений

$$\begin{cases} (a \cap x) \cup (b \cap y) = c, \\ (b \cap x) \cup (a \cap y) = d \end{cases}$$

удовлетворяют условиям $a \cup b = 1$ и $a \cap b = 0$. Тогда матрица коэффициентов перед неизвестными обратима, и единственное решение, найденное по формулам Крамера, будет следующее: $x = \operatorname{Per}\begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix} = (a \cap c) \cup (b \cap d)$ и $y = \operatorname{Per}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (a \cap d) \cup (b \cap c)$.

Получим теперь формулы Крамера для квадратных систем линейных неравенств.

Теорема 2.3. *Пусть A — квадратная матрица размера $n \times n$ и X, B — столбцы размера $n \times 1$. Тогда из неравенства $AX \subseteq B$ следует, что $\operatorname{Det} A \cap X \subseteq (\overset{+}{adj}\ A \cup \overset{-}{adj}\ A)B$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Det} A \subseteq \operatorname{Per} A$ и для перманентов выполняются формулы разложения по любому столбцу или строке (см. [12]), то несложно показать справедливость неравенства $\operatorname{Det} A \cap E \subseteq ((\overset{+}{adj}\ A)A) \cup ((\overset{-}{adj}\ A)A)$, где E — единичная матрица. Тогда из неравенства $AX \subseteq B$ в силу изотонности произведения получаем неравенства $(\overset{+}{adj}\ A)(AX) \subseteq (\overset{+}{adj}\ A)B$ и $\overset{-}{adj}\ A(AX) \subseteq (\overset{-}{adj}\ A)B$. Следовательно, используя ассоциативность произведения булевых матриц и его дистрибутивность относительно объединения матриц, получаем неравенство $\operatorname{Det} A \cap X \subseteq (\overset{+}{adj}\ A \cup \overset{-}{adj}\ A)B$. □

Продолжение формул Крамера на случай систем линейных неравенств с коэффициентами из произвольной булевой алгебры даёт следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Для решений системы n линейных неравенств $\bigcup_{k=1}^{n}(A_k^i \cap X^k) \subseteq B^i$ с n неизвестными X^i $(i = 1, \dots, n)$ выполняются неравенства $\operatorname{Det} A \cap X^i \subseteq \operatorname{Per} A_{\langle B \Rightarrow [i]\rangle}$.*

Доказательство. Указанные неравенства получаются из формулы предыдущей теоремы 2.3 переходом к её поэлементной записи и формул разложения полуперманентов для матрицы $A_{\langle B \Rightarrow [i]\rangle}$ по столбцу B. □

Пример 2.2. Пусть A — квадратная матрица, а X и O — столбцы в уравнении $AX = O$ над произвольной булевой алгеброй. Если $\operatorname{Det} A = 1$, то $X = O$ является единственным решением этого уравнения. Действительно, так как $AX = O \leftrightarrow AX \subseteq O$, то выполняются формулы предыдущей теоремы и $X^i \subseteq \operatorname{Per} A_{\langle O \Rightarrow [i]\rangle}$. В правых частях последних формул находятся перманенты матриц с нулевым столбцом, а такие перманенты равны нулю. Таким образом, $X^i \subseteq \operatorname{Per} A_{\langle O \Rightarrow [i]\rangle} = 0$ для всех значений i, поэтому $X = O$ является единственным решением уравнения $AX = O$.

В качестве следствий из рассмотренного примера получаем, во-первых, нулевая линейная комбинация строк или столбцов квадратной матрицы над произвольной булевой алгеброй с единичным детерминантом возможна только с нулевыми коэффициентами. Во-вторых, булевы квадратные матрицы с детерминантом равным единице дают примеры не взаимно однозначных (необратимых) в общем случае линейных операторов, определенных на полумодуле булевых векторов-столбцов, с ядром, состоящим из одного лишь нуля.

Библиографический список

1. *Дуплий С. А., Котульская О. И.* Квазидетерминанты, некоммутативные детерминанты и необратимые суперматричные структуры // Вестн. Харьков. национального ун-та. 2003. Т. 585, вып. 1, 21. С. 19–28.

