Библиографический список

1. *Wille R.* Bedeutungen von Begriffsverbanden // *Ganter B., Wille R., Wolff K.E.* Beitrage zur Begriffsanalyse. B. I. Mannheim: Wissenschaftsverlag, 1987. P. 161–211.
2. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis — Mathematical Foundations. Berlin: Springer, 1998.
3. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.
4. *Новиков В.Е.* Генераторы концептов в проблеме распознавания образов // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XIV Междунар. конф. М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2005.

УДК 512.643.2+512.558

О НУЛЯХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В.Б. Поплавский

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: poplavskivb@mail.ru

В статье изучаются свойства внешностей и внутренностей матриц с элементами из произвольной булевой алгебры. Внешняя и внутренняя части образуют вырожденную часть матрицы, определитель которой равен нулю. Показано, в частности, что внешние матрицы образуют нормальные множества в булевой алгебре всех булевых квадратных матриц и нижнюю полурешетку, а внутренности –- верхнюю полурешетку, которой принадлежат линейные комбинации и даже многочлены от внутренних матриц.

Ключевые слова: булевы матрицы, определитель, вырожденные матрицы.

On Determinant Zeros of Boolean Matrices

V.B. Poplavski

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: poplavskivb@mail.ru

The properties of exteriority and interiority of square matrices with elements from arbitrary Boolean algebra are studied in this paper. The exterior and interior parts form a degenerate part of a matrix with zero determinant. It is shown, in particular, that the set of exterior parts is a normal set in the Boolean algebra of all Boolean square matrices and it is a lower semilattice. The set of interior parts is an upper semilattice. Moreover linear combinations and even polynomials of the interiorities also belong to it.

Key words: Boolean matrices, determinant, degenerate matrices.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\langle \mathbf{B}_{n\times n}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$ есть булева алгебра квадратных матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$. Операции $\cup, \cap, '$ (объединение, пересечение и дополнение) и, следовательно, отношение частичного порядка $\subseteq$ определяются для матриц поэлементно. Нулем и единицей такой вторичной булевой алгебры служат матрицы O и J, образованные целиком из нулей 0 и единиц 1 соответственно. С другой стороны, матрицы из $\mathbf{B}_{n\times n}$ образуют полумодуль с двумя операциями, объединением матриц (заменяющим сложение) $A \cup B = (a^i_j \cup b^i_j) \in \mathbf{B}_{n\times n}$ и пересечением матрицы с элементом из булевой алгебры (заменяющим умножение на скаляр) $\lambda \cap A = (\lambda \cap a^i_j) \in \mathbf{B}_{n\times n}$. Здесь a^i_j и b^i_j — элементы, стоящие в i-й строке и j-м столбце матриц $A = (a^i_j)$ и $B = (b^i_j)$ соответственно. Кроме этого множество $\mathbf{B}_{n\times n}$ относительно произведения, определяемого для матриц $A = (a^i_j)$ и $B = (b^i_j)$ как $C = A \sqcap B$ с элементами $c^i_s = \bigcup_{t=1}^n (a^i_t \cap b^t_s)$, образует решеточно упорядоченную полугруппу с единицей E. Здесь E — матрица, по главной диагонали которой стоят единицы, а на остальных местах — нули.

Пусть $\overset{+}{P}$ и $\overset{-}{P}$ обозначают множества всех четных и нечетных n-подстановок ($n \geq 2$). Полуперманенты, определяемые формулами

$$\overset{+}{\nabla} A = \bigcup_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in \overset{+}{P}} \bigcap_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}, \qquad \overset{-}{\nabla} A = \bigcup_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in \overset{-}{P}} \bigcap_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k},$$

позволяют рассмотреть перманент $\mathrm{Per}\, A = \overset{+}{\nabla} A \cup \overset{-}{\nabla} A$, определитель, равный симметрической разности полуперманентов, т. е. $\mathrm{Det}\, A = (\overset{+}{\nabla} A \setminus \overset{-}{\nabla} A) \cup (\overset{-}{\nabla} A \setminus \overset{+}{\nabla} A)$, и общую часть полуперманентов

$\Delta A = \overset{+}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} A$ для любой матрицы A. Ясно, что $\mathrm{Per}\, A = \mathrm{Det}\, A \cup \Delta A$ и из определения перманента и детерминанта квадратной булевой матрицы автоматически следует выполнение неравенства $\mathrm{Det}\, A \subseteq \mathrm{Per}\, A$.

