



Ясно, что  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = -2k_n/\lambda_n$ . В силу леммы 2.3 имеем

$$I_3 \leq 1 + \frac{2\alpha_2 \delta_N^2 n^4}{1 - 2\alpha_2 \delta_N^2 n^4}.$$

Тогда

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \left\{ v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \right\}^2 dx \leq \frac{c(\alpha, \beta) \delta_N^2 n^3}{1 + c(\alpha, \beta) \delta_N^2 n^3} + \frac{2\alpha_2 \delta_N^2 n^4}{1 - 2\alpha_2 \delta_N^2 n^4} < c(\alpha, \beta, a, b, \alpha_2) \delta_N^2 n^4. \quad (3.3)$$

Из неравенства (3.3), используя теорему 7.71.1 работы [5], легко получить утверждение теоремы 3.1.  $\square$

Сопоставляя (3.1), (3.2) с (1.2), приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.2.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — целые неотрицательные числа,  $b > 0$ ,  $0 < a < \left(\frac{1-b}{2\alpha_2}\right)^{1/4}$ ,  $1 \leq n \leq a\delta_N^{-1/2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Тогда существует постоянная  $c(\alpha, \beta, a, b) > 0$  такая, что

$$|\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta, a, b) \left( \delta_N n^{5/2} + 1 \right) \left[ \sqrt{1-x} + \frac{1}{n} \right]^{-\alpha-1/2} \left[ \sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right]^{-\beta-1/2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00143-а).

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю И.И. Шарапудинову за поставленную задачу, а также за ряд полезных замечаний.

### Библиографический список

1. Шарапудинов, И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам / И.И. Шарапудинов. — Махачкала: ДНЦ, 2004. — 276 с.
2. Даугавет, И.К. О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов / И.К. Даугавет, С.З. Рафальсон // Вестн. Ленинград. ун-та. — 1974. — № 19. — С. 18–24.
3. Нурмагомедов, А.А. Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках / А.А. Нурмагомедов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. — 2008. — Т. 8, вып. 1. Сер. Математика. Механика. Информатика. — С. 25–31.
4. Нурмагомедов, А.А. Асимптотика многочленов  $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$ , ортогональных на произвольных сетках / А.А. Нурмагомедов // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию: Сб. докл. VI Междунар. конф. «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». — Владикавказ, 2008. — С. 200–211.
5. Сеге, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. — М.: Физматгиз, 1962. — 500 с.

УДК 517.54

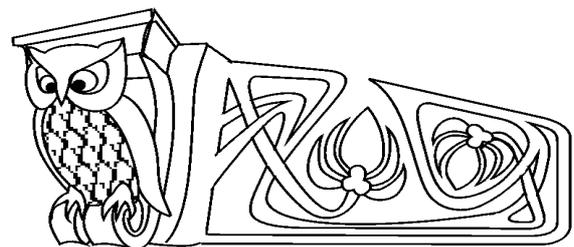
## ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ЧАСТНОГО ВИДА УРАВНЕНИЯ ЛЁВНЕРА

Д.В. Прохоров, А.М. Захаров

Саратовский государственный университет,  
кафедра математического анализа  
E-mail: ProkhorovDV@info.sgu.ru

Приводится решение в квадратурах частного случая уравнения Лёвнера для полуплоскости.

**Ключевые слова:** уравнение Лёвнера, интегрируемость, сингулярное решение.



### Integrability of a Partial Case of the Löwner Equation

D.V. Prokhorov, A.M. Zakharov

Saratov State University,  
Chair of Mathematical Analysis  
E-mail: ProkhorovDV@info.sgu.ru

We give a quadrature solution to the partial case of the Löwner equation for the upper half-plane.

**Key words:** the Löwner equation, integrability, singular solution.

**ВВЕДЕНИЕ**

Обыкновенное дифференциальное уравнение Лёвнера задает однопараметрическое семейство конформных отображений канонических областей в себя и служит мощным инструментом исследования свойств однолистных функций. Впервые оно появилось в работе [1] Карла Лёвнера и относилось к функциям, определенным в единичном круге  $\mathbb{D}$ . Уравнение содержит произвольную измеримую функцию, которая играет роль управления. В общем случае уравнение Лёвнера не интегрируется в квадратурах, однако при выборе частных видов управления оно допускает выделение семейств интегралов. Примеры частных случаев интегрирования уравнения Лёвнера можно найти в монографии И. А. Александрова [2, с.43–49].