2. *Dieudonne' J.* Les determinants sur un corps noncommutatiff // Bul. Soc. Math. France. 1943. Vol. 71. P. 27–45.

3. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969. 284 с.

4. *Понизовский И. С.* Об определителе матриц с элементами из некоторого кольца // Мат. сборник. 1958. Т. 45 (87), № 1. С. 3–16.

5. *Кирчей И. И.* Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, № 4. С. 67–94.

6. *Соколов О. Б.* Применение булевых определителей к анализу логических многополюсников // Ученые записки Казанск. госун-та. 1963. Т. 123, № 6. С. 155–164.

7. *Chesley D. S., Bevis J. H.* Determinants for matrices over lattices // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1969. A. 68, № 2. P. 138–144.

8. *Reutenauer C., Straubing H.* Inversion of matrices over a commutative semiring // J. of Algebra. 1984. Vol. 88. P. 350–360.

9. *Kuntzmann J.* Théorie des réseaux (graphes). Paris: Dunod, 1972.

10. *Poplin P. L., Hartwig R. E.* Determinantal identities over commutative semirings // Linear Algebra Appl. 2004. Vol. 387. P. 99–132.

11. *Поплавский В. Б.* О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 42–60.

12. *Поплавский В. Б.* О разложении определителей булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып. 4. С. 199–223.

13. *Поплавский В. Б.* Обратимые и присоединенные булевы матрицы // Чебышевский сб. 2005. Т. 6, вып. 1. С. 174–181.

14. *Rutherford D. E.* Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6, № 1. P. 49–53.

15. *Скорняков Л. А.* Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 2. С. 182–185.

УДК 512.548 + 512.571

О КОНГРУЭНЦИЯХ ЧАСТИЧНЫХ n-АРНЫХ ГРУППОИДОВ

А.В. Решетников

Московский институт электронной техники,
кафедра высшей математики – 1
E-mail: a_reshetnikov@lavabit.com

Введено понятие R_i-конгруэнции частичного n-арного группоида как обобщение понятия правой или левой конгруэнции обычного группоида. Доказано, что при фиксированном i R_i-конгруэнции частичного n-арного группоида G образуют решётку, в которой решётка конгруэнций на G не обязатльно является подрешёткой. Построен пример, когда решётка конгруэнций частичного n-арного группоида G не является подрешёткой решётки отношений эквивалентности на G. Даётся характеристика частичных n-арных группоидов, на которых при некотором i каждое отношение эквивалентности является R_i-конгруэнцией.

Ключевые слова: частичный группоид, n-арный группоид, решётка конгруэнций, решётка односторонних конгруэнций, решётка отношений эквивалентности.

On Congruences of Partial n-ary Groupoids

A.V. Reshetnikov

Moscow Institute of Electronic Technology,
Chair of Higher Mathematics – 1
E-mail: a_reshetnikov@lavabit.com

R_i-congruence is defined for partial n-ary groupoids as a generalization of right congruence of a full binary groupoid. It is proved that for any i the R_i-congruences of a partial n-ary groupoid G form a lattice, where the congruence lattice of G is not necessary a sublattice. An example is given, demonstrating that the congruence lattice of a partial n-ary groupoid is not always a sublattice of the equivalence relations lattice of G. The partial n-ary groupoids G are characterized such that for some i, all the equivalence relations on G are its R_i-congruences.

Key words: partial groupoid, n-ary groupoid, congruence lattice, one-sided congruence lattice, equivalence relation lattice.

Свойства конгруэнций универсальных алгебр активно изучаются многими авторами, и в этом направлении имеется немало интересных результатов; их обзор пердставлен, например, в [1]. Хорошо известно, что конгруэнции произвольной универсальной алгебры A образуют решётку по включению, и эта решётка является подрешёткой решётки отношений эквивалентности на множестве A. В работе [2] изучались алгебры, у которых конгруэнцией является любое отношение эквивалентности. Для таких алгебр была получена простая характеризация. К тому же она была уточнена для частных случаев универсальных алгебр — группоидов и полугрупп [2].