Любая матрица может быть представлена в виде объединения $A = \hat{A} \cup \overset{o}{A} \cup \check{A}$ внешней $\hat{A}$, детерминированной $\overset{o}{A}$ и $\check{A}$ внутренней частей, которые получаются как пересечения $\check{A} = (\mathrm{Per}\, A)' \cap A$, $\overset{o}{A} = \mathrm{Det}\, A \cap A$, $\hat{A} = \triangle A \cap A$. Можно показать [1], что перманенты этих частей удовлетворяют следующим равенствам:

$$\mathrm{Per}\, \check{A} = 0, \qquad \mathrm{Per}\, \overset{o}{A} = \mathrm{Det}\, \overset{o}{A} = \mathrm{Det}\, A, \qquad \mathrm{Per}\, \hat{A} = \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A = \triangle \hat{A} = \triangle A.$$

Также выполняются равенства, дающие дизъюнктные перманентные разложения, разложения общей части и определителя матрицы A:

$$\mathrm{Per}\, A = \mathrm{Per}\, \check{A} \cup \mathrm{Per}\, \overset{o}{A} \cup \mathrm{Per}\, \hat{A}, \qquad \triangle A = \triangle \check{A} \cup \triangle \overset{o}{A} \cup \triangle \hat{A}, \qquad \mathrm{Det}\, A = \mathrm{Det}\, \check{A} \cup \mathrm{Det}\, \overset{o}{A} \cup \mathrm{Det}\, \hat{A},$$

при этом $\triangle \check{A} = \triangle \overset{o}{A} = \mathrm{Det}\, \check{A} = \mathrm{Det}\, \hat{A} = 0$.

Определение 1. Ненулевую матрицу A назовем *внешней* (или *внешностью*), если $A = \check{A}$, *детерминированной*, если $A = \overset{o}{A}$, и *внутренней* (или *внутренностью*), если $A = \hat{A}$. Матрицу $A = \check{A} \cup \hat{A}$ назовем *вырожденной*.

Для детерминированной матрицы выполняется равенство $\overset{o}{A} = \mathrm{Det}\, \overset{o}{A} \cap \overset{o}{A}$, а для внутренней матрицы — $\hat{A} = \mathrm{Det}\, \Delta \hat{A} \cap \hat{A}$.

Следующее утверждение, доказательство которого можно найти в работе [1], указывает на однозначность разложения матрицы A на внешнюю, детерминированную и внутреннюю части. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если $B = \check{B}$ — внешняя, $C = \overset{o}{C}$ — детерминированная и $D = \hat{D}$ — внутренняя матрицы, причем $B \subseteq (\mathrm{Det}\, C \cup \Delta D)' \cap B$ и $\mathrm{Det}\, C \cap \Delta D = 0$, то для внешней, детерминированной и внутренней частей матрицы $A = B \cup C \cup D$ выполняются равенства $\check{A} = B$, $\overset{o}{A} = C$ и $\hat{A} = D$.*

Следует отметить, что для матриц над двухэлементной булевой алгеброй $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ проблема разложения выглядит проще. Возможен один из вариантов: любая (0,1)-матрица является либо внешней, либо детерминированной, либо внутренней.

Представление матрицы $A = \hat{A} \cup \overset{o}{A} \cup \check{A}$ помогает справиться с такими задачами, например, как проблема разложения определителя по строке или столбцу. Как было показано в работе [1], она сводится к разложимости детерминанта внутренности этих матриц. Там же была показана тесная связь проблем обратимости, невырожденности и разложимости детерминанта по строке или столбцу булевых матриц.

