УДК 517.98

ОЦЕНИВАНИЕ НОРМ ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет,
кафедра высшей математики
E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Рассматривается проблема существования решений задач со спектральным параметром для уравнений с разрывными операторами. Получены оценки норм оператора для исследуемых задач. В качестве приложения рассмотрена задача Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка с разрывной нелинейностью.

Ключевые слова: спектральный параметр, разрывный оператор, оценки норм оператора.

Estimation of Operator Norms in Eigenvalue Problems for Equations with Discontinuous Operators

D. K. Potapov

Saint-Petersburg State University,
Chair of Higher Mathematics
E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Existence of solutions of problems with a spectral parameter for the equations with discontinuous operators is considered. The estimations of the operator norms for these problems are received. Dirichlet problem for the higher-order elliptic equation with discontinuous nonlinearity is considered as an appendix.

Key words: spectral parameter, discontinuous operator, estimations of operator norms.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЩИЙ РЕЗУЛЬТАТ

В вещественном рефлексивном банаховом пространстве E рассматривается вопрос существования ненулевых решений уравнения

$$Au = \lambda T u \tag{1}$$

в зависимости от параметра λ. Здесь A – линейный самосопряженный оператор из E в E^* (E^* – сопряженное с E пространство), $T : E \to E^*$ – разрывное, компактное или антимонотонное отображение, ограниченное на E. Через (z, x) будем обозначать значение функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$.

Определение 1. Линейный оператор $A : E \to E^*$ называется *самосопряженным*, если $(Ax, h) = (Ah, x)$ для любых $x, h \in E$.

Определение 2. Отображение $T : E \to E^*$ называется *ограниченным* на E, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $\|Tx\| \le M$ для всех $x \in E$.

Определение 3. Отображение $T : E \to E^*$ называется *компактным* на E, если ограниченные множества из E переводит в предкомпактные в E^*, т. е. множество TG предкомпактное в E^* для любого ограниченного подмножества G множества E.

Определение 4. Отображение $T : E \to E^*$ называется *монотонным* на E, если $(Tx - Ty, x - y) \ge 0$ для всех $x, y \in E$. Отображение $T : E \to E^*$ называют *антимонотонным*, если отображение $-T$ монотонно.

Как и ранее [1–3], уравнение (1) изучается вариационным методом. Для реализации вариационного подхода к исследованию уравнения (1) дополнительно потребуем квазипотенциальность оператора T.

Определение 5. Отображение $T : E \to E^*$ называется *квазипотенциальным*, если существует функционал $f : E \to \mathbf{R}$, для которого верно равенство

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (T(x+th), h)\, dt, \qquad \forall\ x, h \in E$$

(интеграл понимается в смысле Лебега). При этом f называют *квазипотенциалом* оператора T.

Так как в уравнении (1) оператор A линейный и самосопряженный, то он потенциален, и его потенциал $\phi(u) = \frac{1}{2}(Au, u)$ [4]. Свяжем с уравнением (1) функционал $f^\lambda(u) = \phi(u) - \lambda f(u)$, где f — квазипотенциал оператора T. Не теряя общности, будем считать, что $f(0) = 0$.

Основным результатом работы является теорема 1, в которой используются следующие понятия.

Определение 6. Элемент $x \in E$ называется *точкой разрыва* оператора $T : E \to E^*$, если найдется $h \in E$, для которого либо $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th),h)$ не существует, либо $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th),h) \neq (Tx,h)$.

Определение 7. Элемент $x \in E$ называется *регулярной точкой* для оператора $T : E \to E^*$, если для некоторого $h \in E$ $\overline{\lim\limits_{t\to +0}}(T(x+th),h) < 0$.