Позднее в новых версиях уравнения Лёвнера рассматривались другие канонические области: полуплоскость, полоса, кольцо. Наибольшее внимание в последние годы уделяется «радиальному» уравнению для  $\mathbb{D}$  и «хордовому» уравнению для верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$ , которое станет центральной темой в настоящей статье.

Предположим, что все точки простой кривой  $\gamma = \gamma(t)$ ,  $t \geq 0$ , расположены в верхней полуплоскости  $\mathbb{H} = \{z : \text{Im } z > 0\}$ , за исключением начальной точки  $\gamma(0)$ , находящейся на вещественной оси  $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ . Существует единственное конформное отображение  $w = f(z, t)$ , которое отображает область  $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$  на  $\mathbb{H}$  так, что в окрестности бесконечно удаленной точки  $f(z, t)$  имеет место разложение

$$f(z, t) = z + \frac{c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Поскольку  $c(t)$  непрерывно возрастает с ростом  $t$ , параметризацию кривой  $\gamma(t)$  можно выбрать так, что  $c(t) = 2t$ . Таким образом, будем считать, что в окрестности бесконечно удаленной точки

$$f(z, t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (1)$$

Конформные отображения  $f(z, t)$  удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению Лёвнера:

$$\frac{df(z, t)}{dt} = \frac{2}{f(z, t) - \lambda(t)}, \quad f(z, 0) = z. \quad (2)$$

Непрерывная вещественная функция  $\lambda(t)$  служит управлением в уравнении Лёвнера и является образом точки  $\gamma(t)$  при отображении  $f(z, t)$ .

Обратно, дифференциальное уравнение Лёвнера (2) имеет решение при произвольном выборе непрерывной вещественной функции  $\lambda(t)$ . Для каждого значения  $t \geq 0$  решение  $w = f(z, t)$  отображает связное подмножество верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$  на  $\mathbb{H}$ .

Кагер, Ниенуис и Каданов [3] нашли точные решения уравнения (2) в нескольких случаях выбора управления:  $\lambda(t) = Ct^\beta$  и  $\lambda(t) = C(1-t)^\beta$ , где  $\beta = 0, 1/2, 1$ . Заметим, что случай  $\lambda(t) = 3\sqrt{2}\sqrt{1-t}$  соответствует примеру Куфарева [4], который в авторской версии относился к уравнению Лёвнера для  $\mathbb{D}$  и долгое время оставался уникальным примером отображения  $\mathbb{D}$  не на круг с разрезом, а на круг без круговой луночки с ортогональным пересечением граничных окружностей.

В настоящей статье предлагается еще один случай выделения точных решений уравнения (2) в квадратурах для управляющих функций вида  $\lambda(t) = Ce^{kt} + b$ . Интегрируемость уравнения (2) инвариантна относительно некоторых преобразований, в которых замена параметров в управлении означает простые геометрические изменения кривой  $\gamma(t)$ . Так, переход от  $\lambda(t)$  к  $\lambda(t) + b$  компенсируется переходом от решения  $f(z, t)$  к решению  $f(z - b, t) + b$ , что ведет к сдвигу кривой  $\gamma(t)$  на вектор  $b$ . Если зафиксировать значение  $\gamma(0)$ , положив, например,  $\gamma(0) = 0$ , то управление  $\lambda(t)$  должно быть нормировано условием  $\lambda(0) = 0$ . Замена времени  $t \rightarrow \alpha^2 t$  компенсируется изменением масштаба и функций  $\lambda(t) \rightarrow (1/\alpha)\lambda(\alpha^2 t)$ ,  $f(z, t) \rightarrow (1/\alpha)f(\alpha z, \alpha^2 t)$ , удовлетворяющих уравнению (2). Таким образом, не умаляя общности, будем рассматривать управляющую функцию в виде

$$\lambda(t) = C(e^t - 1). \quad (3)$$



Для формулировки основного результата введем обозначения. Положим

$$G(\zeta) = \int_0^\zeta \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2n+1}}{4^n(2n+1)n!}, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

и для  $C \in \mathbb{R}$

$$F(w, z, t) = \frac{C}{2}(G(w+C) - G(z+C)) + \exp\left(\frac{(z+C)^2}{4}\right) - \exp\left(\frac{(w+C)^2}{4} - t\right). \quad (4)$$

Уравнение

$$F(w, z, t) = 0 \quad (5)$$

порождает неявную функцию

$$w = f(z, t), \quad f(z, 0) = z. \quad (6)$$

Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Неявная функция (6), порождаемая уравнением (5), является решением дифференциального уравнения Лёвнера (2) с управляющей функцией (3).*

### 1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Запишем уравнение (2) с управляющей функцией (3)

$$(f - C(e^t - 1)) df = 2 dt.$$

Положим  $\tau = e^{-t}$  и придем к линейному дифференциальному уравнению:

$$(C - \tau(f + C)) df = 2 d\tau. \quad (7)$$

В оригинальном истолковании уравнения Лёвнера (2) временной параметр  $t$  принимает вещественные значения, тогда как  $f(z, t) \in \mathbb{C}$ . Поскольку правая часть уравнения (2) локально аналитична относительно  $f$  и  $t$  вдоль траектории  $t \rightarrow f(z, t)$ , интеграл  $f(z, t)$  уравнения (2) аналитически зависит от  $t$  и поэтому может быть аналитически продолжен в окрестность отрезка  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  существования решения.

Интеграл линейного дифференциального уравнения (7) имеет вид

$$\tau = \left( \frac{C}{2} \int^f \exp\left(\frac{(f+C)^2}{4}\right) df + C' \right) \exp\left(-\frac{(f+C)^2}{4}\right), \quad C' \in \mathbb{R},$$

или

$$e^{-t} = \left( \frac{C}{2} G(f+C) + C' \right) \exp\left(-\frac{(f+C)^2}{4}\right). \quad (8)$$

Начальное условие  $f(z, 0) = 0$  дает значение

$$C' = \exp\left(-\frac{(z+C)^2}{4}\right) - \frac{C}{2} G(z+C).$$

Подставляя значение  $C'$  в (8), получим решение уравнения (2) в неявном виде

$$\exp\left(\frac{(f+C)^2}{4} - t\right) = \frac{C}{2}(G(f+C) - G(z+C)) + \exp\left(\frac{(z+C)^2}{4}\right),$$

что эквивалентно уравнению (5) с  $w = f$  и функцией  $F$  из (4).

Условие невырожденности

$$F_w(w, z, t) \neq 0 \quad (9)$$

равносильно невырожденности правой части уравнения (2) с управляющей функцией (3). Следовательно, условие (9) выполняется вдоль всякого регулярного решения уравнения (2) на отрезке  $[0, T]$  его существования. Это условие вместе с условием  $F(z, z, 0) = 0$  гарантирует локальное существование неявной функции (6), порожденной уравнением (5), которое продолжимо вдоль всего отрезка  $[0, T]$ , что заканчивает доказательство теоремы 1.



## 2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЁВНЕРА

Известно (см., например, [2, с. 59]), что если управляющая функция в классическом уравнении Лёвнера непрерывно дифференцируема, то решение этого уравнения является отображением круга  $\mathbb{D}$  на круг с разрезом по непрерывно дифференцируемой кривой. Маршалл и Роде [5] значительно усилили этот результат. Именно, они показали, что если управляющая функция  $\lambda(t)$  принадлежит классу Липшица  $Lip_{1/2}$  с показателем  $1/2$  и  $\|\lambda\|_{1/2} < C_{\mathbb{D}}$  с некоторым  $C_{\mathbb{D}}$ , то решение уравнения Лёвнера отображает  $\mathbb{D}$  на  $\mathbb{D}$  с разрезом по квазиконформной кривой. Обратное, если решение уравнения Лёвнера отображает  $\mathbb{D}$  на  $\mathbb{D}$  с разрезом по квазиконформной кривой, то управляющая функция  $\lambda(t)$  принадлежит классу  $Lip_{1/2}$ .

Подобные результаты очевидным образом переносятся на случай отображения полуплоскости  $\mathbb{H}$  на полуплоскость с разрезом. Ограничение Маршалла и Роде на норму сохраняется в виде  $\|\lambda\|_{1/2} < C_{\mathbb{H}}$ . Линд [6] нашла наилучшее значение  $C_{\mathbb{H}} = 4$ . Прохоров и Васильев [7] доказали совпадение наилучших значений  $C_{\mathbb{H}} = C_{\mathbb{D}} = 4$ . Обратим внимание на то, что различие в достаточном и необходимом условиях Маршалла и Роде состоит в присутствии или отсутствии ограничения на липшицеву норму управления. Существенность такого различия можно усмотреть, например, в выборе управления  $C\sqrt{t}$  в [3], с произвольным  $C$ . Решение уравнения (2) с такими управлениями отображает  $\mathbb{H}$  с разрезом по прямой  $l$  на  $\mathbb{H}$ . Наклон прямой  $l$  к вещественной оси зависит от  $C$ , он равен  $\pi/2$  для  $C = 0$  и монотонно стремится к 0 при  $|C| \rightarrow \infty$ . Маршалл и Роде [5] дополнительно заметили, что в их достаточном условии ограничение на липшицеву норму управления можно заменить на более слабое условие

$$\inf_{\epsilon > 0} \sup_{|t-s| < \epsilon} \frac{|\lambda(t) - \lambda(s)|}{\sqrt{|t-s|}} < C_{\mathbb{D}}.$$

Таким образом, согласно [2] и [5] функция  $w = f(z, t)$  в теореме 1 осуществляет конформное отображение  $\mathbb{H} \setminus \gamma(t)$  на  $\mathbb{H}$ , где  $\gamma(t)$  — гладкая кривая, которая не касается вещественной оси. Функция  $f$  непрерывно продолжается на границу  $\partial(\mathbb{H} \setminus \gamma(t)) = \gamma(t) \cup \mathbb{R}$ .

Решение  $f(z, t)$  уравнения (2) существует в окрестности всякой точки  $t$ , для которой знаменатель в правой части уравнения не обращается в нуль. Вырождение знаменателя может произойти, если точка  $z \in \mathbb{H}$  принадлежит кривой  $\gamma$ . Если, например,  $z = \gamma(T)$ ,  $T > 0$ , то решение  $f(z, t)$  продолжается на интервал  $(0, T)$ , вплоть до сингулярной точки  $T$ . Для  $t > T$  существуют два сингулярных решения: возрастающее  $f^+(z, t)$  и убывающее  $f^-(z, t)$ , которые принимают вещественные значения.

Опишем подробнее свойства кривой  $\gamma(t)$ . Связь между кривой и управлением в уравнении Лёвнера выражается соотношениями

$$\lambda(t) = f(\gamma(t), t), \quad \gamma(t) = f^{-1}(\lambda(t), t), \tag{10}$$

которые в [3] называются линией сингулярности, поскольку обращают в тождественный нуль знаменатель дроби в правой части уравнения (2). Подставим соотношения (10) с управлением  $\lambda$  из (3) в уравнение (5) и получим равенство

$$\exp\left(\frac{C^2 e^{2t}}{4} - t\right) = \frac{C}{2}(G(Ce^t) - G(\gamma + C)) + \exp\left(\frac{(\gamma + C)^2}{4}\right). \tag{11}$$

Уравнение (11), записанное в виде  $H(\gamma, t) = 0$ ,  $H(0, 0) = 0$ , удовлетворяет условию

$$H_{\gamma}(\gamma, t) = \gamma \exp\left(\frac{(\gamma + C)^2}{4}\right) \neq 0, \quad t > 0,$$

и поэтому определяет неявную функцию  $\gamma = \gamma(t)$ .

Функцию  $\gamma(t)$  можно выразить и другим способом. Продифференцируем уравнение (11) по  $t$ , считая  $\gamma = \gamma(t)$ ,  $t > 0$ , и получим дифференциальное уравнение:

$$\exp\left(\frac{(\gamma + C)^2}{4}\right) \gamma \gamma' = -2 \exp\left(\frac{C^2 e^{2t}}{4} - t\right) \tag{12}$$



с разделяющимися переменными. Его интегрирование не представляет труда. Для формулировки результата введем обозначения

$$\varphi(\zeta) = \int_0^\zeta \exp\left(\frac{(\zeta + C)^2}{4}\right) \zeta d\zeta,$$

$$\psi(t) = -2 \int_0^t \exp\left(\frac{C^2 e^{2t}}{4} - t\right) dt.$$

Заметим, что функции  $\varphi$  и  $\psi$  выражаются через элементарные функции только при  $C = 0$ .

Мы доказали следующую теорему.

**Теорема 2.** *Решение  $w = f(z, t)$  уравнения (2) с управлением (3) отображает  $\mathbb{H} \setminus \gamma(t)$  на  $\mathbb{H}$ , где*

$$\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ \psi(t), \quad t > 0.$$

При  $C = 0$  теорема 2 выражает тривиальный факт об отображении верхней полуплоскости с разрезом по отрезку на мнимой оси на верхнюю полуплоскость.

Следующее утверждение мгновенно следует как из теоремы 2, так и из уравнения (11).

**Следствие 3.** *Кривая  $\gamma(t)$  теоремы 2 является аналитической во всех точках, кроме начальной точки  $\gamma(0) = 0$ .*

Уравнение (12) позволяет показать, что кривая  $\gamma(t)$  ортогональна к вещественной оси. Действительно, подставим в уравнение (12)  $t = 0$ ,  $\gamma(0) = 0$  и получим, что

$$(\gamma^2)' = -4.$$

Следовательно, кривая  $\gamma^2(t)$  касается вещественной оси в точке  $z = 0$ , причем касательный вектор равен  $(-4)$ . Значит, касательный вектор к кривой  $\gamma(t)$  в точке  $z = 0$  является чисто мнимым.

**Следствие 4.** *Кривая  $\gamma(t)$  теоремы 2 ортогональна к вещественной оси.*

В заключение опишем возможность дальнейшего продолжения функции  $f(z, t)$ , которая отображает кривую  $\gamma(t)$  на отрезок  $I(t)$  вещественной оси. По принципу симметрии  $f(z, t)$  продолжается в нижнюю полуплоскость, разрезанную по отражению  $\bar{\gamma}(t)$  кривой  $\gamma(t)$  относительно вещественной оси. Такая функция отображает  $\mathbb{C} \setminus (\gamma(t) \cup \bar{\gamma}(t))$  на  $\mathbb{C} \setminus I(t)$ . Кривые  $\gamma(t)$  и  $\bar{\gamma}(t)$  аналитичны, за исключением точки  $z = 0$ , в которой обе кривые имеют общий касательный вектор. Таким образом, функция  $f(z, t)$  аналитически продолжается на обе кривые и является аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением трех точек  $z = \gamma(t)$ ,  $z = \bar{\gamma}(t)$  и  $z = 0$ . Более того, в окрестностях точек  $z = \gamma(t)$  и  $z = \bar{\gamma}(t)$  функция  $f(z, t)$  разлагается в ряд по степеням  $(z - \gamma(t))^{1/2}$  и  $(z - \bar{\gamma}(t))^{1/2}$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00120) гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).*

### Библиографический список

1. Löwner, K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I / K. Löwner // Math. Ann. – 1923. – V. 89, № 1–2. – P. 103–121.
2. Александров, И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций / И. А. Александров. М.: Наука, 1976.
3. Kager, W. Exact solutions for Loewner evolutions / W. Kager, B. Nienhuis, L.P. Kadanoff // J. Statist. Phys. – 2004. V. 115, № 3–4. – P. 805–822.
4. Куфарев, П.П. Одно замечание об уравнении Лёвнера / П.П. Куфарев // Докл. АН СССР. – 1947. – V. 57. – P. 751–754.
5. Marshall, D. The Löwner differential equation and slit mappings / D. Marshall, S. Rohde // J. Amer. Math. Soc. – 2005. – V. 18, № 4. – P. 763–778.
6. Lind, J. A sharp condition for the Löwner equation to generate slits / J. Lind // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2005. – V. 30, № 1. – P. 143–158.
7. Prokhorov, D. Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation / D. Prokhorov, A. Vasil'ev // Analysis and Mathematical Physics. Trends in Mathematics / Ed. B. Gustafsson, A. Vasil'ev. – Basel: Birkhauser, 2009. – P. 451–459.