Примером внутренних матриц могут служить матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно также увидеть, что всякое рефлексивное бинарное отношение на конечном множестве, содержащее, по крайней мере, две симметричных пары точек, описывается внутренней матрицей. Таким образом, широко используемые в математике бинарные отношения на конечном множестве нередко являются внутренними. К ним можно отнести рефлексивные бинарные отношения (эквивалентности, толерантности, частичного порядка и т.д.) на конечном множестве, свойства детерминантов матриц которых изучались в работе [2]. Можно указать интерпретацию внутренностей и в терминах конечных ориентированных графов. Как мы увидим далее, имеется также схожесть свойств внутренности булевых матриц со свойствами соответствующего топологического понятия.

Множество вырожденных матриц, определяемое условием $\operatorname{Det} A = 0$ или $A = \hat{A} \cup \check{A}$, образует идеал в полугруппе квадратных матриц относительно произведения матриц, что сразу следует из $\operatorname{Det}(A \sqcap B) \subseteq \operatorname{Det} A \cap \operatorname{Det} B$ [3]. Мы покажем, что все внутренние матрицы образуют подполугруппу в этом идеале относительно произведения.

Все сказанное объясняет наш интерес к внешним и внутренним булевым матрицам. Будет показано, в частности, что внешние матрицы образуют нижнюю полурешетку, а главные булевы идеалы, порожденные внешней матрицей, состоят из внешностей. Внутренности образуют верхнюю полурешетку, которой принадлежат линейные комбинации и даже многочлены внутренних матриц. Более того, множество всех внутренностей образует полукольцо с аддитивной операцией $\cup$ и мультипликативной операцией $\sqcap$.

1. СВОЙСТВА ВНЕШНОСТЕЙ

Внешняя булева матрица определяется как матрица, перманент которой равен нулю. Такие матрицы над различными полукольцами хорошо описаны и играют значительную роль в комбинаторной математике. Строение такой матрицы описывается следующей известной теоремой Фробениуса – Кёнига, доказательство которой приводится, например, в работах [4, гл. 7, § 2] и [5, гл. 3, § 2] для неотрицательных матриц и можно дословно повторить для случая матриц с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$.

Теорема 1.1 (Фробениус – Кёниг). *Перманент квадратной матрицы над двухэлементной булевой алгеброй $\mathbf{B}_2$ равен нулю тогда и только тогда, когда в результате перестановок строк или столбцов этой матрицы можно получить нулевую подматрицу размера $s \times t$ с условием $s + t = n + 1$.*

Следующая теорема перечисляет свойства множества всевозможных внешних матриц.

Теорема 1.2. *Следующие свойства внешностей выполняются для любых булевых матриц A, B и элемента $\lambda \in \mathbf{B}$:* 1) $\check{J} = \check{O} = O$; 2) $\check{A} \subseteq A$; 3) $\check{\check{A}} = \check{A}$; 4) *Если* $A \subseteq B = \check{B}$, *то* $A = \check{A}$; 5) $\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\vee} = \check{A} \cap \check{B} \subseteq \overbrace{A \cap B}^{\vee}$; 6) $\overbrace{\lambda \cap \check{A}}^{\vee} = \lambda \cap \check{A} = \overbrace{\lambda \cap A}^{\vee}$; 7) *Если* $A \sqcap B = \overbrace{A \sqcap B}^{\vee}$, *то* $A \cap B = \overbrace{A \cap B}^{\vee}$; 8) $\overbrace{A \sqcap B}^{\vee} \subseteq (\check{A} \sqcap B) \cup (A \sqcap \check{B}) \subseteq A \sqcap B$.

Доказательство. Равенство 1) проверяется непосредственно. Свойство 2) следует из определения внутренности. Справедливость свойства 3) следует из тождества $\operatorname{Per}(\lambda \cap A) = \lambda \cap \operatorname{Per} A$ и равенств

$$\check{\check{A}} = \check{A} \cap (\operatorname{Per} \check{A})' = A \cap (\operatorname{Per} A)' \cap (\operatorname{Per}(A \cap (\operatorname{Per} A)'))' = A \cap (\operatorname{Per} A)' = \check{A}.$$

Для проверки свойства 4) заметим, что из $A \subseteq B = \check{B}$ следует $\operatorname{Per} A \subseteq \operatorname{Per} B = \operatorname{Per} \check{B} = 0$. Поэтому $A = \check{A}$.

Докажем свойство 5). Прежде заметим, что из свойства 2) получаем $\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\vee} \subseteq \check{A} \cap \check{B}$. Учитывая то, что неравенство $C \subseteq D$ для любых матриц C, D влечет $\operatorname{Per} C \subseteq \operatorname{Per} D$, получаем $\operatorname{Per} C \cup \operatorname{Per} D \supseteq \operatorname{Per} C \cap \operatorname{Per} D \supseteq \operatorname{Per}(C \cap D)$. Тогда $(\operatorname{Per} C)' \cap (\operatorname{Per} D)' = (\operatorname{Per} C \cup \operatorname{Per} D)' \subseteq$ $\subseteq (\operatorname{Per} C \cap \operatorname{Per} D)' \subseteq (\operatorname{Per}(C \cap D))'$. Поэтому выполняется

$$\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\vee} = (\check{A} \cap \check{B}) \cap (\operatorname{Per}(\check{A} \cap \check{B}))' \supseteq (\check{A} \cap \check{B}) \cap (\operatorname{Per} \check{A})' \cap (\operatorname{Per} \check{B})' = \check{\check{A}} \cap \check{\check{B}} = \check{A} \cap \check{B}.$$

и, следовательно, равенство $\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\vee} = \check{A} \cap \check{B}$ доказано. Кроме того $\check{A} \cap \check{B} \subseteq \overbrace{A \cap B}^{\vee}$, так как

$$\check{A} \cap \check{B} = A \cap (\operatorname{Per} A)' \cap B \cap (\operatorname{Per} B)' \subseteq (A \cap B) \cap (\operatorname{Per}(A \cap B))' = \overbrace{A \cap B}^{\vee}.$$

При доказательстве свойства 6) снова применим тождество $\operatorname{Per}(\lambda \cap A) = \lambda \cap \operatorname{Per} A$. Тогда

$$\overbrace{\lambda \cap A}^{\vee} = (\lambda \cap A) \cap (\operatorname{Per}(\lambda \cap A))' = \lambda \cap A \cap (\lambda \cap \operatorname{Per} A)' = \lambda \cap A \cap (\lambda' \cup (\operatorname{Per} A)') = \lambda \cap A \cap (\operatorname{Per} A)' = \lambda \cap \check{A}.$$

Далее, $\lambda \cap \check{A} \subseteq \check{A}$ и в силу доказанного свойства 4) получаем $\overbrace{\lambda \cap \check{A}}^{\vee} = \lambda \cap \check{A}$.

Проверим 7). Если $A \sqcap B = \widecheck{A \sqcap B}$, то $\mathrm{Per}\,(A \sqcap B) = 0$. Учитывая $\mathrm{Per}\,(A \sqcap B) \supseteq \mathrm{Per}\,A \cap \mathrm{Per}\,B \supseteq \mathrm{Per}\,(A \cap B)$, получаем $\mathrm{Per}\,(A \cap B) = 0$. Это означает, что $A \cap B = \widecheck{A \cap B}$.

Свойство 8) получим, используя неравенство $(\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))' \subseteq (\mathrm{Per}\,A \cap \mathrm{Per}\,B)'$, или $(\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))' \subseteq (\mathrm{Per}\,A)' \cup (\mathrm{Per}\,B)'$. Тогда $A \cap (\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))' \subseteq A \cap ((\mathrm{Per}\,A)' \cup (\mathrm{Per}\,B)') = \check{A} \cup (A \cap (\mathrm{Per}\,B)')$. Умножая последнее неравенство справа на матрицу B, имеем $(A \cap (\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))') \sqcap B \subseteq (\check{A} \cup (A \cap (\mathrm{Per}\,B)')) \sqcap B$, или $(\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))' \cap (A \sqcap B) \subseteq (\check{A} \cup (A \cap (\mathrm{Per}\,B)')) \sqcap B$. Учитывая дистрибутивность произведения относительно объединения матриц, получим $\widecheck{A \sqcap B} \subseteq (\check{A} \sqcap B) \cup ((A \cap (\mathrm{Per}\,B)') \sqcap B)$. Используя тождество $(\lambda \cap A) \sqcap B = A \sqcap (\lambda \cap B) = (\lambda \cap A) \sqcap (\lambda \cap B)$, получаем $\widecheck{A \sqcap B} \subseteq (\check{A} \sqcap B) \cup (A \sqcap \check{B})$. С другой стороны, так как $\check{A} \subseteq A$, то $\check{A} \sqcap B \subseteq A \sqcap B$. Аналогично $A \sqcap \check{B} \subseteq A \sqcap B$. Поэтому $(\check{A} \sqcap B) \cup (A \sqcap \check{B}) \subseteq A \sqcap B$. $\square$

Здесь и далее существенно используются изотонность перманента и его свойства, а также свойства произведения булевых матриц, о которых изложено в работах [1–3].

Особо отметим, свойство 4) означает, что множество всех внешностей вложено нормально в булеву алгебру квадратных матриц $\mathbf{B}_{n\times n}$, следуя терминологии [6]. Получается, что всякая внешняя матрица $A = \check{A}$ порождает главный идеал $[O, A] = \{B | B \subseteq A = \check{A}\}$, который состоит из внешностей. Свойства 1) и 5) указывают на то, что множество всех внешностей образует нижнюю (минорантную) полурешетку с минимальным элементом $O = \check{O}$.

2. ВНУТРЕННОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Матрица является внутренней тогда и только тогда, когда выполнено $\mathrm{Per}\,A \cap A = A$ и перманент и полуперманенты совпадают: $\mathrm{Per}\,A = \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A = \triangle A$. Как будет показано далее, внутренности образуют верхнюю (мажорантную) полурешетку с наибольшим элементом J. Более того, множество всех внутренностей образует полукольцо с аддитивной операцией $\cup$ и мультипликативной операцией $\sqcap$. Кроме того, множество всех внутренностей замкнуто относительно взятия линейных комбинаций, и, следовательно, любой многочлен от внутренних матриц $f(A) = \bigcup_{i=0}^{k}(\lambda_i \cap A^{n_i})$ является внутренним.

Теорема 2.1. *Следующие свойства внутренностей выполняются для любых булевых матриц A, B и элемента $\lambda \in \mathbf{B}$: 1) $\hat{O} = O$, $\hat{J} = J$; 2) $\hat{A} \subset A$; 3) $\hat{\hat{A}} = \hat{A}$; 4) Если $A \subset B$, то $\hat{A} \subset \hat{B}$; 5) $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} = \widehat{\hat{A} \cap B} = \widehat{A \cap \hat{B}} = \widehat{A \cap B} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B}$; 6) $\widehat{\hat{A} \cup \hat{B}} = \hat{A} \cup \hat{B} \subseteq \widehat{A \cup B}$; 7) $\widehat{\lambda \cap \hat{A}} = \lambda \cap \hat{A} = \widehat{\lambda \cap A}$; 8) $\widehat{\hat{A} \sqcap \hat{B}} = \hat{A} \sqcap \hat{B} \subseteq \widehat{A \sqcap B}$.*

Доказательство. Свойство 1) верно, так как $\hat{O} = \triangle O \cap O = 0 \cap O = O$ и $\hat{J} = \triangle J \cap J = 1 \cap J = J$.

Свойство 2) следует из определения внутренности.

Свойство 3) проверяется непосредственно: $\hat{\hat{A}} = \Delta\hat{A} \cap \hat{A} = \Delta\hat{A} \cap (\Delta A \cap A) = \Delta A \cap A = \hat{A}$.

Свойство 4) следует из того, что неравенство $A \subseteq B$ влечет $\Delta A \subseteq \Delta B$. Следовательно, $A \cap \Delta A \subseteq B \cap \Delta B$, т. е. $\hat{A} \subseteq \hat{B}$.

Для проверки свойства 5) заметим, что из свойств 2) и 4) получаем $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} \subseteq \widehat{A \cap B}$. С другой стороны, выполняется $\Delta(A \cap B) \subseteq \Delta A \cap \Delta B$. Поэтому $\widehat{A \cap B} = \Delta(A \cap B) \cap (A \cap B) \subseteq \Delta A \cap \Delta B \cap A \cap B = \hat{A} \cap \hat{B}$. Таким образом, имеем цепочку неравенств $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} \subseteq \widehat{A \cap B} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B}$, из которой с учетом свойства 4) следует $\widehat{\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}}} \subseteq \widehat{\widehat{A \cap B}} \subseteq \widehat{\hat{A} \cap \hat{B}}$. Применяя к последнему выражению свойство 3), получаем равенство $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} = \hat{A} \cap \hat{B}$. Равенства $\widehat{\hat{A} \cap B} = \widehat{A \cap \hat{B}} = \widehat{A \cap B}$ доказываются аналогично.

Свойство 6) получается из того, что $\hat{A} \cup \hat{B} \supseteq \widehat{\hat{A} \cup \hat{B}} = \Delta(\hat{A} \cup \hat{B}) \cap (\hat{A} \cup \hat{B}) \supseteq (\Delta\hat{A} \cup \Delta\hat{B}) \cap (\hat{A} \cup \hat{B}) \supseteq (\Delta\hat{A} \cap \hat{A}) \cup (\Delta\hat{B} \cap \hat{B}) = (\Delta A \cap A) \cup (\Delta B \cap B) = \hat{A} \cup \hat{B}$.

Проверим свойство 7). Так как $\Delta(\lambda \cap A) = \lambda \cap \Delta A$, тогда $\widehat{\lambda \cap A} = \Delta(\lambda \cap A) \cap (\lambda \cap A) = (\lambda \cap \Delta A \cap A) = \lambda \cap \hat{A}$. Аналогично $\widehat{\lambda \cap \hat{A}} = \Delta(\lambda \cap \hat{A}) \cap (\lambda \cap \hat{A}) = (\lambda \cap \Delta\hat{A}) \cap (\lambda \cap \Delta A \cap A) = \lambda \cap \Delta A \cap A = \lambda \cap \hat{A}$.

Для доказательства формулы 8) сначала покажем, что для всех матриц A и B выполняется неравенство $\Delta A \cap \Delta B \subseteq \Delta(A \sqcap B)$. Для этого воспользуемся известными формулами для полуперманентов (см., например, [7] или [8, § 19]):

$$(\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \sqcap B), \qquad (\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \sqcap B).$$

Тогда $(\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cap (\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \sqcap B)$ и $(\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cap (\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \sqcap B)$. Следовательно, $\Delta A \cap \Delta B \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \sqcap B)$ и $\Delta A \cap \Delta B \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \sqcap B)$. Получаем $\Delta A \cap \Delta B \subseteq \Delta(A \sqcap B)$.