Определение 8. Отображение $T : E \to E^*$ называется *радиально непрерывным в точке* $x \in E$, если для любого $h \in E$ $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th),h) = (Tx,h)$.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) A — линейный самосопряженный оператор, действующий из вещественного рефлексивного банахова пространства E в сопряженное пространство E^*. Пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств E_1 и E_2, $E_1 = \ker A$, причем существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $(Au,u) \geq \alpha\|u\|^2$ для любого $u \in E_2$;

2) отображение T компактное или антимонотонное, квазипотенциальное (с квазипотенциалом f) и ограниченное на E (с константой M), $f(0) = 0$ и для некоторого $u_0 \in E$ значение $f(u_0) > 0$; если $E_1 \neq \{0\}$, то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{u\in E_1, \|u\|\to +\infty} f(u) = -\infty$;

3) если отображение T компактное, то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{t\to +0}(T(u+th) - Tu, h) \geq 0$ для всех $u, h \in E$;

4) если отображение T антимонотонное, то дополнительно предполагается, что любая точка разрыва оператора T при $\lambda > \lambda_0 > 0$ регулярная для $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$ (λ_0 – величина, начиная с которой задача на собственные значения разрешима).

Тогда для ненулевого решения u уравнения (1) *справедливы следующие оценки норм оператора A:*

$$0 \leq \frac{\frac{1}{2}(Au_0,u_0)}{\int\limits_0^1 (T(tu_0),u_0)dt}||Tu|| < ||Au|| \leq C,$$

где C — некоторая положительная константа.

Доказательство. В работах [1, 2] доказано, что при сделанных предположениях найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ существует $u \in E, u \neq 0$, для которого $f^\lambda(u) = \inf\limits_{v\in E} f^\lambda(v)$, и любое такое u является решением уравнения (1) и точкой радиальной непрерывности оператора T. Отсюда следует, что $f^\lambda(u) < 0$. Имеем $\lambda f(u) > \frac{1}{2}(Au,u)$. В силу условия 2) данной теоремы для некоторого $u_0 \in E$ значение $f(u_0) > 0$. Получаем, что

$$\lambda > \frac{\frac{1}{2}(Au_0,u_0)}{f(u_0)}.$$

Положим $U = \{u_0 \in E : f(u_0) > 0\}$ (в силу условия 2) данной теоремы множество U непусто). Тогда для величины λ_0 справедлива следующая оценка сверху:

$$\lambda_0 \leq \inf_{u_0\in U} \frac{\frac{1}{2}(Au_0,u_0)}{f(u_0)}.$$

Из определения квазипотенциальности имеем:

$$f(u_0) = \int\limits_0^1 (T(tu_0),u_0)\,dt.$$

Таким образом, справедлива следующая оценка сверху для величины λ_0 в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами:

$$\lambda_0 \leq \inf_{u_0\in U} \frac{\frac{1}{2}(Au_0,u_0)}{\int\limits_0^1 (T(tu_0),u_0)\,dt},$$

где $U = \{u_0 \in E : \int\limits_0^1 (T(tu_0),u_0)dt > 0\}$.

Итак, уравнение (1) разрешимо при $\lambda > \lambda_0 > 0$ ($\lambda_0 \leq \inf\limits_{u_0 \in U} \dfrac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{\int\limits_0^1 (T(tu_0), u_0)dt}$). Зафиксируем λ больше этого λ_0, λ – достаточно большое положительное число. Тогда из уравнения (1) и в силу ограниченности отображения T (условие 2) теоремы 1) имеем

$$\|Au\| = \lambda||Tu|| \leq \lambda M.$$

Положив $C = \lambda M > 0$, получим правую часть искомого неравенства, что подтверждает ограниченность оператора A. Выше было получено неравенство $\lambda > \dfrac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{f(u_0)}$. Поэтому имеем

$$||Au|| = \lambda||Tu|| > \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{f(u_0)}||Tu|| \geq 0,$$

что дает левую часть искомого неравенства, поскольку $f(u_0) = \int\limits_0^1 (T(tu_0), u_0)dt$.

Таким образом, получены оценки норм оператора в задачах на собственные значения для уравнений с разрывными операторами. Теорема доказана. $\square$

2. ПРИЛОЖЕНИЕ

В качестве приложения рассмотрим задачу Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка с разрывной нелинейностью. А именно в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ рассмотрим проблему существования ненулевых решений задачи:

$$\tau u(x) = \lambda g(x, u(x)), \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\partial_\nu^r(\Gamma)u(x) = 0, \ \ x \in \Gamma, \qquad 0 \leq r \leq p - 1, \tag{3}$$

в зависимости от параметра λ. Здесь $\tau = \sum\limits_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha$ — формальный дифференциальный оператор четного порядка $2p$ в дивергентной форме, удовлетворяющий неравенству

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=p} a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha+\beta} \geq \chi|\xi|^{2p}, \qquad \forall\ x \in \overline{\Omega}, \quad \forall\ \xi \in \mathbf{R}^n,$$

в котором постоянная χ положительна и не зависит от x и ξ, функции $a_{\alpha\beta}$ вещественнозначны и имеют непрерывные в $\overline{\Omega}$ частные производные до порядка $|\beta|$ включительно, причем, $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$ в $\overline{\Omega}$, $1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p$; функция $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ суперпозиционно измерима [5], т. е. для любой измеримой по Лебегу функции $u(x)$ на Ω функция $g(x, u(x))$ измерима по Лебегу на Ω и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbf{R}$ разрывы только первого рода, $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$ для любой $u \in \mathbf{R}$, $g_-(x, u) = \varliminf\limits_{\eta \to u} g(x, \eta)$, $g_+(x, u) = \varlimsup\limits_{\eta \to u} g(x, \eta)$ и $|g(x, u)| \leq a(x)$ для любой $u \in \mathbf{R}$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q \geq \max\left\{\dfrac{2n}{n+2p}, \dfrac{n}{2p}\right\}$, фиксирована; $\partial_\nu^r(\Gamma)$ — производные в направлении внутренней нормали ν к границе Γ порядка r.

Задаче (2)–(3) сопоставим функционал $J^\lambda(u)$, заданный на пространстве $\mathbf{H}_\circ^p(\Omega)$, следующим образом:

$$J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u),$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} \int\limits_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta u(x) dx, \qquad J_2(u) = \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x, s)\, ds.$$

Положим $U = \{u_0 \in \mathbf{H}_\circ^p(\Omega) : J_2(u_0) > 0\}$.

Определение 9. *Прыгающим разрывом* функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется такое $u \in \mathbf{R}$, что $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s \to u\pm} f(s)$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $J_1(u) \geq 0$ *для любого* $u \in \mathbf{H}^p_\circ(\Omega)$*;*

2) для почти всех $x \in \Omega$ *функция* $g(x, \cdot)$ *имеет только прыгающие разрывы,* $g(x, 0) = 0$ *и* $|g(x,u)| \leq a(x)$ *для любой* $u \in \mathbf{R}$*, где* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$*,* $q > \max\left\{\dfrac{2n}{n+2p}, \dfrac{n}{2p}\right\}$*, фиксирована;*

3) найдется $u_0 \in \mathbf{H}^p_\circ(\Omega)$*, для которого* $J_2(u_0) > 0$*;*

4) если пространство $N(\tau)$ *решений задачи* $\begin{cases} \tau u = 0, \\ \partial^r_\nu(\Gamma) u(x) = 0 \end{cases}$ *ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что*

$$\lim_{u \in N(\tau),\, \|u\| \to +\infty} J_2(u) = -\infty.$$

Тогда для почти всех $x \in \Omega$ *имеют место следующие оценки дифференциального оператора* τ*:*

$$0 \leq \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)} |g(x, u(x))| < |\tau u(x)| \leq b(x),$$

где $b(x)$ *— некоторая функция из* $\mathbf{L}_q(\Omega)$*,* $q > \max\left\{\dfrac{2n}{n+2p}, \dfrac{n}{2p}\right\}$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия 1), 3), 4) теоремы* 2 *и дополнительно условия*

1′) для почти всех $x \in \Omega$ *функция* $g(x, \cdot)$ *невозрастающая на* $\mathbf{R}$ *и для некоторой* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$*,* $q = \max\left\{\dfrac{2n}{n+2p}, \dfrac{n}{2p}\right\}$ *справедливо неравенство* $|g(x,u)| \leq a(x)$ *для любой* $u \in \mathbf{R}$*;*

2′) для почти всех $x \in \Omega$ *точки разрыва функции* $g(x, \cdot)$ *лежат на плоскостях* $u = u_i$*,* $i \in I$ *(*I *— не более чем счетно), и если* $g(x, u_i-) > g(x, u_i+)$*, то* $g(x, u_i-) g(x, u_i+) > 0$ *для любого* $i \in I$*.*

Тогда утверждение теоремы 2 *остается верным с* $q = \max\left\{\dfrac{2n}{n+2p}, \dfrac{n}{2p}\right\}$.