Учитывая тождество $\lambda \cap (A \sqcap B) = (\lambda \cap A) \sqcap B = A \sqcap (\lambda \cap B) = (\lambda \cap A) \sqcap (\lambda \cap B)$, получим

$$\widehat{A \sqcap B} = \Delta(A \sqcap B) \cap (A \sqcap B) \supseteq (\Delta A \cap \Delta B) \cap (A \sqcap B) = (\Delta A \cap A) \sqcap (\Delta B \cap B) = \hat{A} \sqcap \hat{B}.$$

Последнее выражение справедливо, в частности, для внутренних матриц $A = \hat{A}$ и $B = \hat{B}$. Получаем $\widehat{\hat{A} \sqcap \hat{B}} \supseteq \hat{\hat{A}} \sqcap \hat{\hat{B}} = \hat{A} \sqcap \hat{B}$. С другой стороны, верно обратное включение (свойство 2)). Следовательно, выполняется равенство $\widehat{\hat{A} \sqcap \hat{B}} = \hat{A} \sqcap \hat{B}$ для любых квадратных булевых матриц A и B. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть $\widehat{\mathbf{B}}_{n\times n}$ — множество всех внутренних булевых матриц. Тогда*

1) $\widehat{\mathbf{B}}_{n\times n}$ — *верхняя (мажорантная) полурешетка с наибольшим элементом J;*

2) $\widehat{\mathbf{B}}_{n\times n}$ — *полукольцо с аддитивной операцией $\cup$ и мультипликативной операцией $\sqcap$;*

3) $\widehat{\mathbf{B}}_{n\times n}$ — *полумодуль над булевой алгеброй $\mathbf{B}$.*

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из свойств 1) и 6) теоремы 2.1.

Второе следует из свойств 6), 8) теоремы 2.1 и закона дистрибутивности, который, как легко проверить, выполняется с двух сторон для любых булевых $n \times n$-матриц:

$$A \sqcap (B \cup C) = (A \sqcap B) \cup (A \sqcap C), \qquad (A \cup B) \sqcap C = (A \sqcap C) \cup (B \sqcap C).$$

Из свойств 1), 6), 7) теоремы 2.1 следует справедливость третьего утверждения. $\square$

Приведенные в теореме 2.1 свойства 1)–5) показывают, насколько близки между собой введенное здесь понятие «внутренность» булевой квадратной матрицы и понятие «внутренность подмножества топологического пространства». Это объясняет выбор термина «внутренность» для булевой матрицы. От аксиом Куратовского, определяющих топологию через понятие «внутренность подмножества», их отличает неравенство 5), записанное вместо равенства.

Следующее утверждение может служить новым определением внутренности булевой матрицы.

Теорема 2.3. *Внутренность $\hat{A}$ булевой квадратной матрицы A есть наибольшая из всех внутренних матриц, содержащихся в A.*

Доказательство. Предположим, что существует внутренняя матрица $\hat{B}$ и $\hat{A} \subset \hat{B} \subset A$. Из свойства 4) теоремы 2.1 получаем $\hat{\hat{A}} \subset \hat{\hat{B}} \subset \hat{A}$, и тогда, учитывая свойство 3), $\hat{A} = \hat{B}$. $\square$

Пример. Нетрудно показать, что внутренние матрицы размера 2×2 — это в точности матрицы вида $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbf{B}$. Тогда свойство 5), указанное в теореме 2.1, превращается в равенство $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} = \widehat{\hat{A} \cap B} = \widehat{A \cap \hat{B}} = \widehat{A \cap B} = \hat{A} \cap \hat{B}$. Поэтому множество внутренних 2×2-матриц есть открыто-замкнутая топология, которая, если ее рассматривать как булеву алгебру, очевидно, изоморфна исходной булевой алгебре. Однако в случае большего размера матриц можно указать пример таких внутренних матриц, пересечение которых не есть внутренность. Действительно, для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{A}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \hat{B}$$

выполняется $A \cap B = E \neq \hat{E} = O$.

Замечание 2.1. Свойства 5) и 2) теоремы 2.1 дают $\widehat{A \cap B} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B} \subseteq A \cap B$. Тогда из теоремы 2.3 получаем, что пересечение внутренностей $\hat{A} \cap \hat{B}$ есть внутренность тогда и только тогда, когда оно совпадает с внутренностью $\widehat{A \cap B}$. Получается, что любое множество, содержащее O, J и матрицы из $\mathbf{B}_{n\times n}$, попарные пересечения которых являются внутренними матрицами, определяют множество внутренностей для некоторой топологии.

Замечание 2.2. Заметим также, что в случае матриц с элементами из $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ всякая матрица, содержащая ненулевую внутреннюю матрицу, сама является внутренней: $(\hat{A} \subseteq B) \to (\hat{B} = B)$. Это получается из того, что $(\hat{A} \subseteq B) \to (\Delta\hat{A} \subseteq \Delta B)$ и $\Delta\hat{A} = 1$ дает $\Delta B = 1$ и, следовательно, $B = \hat{B}$.

Замечание 2.3. Утверждение, подобное теореме 2.3, для внешних частей булевых матриц не выполняется. Действительно, если для матрицы A существует матрица B такая, что $\check{A} \subseteq \check{B} \subseteq A$, то это влечет неравенства $\check{A} \cap (\mathrm{Per}\, A)' \subseteq \check{B} \cap (\mathrm{Per}\, A)' \subseteq A \cap (\mathrm{Per}\, A)'$ и, следовательно, равенство $\check{A} = \check{B} \cap (\mathrm{Per}\, A)'$. При этом матрицы $\check{A}$ и $\check{B}$ могут быть различными, если рассматривать булеву алгебру мощности $|\mathbf{B}| > 2$. Примером таких матриц над четырехэлементной булевой алгеброй $\mathbf{B} = \{0, a, b, 1\}$ могут служить матрицы

$$\check{A} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \check{B} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ b & b & 0 \end{pmatrix} \subset A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 1 & 1 & 0 \\ b & b & b \end{pmatrix},$$

для которых $\mathrm{Per}\, B = 0$, $\mathrm{Per}\, A = b$ и, следовательно, $(\mathrm{Per}\, A)' = a$.

Библиографический список

1. *Поплавский В.Б.* О разложении определителей булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, № 4. С. 199–223.

2. *Поплавский В.Б.* Объемы и определители степеней транзитивных и рефлексивных булевых отношений на конечных множествах // Изв. Тульск. госун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10, вып. 1. С. 134–141.

3. *Поплавский В.Б.* О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискрет. мат. 2008. Т. 20, № 4. С. 42–60.

4. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982.

5. *Минк Х.* Перманенты. М.: Мир, 1982.

6. *Владимиров Д.А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.

7. *Golan J.S.* Semirings and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

8. *Reutenauer C., Straubing H.* Inversion of matrices over a commutative semiring // J. of Algebra. 1984. № 88. С. 350–360.

УДК 519.83

РАВНОВЕСИЕ В ИГРАХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

В.В. Розен

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: RozenVV@info.sgu.ru

Рассмотрены условия существования ситуаций равновесия в смешанных расширениях игр с упорядоченными исходами. Предложены общие методы описания множества ситуаций равновесия, а также равновесий по Нэшу.

Ключевые слова: ситуация равновесия, равновесие по Нэшу, отношение порядка, вероятностная мера.

Equilibrium in Games with Ordered Outcomes

V.V. Rozen

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: RozenVV@info.sgu.ru

We consider some conditions of existence of equilibrium points in mixed extensions of games with ordered outcomes. General methods for description of the set of equilibrium points and also for Nash equilibrium points are proposed.

Key words: equilibrium points, Nash equilibrium, ordering relation, stochastic measure.

ВВЕДЕНИЕ

Игра с упорядоченными исходами характеризуется тем, что ее целевая структура задана с помощью отношений порядка, выражающих предпочтения игроков на множестве исходов игры. Игра с упорядоченными исходами в нормальной форме задается в виде набора объектов

$$G = \langle (X_i)_{i \in I},\, A,\, (\omega_i)_{i \in I},\, F \rangle, \tag{1}$$

где X_i — множество стратегий игрока $i \in I$, $I = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, A — множество исходов, ω_i — отношение (частичного) порядка на A, выражающее предпочтения игрока i, $F\colon \prod\limits_{i \in I} X_i \to A$ — функция реализации.