Доказательство теорем 2, 3. Согласно теоремам 1, 2 из работы [6] задача (2)–(3) разрешима при $\lambda > \lambda_0 > 0$ ($\lambda_0 \leq \inf\limits_{u_0 \in U} J_1(u_0)/J_2(u_0)$). Зафиксируем λ больше этого λ_0. Тогда из уравнения (2) и в силу условия 2) теоремы 2, условия 1′) теоремы 3 соответственно имеем:

$$|\tau u(x)| = |\lambda| \cdot |g(x, u(x))| \leq \lambda a(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Положив $b(x) = \lambda a(x)$, получим правую часть искомого неравенства. При сделанных предположениях из работы [6] следует неравенство $\lambda > J_1(u_0)/J_2(u_0)$. Поэтому имеем:

$$|\tau u(x)| = \lambda |g(x, u(x))| > \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)} |g(x, u(x))| \geq 0,$$

так как в силу условий 1) и 3) теоремы 2 $J_1(u_0) \geq 0$ и $J_2(u_0) > 0$, что дает левую часть искомого неравенства. Таким образом, получены оценки дифференциального оператора в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями. Теоремы 2, 3 доказаны. □

Замечание 1. Условия теоремы 1 данной работы для задачи (2)–(3) проверяются аналогично тому, как это сделано в работах [1–3] к исследованию основных краевых задач для полулинейных уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью. Поэтому теоремы 2, 3 можно рассматривать и как приложение теоремы 1, сведя их доказательство к проверке выполнения условий теоремы 1 данной работы.

Замечание 2. В работе [7] получены аналогичные оценки дифференциального оператора основных краевых задач для уравнений эллиптического типа второго порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью.

Библиографический список

1. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 911–919.

2. *Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2004. Вып. 4. С. 125–132.

3. *Потапов Д. К.* Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. СПб., 2008. 99 с.

4. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972. 416 с.

5. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М., 1983. 272 с.

6. *Потапов Д. К.* О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 150–152.

7. *Потапов Д. К.* Оценки дифференциального оператора в задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 5(21). С. 268–271.

УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыхлов, О. В. Парфилова*

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
*Саратовская государственная академия права,
кафедра информатики
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассматривается класс пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, таким образом, что один корень лежит по одну сторону от начала координат, а остальные по другую сторону. Описываются случаи, когда система корневых функций m-кратно $(3 \le m \le n-1)$ полна в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, кратная полнота, корневые функции.

On Multiple Completeness of the Root Functions of the Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients

V. S. Rykhlov, O. V. Parfilova*

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
*Saratov State Academy of Law,
Chair of Informatics
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

A class of the pencils of ordinary differential operators of n-th order with constant coefficients is considered. The roots of the characteristic equation of the pencils from this class are supposed to lie on a straight line containing the origin, provided that one of the roots lies on one part from the origin, the rest lie on another part. The cases when the system of root functions is m-fold $(3 \le m \le n-1)$ complete in the space of square summable functions on main interval are described.

Key words: pencil of ordinary differential operators, multiple completeness, root functions.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением (д. в.):

$$\ell(y,\lambda) := p_0(x,\lambda)y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x,\lambda)y \tag{1}$$

и линейно независимыми краевыми условиями:

$$U_j(y,\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(\lambda)y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k)}(1) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $p_{n-k}(x,\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{n-k} p_{sk}(x)\lambda^{\nu}$, $p_{sk}(x) \in L_1[0,1]$, а $a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ.